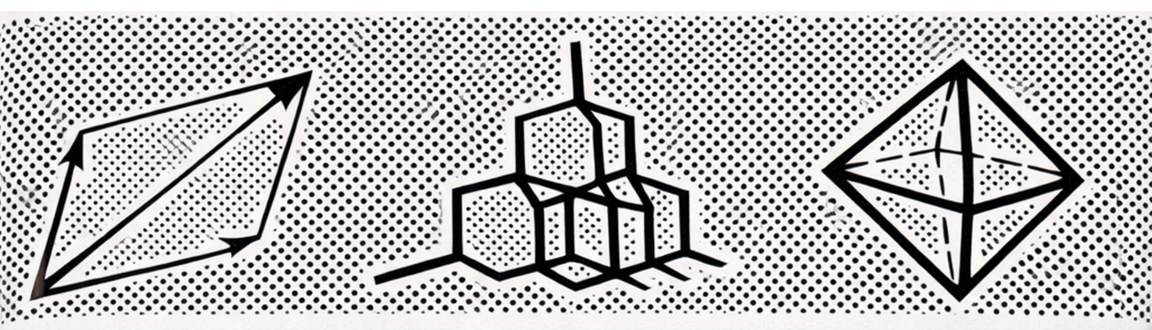


S. FRISH, A. TIMOREVA

Curso de Física General

TOMO 1

ИЗДАТЕЛЬСТВО МИР

С. ФРИШ, А. ТИМОРЕВА

КУРС ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

Том I

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

S. FRISH, A. TIMOREVA

CURSO DE FISICA GENERAL

TOMO I

TRADUCIDO DEL RUSO
por el Ingeniero ANTONIO MOLINA GARCÍA
y el Candidato a Doctor en Ciencias Filológicas
MANUEL GISBERT TALENS

La versión española ha sido revisada por el Doctor en Ciencias Técnicas FEDERICO MOLERO JIMÉNEZ

MOSCU

Editorial MIR

CDU 530 (075 8) — 60

На испанском языке

Impreso en la URSS
Derechos reservados

Ф $\frac{0231\text{-}288}{041(01)\text{-}73}$

INDICE

Introducción

§ 1. La física, su contenido y relaciones con otras ciencias y con la técnica 9
§ 2. Leyes físicas 12
§ 3. Unidades de medición 14

PRIMERA PARTE

FUNDAMENTOS FISICOS DE LA MECANICA

Capítulo I. Cinemática

§ 4. Observaciones generales 19
§ 5. Movimiento rectilíneo uniforme 22
§ 6. Movimiento rectilíneo variado 25
§ 7. Movimiento rectilíneo uniformemente variado. Aceleración 27
§ 8. Aceleración de un movimiento rectilíneo variado cualquiera 31
§ 9. Vector velocidad y vector aceleración 32
§ 10. Movimiento curvilíneo 36
§ 11. La aceleración en el movimiento curvilíneo 40
§ 12. Cinemática del sistema invariable (del cuerpo sólido invariable). Velocidad y aceleración angulares 45
§ 13. La velocidad angular como vector 50

Capítudo II. Dinámica

§ 14. Primera ley de Newton (principio de la inercia) 53
§ 15. Ley de la aceleración (segunda ley de Nowton). Fuerza y masa 55
§ 16. Fuerzas de rozamiento 58
§ 17. Cantidad de movimiento. Impulsión (impulso) de una fuerza 61
§ 18. Unidades de fuerza y de masa. Ejemplos 63
§ 19. Principio clásico de la relatividad 68
§ 20. Principio de la igualdad de la acción y de la reacción (tercera ley de Newton). Ley (principio) de la conservación de la cantidad de movimiento 69
§ 21. Fuerzas que actúan en el movimiento curvilíneo 75
§ 22. Sistemas acelerados. Fuerzas de inercia 78
§ 23. Dependencia entre la gravedad y la latitud del lugar 83
§ 24. Fuerzas de Coriolis 85

Capítulo III. Trabajo y energía

§ 25. Trabajo y potencia 91
§ 26. Energía cinética de un sistema mecánico 98

§ 27. Energía potencial de un sistema mecánico 103
§ 28. Leyes (principios) de la conservación y de la variación de la energía mecánica de un sistema 106
§ 29. Representación gráfica de la energía 110
§ 30. Fórmulas de las dimensiones 113
§ 31. Límites de aplicación de la mecánica clásica 117

Capítulo IV. Fuerzas de gravitación

§ 32. Fuerzas de gravitación 126
§ 33. Masa de inercia y masa de gravitación. Trabajo de la fuerza de la gravedad 131

Capítulo V. Movimiento del sólido

§ 34. Movimiento del sólido 136
§ 35. Rotación del sólido. Momento de fuerza y momento de inercia 138
§ 36. Momentos de inercia de algunos cuerpos 143
§ 37. Momento de la cantidad de movimiento (momento cinético) 146
§ 38. Giroscopios (giróstatos) 150
§ 39. Energía cinética de un sólido que gira 153

Capítulo VI. Movimiento de los líquidos

§ 40. Movimiento del líquido perfecto. Líneas y tubos de corriente 158
§ 41. Aplicación de la ley de la conservación de la cantidad de movimiento a un fluido 164
§ 42. Movimiento del líquido viscoso 168

SEGUNDA PARTE

FISICA MOLECULAR

Capítulo VII. Gases

§ 43. Teoría atómico-molecular de la constitución de la materia 179
§ 44. Leyes de Boyle-Mariotte y de Gay-Lussac. Determinación de la temperatura 184
§ 45. Ecuación de estado de los gases perfectos. Densidad de los gases 191
§ 46. Conceptos fundamentales de la teoría cinética de los gases . . 194
§ 47. Presiones parciales de las mezclas de gases 101
§ 48. Energía interna del gas. Grados de libertad 203
§ 49. Calor específico de los gases 206
§ 50. Distribución de las velocidades. Ley de Maxwell 213
§ 51. Distribución de las partículas por alturas 221
§ 52. Determinación del número de Avogadro 223
§ 53. Recorrido libre de las moléculas 227
§ 54. Experimentos con haces moleculares 231
§ 55. Fenómenos de transporte en los gases. Difusión 235
§ 56. Rozamiento interno y conductividad térmica de los gases . . 239
§ 57. La conductividad térmica y el rozamiento interno en los gases a presión muy baja 248
§ 58. Obtención y medición de las bajas presiones 250
§ 59. Propiedades de los gases a presiones muy bajas 257

§ 60. Gases reales. Ecuación de Van der Waals 259
§ 61. Puntualización del carácter de las correcciones de Van der Waals 265
§ 62. Isotermas de Van der Waals. Estado crítico de la substancia 270
§ 63. Determinación de las magnitudes críticas. Ecuación en magnitudes reducidas 276
§ 64. Energía interna de los gases reales. Efecto Joule-Thomson 279
§ 65. Licuación de los gases 283

Capítulo VIII. Principios de Termodinámica

§ 66. Descripción cinético-molecular y energética de los procesos 287
§ 67. Equivalente mecánico del calor 288
§ 68. Primer principio de la Termodinámica 291
§ 69. Transformaciones cerradas (ciclos) 298
§ 70. Transformaciones adiabáticas. Ecuación de la adiabática . . 305
§ 71. Trabajo durante las variaciones adiabáticas e isotérmicas del volumen de un gas 311
§ 72. Segundo principio de la Termodinámica 315
§ 73. Ciclo de Carnot. Rendimiento de una máquina térmica . . . 316
§ 74. Ciclos técnicos 324
§ 75. Transformaciones reversibles e irreversibles 331
§ 76. Esencia estadística del segundo principio de la Termodinámica 334
§ 77. Desigualdad de Clausius. Entropía 341

Capítulo IX. Fenómenos moleculares en los líquidos

§ 78. Estructura de los líquidos. Presión molecular 348
§ 79. Tensión superficial 353
§ 80. Presión debida a la curvatura de la superficie libre 358
§ 81. Presión bajo la superficie curva de un líquido (cualquiera que sea su forma) 360
§ 82. Fenómenos que se producen en el límite entre los cuerpos líquidos y los sólidos. Capilaridad 363
§ 83. Expansión de una gota por la superficie de un líquido. Películas monomoleculares 369
§ 84. Evaporación de los líquidos 372
§ 85. Disoluciones. Presión osmótica 375
§ 86. Presión de los vapores saturados sobre las superficies curvas de los líquidos y sobre las disoluciones 379

Capítulo X. Sólidos

§ 87. Cuerpos cristalinos y amorfos 385
§ 88. Energía de la red cristalina. 390
§ 89. Deformación de los cuerpos sólidos 394
§ 90. Límite de elasticidad y carga de rotura. Deformaciones plásticas 401
§ 91. Las deformaciones desde el punto de vista de la estructura cristalina de los sólidos 405
§ 92. Movimiento térmico en los sólidos. Dilatación de los sólidos 408
§ 93. Capacidad calorífica de los cuerpos sólidos 411
§ 94. Fusión y vaporización de los cuerpos sólidos 415
§ 95. Estructura cuasicristalina de los líquidos 419
§ 96. Absorción y adsorción de los gases por los sólidos 422

TERCERA PARTE

VIBRACIONES Y ONDAS

Capítulo XI. Movimiento vibratorio armónico

§ 97. Vibraciones armónicas simples 425
§ 98. Velocidad y aceleración del movimiento vibratorio armónico Ejemplos 431
§ 99. Energía del movimiento vibratorio armónico 435
§ 100. Composición de movimientos vibratorios que tienen la misma dirección 437
§ 101. Composición de movimientos vibratorios perpendiculares entre sí. 442
§ 102. Oscilaciones amortiguadas 447
§ 103. Vibraciones forzadas 451
§ 104. Representación de tipos oscilatorios cualesquiera por medio de vibraciones armónicas 458
§ 105. Representación de los procesos vibratorios por medio de números complejos 465

Capítulo XII. Ondas

§ 106. Propagación de las ondas en un medio elástico 467
§ 107. Principio de Huygens 471
§ 108. Ecuación de la onda 473
§ 109. Interferencia de ondas 476
§ 110. Ondas estacionarias 480
§ 111. Dinámica de la propagación de las vibraciones en un medio elástico 484
§ 112. Energía de la onda 488
§ 113. Efecto Doppler 492
§ 114. Velocidad de grupo 495

Capítulo XIII. Vibraciones acústicas

§ 115. Vibraciones acústicas y su propagación 499
§ 116. Interferencia de las ondas sonoras 503
§ 117. Audición 506
§ 118. Fuentes de sonidos. Obtención de ultrasonidos 511
§ 119. Reflexión y absorción de las ondas sonoras 516

Indice alfabético 517

Introducción

§ 1. La física, su contenido y relaciones con otras ciencias y con la técnica. La física, junto con otras ciencias naturales, estudia las propiedades objetivas del mundo material que nos rodea. En griego, la palabra φύσιζ designa la naturaleza.

La física estudia las formas más generales del movimiento de la materia (mecánicas, caloríficas, electromagnéticas, etc.) y sus transformaciones mutuas. Las formas de movimiento estudiadas por la física son parte integrante de todas las formas de movimiento superiores y complejas (en los procesos químicos, biológicos, etc.) y les son inherentes; pero esto no quiere decir, ni mucho menos, que comprendan todos los aspectos del movimiento. Así tenemos que a la ley de la gravitación universal se subordinan todos los cuerpos conocidos, tanto terrestres como celestes, independientemente de que sean químicamente simples o compuestos, vivos o inertes. A la ley de la conservación de la energía establecida por la física se subordinan todos los procesos, independientemente de que tengan un carácter específicamente químico, biológico u otro cualquiera. Las formas superiores, más complejas, del movimiento son objeto de estudio de otras ciencias (química, biología, etc.).

No se puede establecer netamente una línea divisoria entre la física y otras ciencias naturales. Existen extensas regiones limítrofes entre la física y la química. Incluso han surgido ciencias especiales: la físico-química dividida a su vez en química física y física química. Las ramas en que los métodos físicos se aplican para el estudio de cuestiones más o menos particulares, también se unen originando ciencias especiales. Así han surgido, por ejemplo, la astrofísica, que estudia los fenómenos físicos que se producen en los cuerpos celestes, y la geofísica, que estudia los fenómenos físicos que tienen lugar en la atmósfera y en la corteza terrestre. Los descubrimientos físicos frecuentemente han servido de impulso para el desarrollo de otras ciencias. La invención del microscopio y del telescopio aceleró el desarrollo de la biología y de la astronomía. El análisis espectral descubierto por los físicos, se ha convertido en uno de los métodos fundamentales de la astrofísica, etc.

El progreso de la física y de la química, junto con el de otras ciencias naturales, ha desempeñado un gran papel en el desarrollo de la concepción materialista del mundo.

La filosofía materialista, cuyo peldaño superior es el materialismo dialéctico, utiliza ampliamente los descubrimientos físicos para fundamentar sus tesis. La física, verificando sus teorías directamente en la experiencia y la práctica, siempre ha avanzado por el camino de la revelación de las propiedades objetivas del mundo. Por ello se explica que la inmensa mayoría de los físicos de hecho son espontáneamente materialistas. No obstante, la debilidad del materialismo espontáneo, que reside en su inconsciencia y en su incapacidad para interpretar filosóficamente los datos experimentales de la ciencia, ha acarreado el que parte de los científicos burgueses, influenciados por la ideología reaccionaria de las clases pudientes, han intentado repetidas veces utilizar los descubrimientos físicos para fundamentar las concepciones idealistas. Tales tentativas son frecuentes sobre todo en los períodos de grandes descubrimientos cuando las viejas tesis se someten a revisión y las nuevas aún no están completamente claras. Así, a finales del siglo XIX y en los primeros años del XX, cuando surgió la teoría electrónica y se descubrieron los hechos que fueron la base de la teoría de la relatividad, aparecieron numerosas «argumentaciones» del idealismo «basadas» supuestamente en los nuevos descubrimientos físicos. La inconsistencia de estas «argumentaciones», con excepcional consecuencia y claridad la puso al descubierto Lenin en su libro «Materialismo y empiriocriticismo». Refiriéndose a las declaraciones de ciertos filósofos burgueses que afirmaban que los nuevos descubrimientos de la física llevaban a la conclusión de la desaparición de la materia, Lenin escribió: ««La materia desaparece»: esto quiere decir que desaparecen los límites dentro de los cuales conocíamos la materia hasta ahora, y que nuestro conocimiento se profundiza; desaparecen las propiedades de la materia que anteriormente nos parecían absolutas, inmutables, primarias (impenetrabilidad, inercia, masa, etc.) y que hoy se revelan como relativas, inherentes solamente a ciertos estados de la materia. Porque la *única* «propiedad» de la materia con cuya admisión está ligado el materialismo filosófico, es la propiedad de *ser una realidad objetiva*, de existir fuera de nuestra conciencia»*).

Lo que Lenin dijo hace más de medio siglo con respecto a la crisis de la física de entonces, se puede aplicar por completo a la etapa actual de desarrollo de esta ciencia, cuando el estudio de los procesos intraatómicos obliga a restringir las viejas concepciones de la mecánica y de la electrodinámica, y a introducir los nuevos conceptos

*) V. I. Lenin, *Materialismo y empiriocriticismo*, Editora Política, La Habana, 1963, pág. 251.

de la mecánica cuántica. El análisis crítico consecuentemente llevado a cabo desde el punto de vista del materialismo dialéctico, permite separar lo valioso del contenido físico de las nuevas teorías, de la cáscara idealista con que a veces la encubren sus autores.

El impulso para el desarrollo de la física, lo mismo que para todas las demás ciencias, ha sido la necesidad práctica de los hombres. La mecánica de los antiguos egipcios y griegos surgió en relación directa con las necesidades planteadas por la técnica de construcción y militar de entonces. Debido a la técnica en desarrollo y al arte militar se realizaron los grandes descubrimientos científicos de fines del siglo XVII y principios del XVIII.

M. V. Lomonósov, fundador de la física y química rusas, coordinaba el trabajo científico con las necesidades de la práctica. Sus numerosas y diversas investigaciones sobre la naturaleza de los cuerpos sólidos y líquidos, sobre la óptica, meteorología y electricidad atmosférica, estaban relacionadas con diferentes finalidades prácticas.

A principios del siglo XIX, la aplicación de las máquinas de vapor planteó la necesidad de resolver la cuestión de la más provechosa transformación del calor en trabajo mecánico. Esta cuestión no se podía resolver por métodos estricta y limitadamente técnicos. Después de que en 1824 el ingeniero francés N. L. Sadi Carnot examinó de manera general el problema de la transformación del calor en trabajo, se pudo realmente aumentar el rendimiento de las máquinas caloríficas. Al mismo tiempo, el trabajo de Carnot sirvió de base para que surgiera la ciencia general de la transmisión y transformación de la energía, que después se denominó termodinámica. De esta manera vemos que las necesidades de la práctica conducen a nuevos descubrimientos físicos; éstos son la base del desarrollo ulterior de la técnica. Frecuentemente, los descubrimientos físicos que a primera vista parecen puramente teóricos y abstractos, con el tiempo encuentran las más diversas e importantes aplicaciones técnicas.

El descubrimiento de Faraday en 1831 de la inducción electromagnética hizo posible la amplia utilización de los fenómenos eléctricos. El sistema periódico descubierto en 1869 por D. I. Mendeléiev, no sólo desempeñó un papel extraordinario en el desarrollo del estudio de los átomos y de la naturaleza de los fenómenos químicos, sino que resultó ser el guía en la resolución de enorme cantidad de problemas prácticos de química y física.

En los años setenta del siglo pasado, Maxwell creó la teoría general de los procesos electromagnéticos. Partiendo de esta teoría llegó a la conclusión de la posibilidad de difundir la energía electromagnética en forma de ondas. En 1888, Hertz confirmó experimentalmente la veracidad de esta deducción de Maxwell. Unos años después, el descubrimiento de Maxwell-Hertz lo utilizó A. S. Popov para llevar a cabo la radiotelegrafía. A su vez, el desarrollo de la radiotecnia

abrió ante los físicos nuevas y extraordinariamente amplias posibilidades experimentales en el estudio de las propiedades de la naturaleza.

Los estudios de A. G. Stoliétov sobre la «actinoelectricidad» (1888-1889) desempeñaron un papel importante en la aclaración de la naturaleza del efecto fotoeléctrico, ampliamente utilizado en la técnica moderna (televisión, automática, etc.).

Los ejemplos de mutua influencia entre la técnica y la física en el proceso de su desarrollo son muy numerosos y no hay necesidad de citarlos todos. Solamente señalaremos que, en la actualidad, los problemas excepcionalmente importantes capaces de cambiar radicalmente la técnica como, por ejemplo, la aplicación práctica directa de la energía solar o la obtención de energía de las reacciones termonucleares, exigen un profundo estudio ulterior de los fenómenos físicos para poderlos resolver.

§ 2. Leyes físicas. Las leyes físicas se establecen mediante la generalización de los datos experimentales, y su veracidad se comprueba en la correspondencia de sus conclusiones con la práctica. Las leyes físicas expresan la relación interna y objetiva entre los fenómenos físicos y la dependencia real entre las magnitudes físicas.

La mayoría de las veces, el contenido de las leyes físicas se expresa matemáticamente como una dependencia de los valores numéricos a y b de las magnitudes físicas dadas A y B. De esto se deduce claramente la importancia de principio que tiene la *medición* de las magnitudes físicas para el establecimiento de las leyes físicas.

Medir una magnitud física cualquiera es compararla de manera determinada con otra magnitud homogénea tomada como unidad. Por ejemplo, la determinación de la longitud de cierto cuerpo la realizamos aplicándole sucesivamente otro cuerpo determinado cuya longitud se ha elegido como unidad.

Está claro que el resultado de la medición nunca podrá ser absolutamente exacto; el grado de exactitud depende del desarrollo de la técnica de medición y de la minuciosidad con que se ha realizado la medición. Por eso, el resultado de cualquier medición puede darse solamente de la forma siguiente: el valor numérico a de la magnitud física dada se halla entre los valores aproximados a_1 y a_2; cuanto menor sea la diferencia $\Delta a = a_1 - a_2$ con respecto a a, tanto más exactamente medida resultará la magnitud física A. Ya de esto solamente se deduce que las leyes físicas establecidas basándose en la experiencia no pueden ser absolutamente exactas.

Así pues, las leyes físicas que expresan matemáticamente relaciones cuantitativas entre las magnitudes físicas, no son absolutamente exactas; su exactitud corresponderá siempre al nivel de desarrollo de la ciencia y de la técnica de la época dada.

Veamos, por ejemplo, para determinada masa de gas, la dependencia entre el volumen y la presión a temperatura constante.

Supongamos que tenemos 8 litros de gas a la presión $p = \frac{1}{2}$ atm y a cierta temperatura constante. Variemos la presión de modo que adquiera valores determinados, por ejemplo de $p = 1$ atm, $\frac{4}{3}$ atm, 2 atm, etc., y midamos los volúmenes V del gas correspondientes a estas presiones (conservando constante la temperatura).

Entonces obtendremos los resultados experimentales que se pueden escribir en una tabla de la siguiente manera:

Presión p del gas, en atmósferas	1/2	1	4/3	2	4	8
Volúmenes correspondientes V del gas, en litros	8	4	3	2	1	1/2

De esta tabla se puede ver fácilmente que para la masa dada de gas, el producto de la presión p del gas por su volumen V es constante:

$$pV = \text{const.}$$

Este resultado representa la conocida *ley de Boyle-Mariotte*. Pero esta ley quedó establecida como resultado de mediciones realizadas solamente con un grado limitado de exactitud y en un intervalo limitado de presiones. Se podría esperar por ello que la ley de Boyle-Mariotte no resulte exacta de efectuar las mediciones con mucha más exactitud, o de hacerlas extensivas a valores más elevados y más bajos de la presión. Efectivamente, mediciones más exactas revelan cierta discrepancia con la ley de Boyle-Mariotte; estas discrepancias son pequeñas para las presiones a que se realizaron los experimentos, y grandes, a presiones considerablemente mayores. Se puede demostrar que la relación entre la presión y el volumen del gas a temperatura constante se expresa con más exactitud con la denominada fórmula de *Van der Waals*:

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = \text{const.}$$

donde $\frac{a}{V^2}$ y b son ciertos coeficientes de corrección. Si el volumen V del gas es grande en comparación con los coeficientes de corrección $\frac{a}{V^2}$ y b, éstos se pueden despreciar, y entonces obtenemos la ley de Boyle-Mariotte: $pV = \text{const}$. De esta manera tenemos que la fórmula de Van der Waals no sólo refleja mejor que la de Boyle-Mariotte

las propiedades reales del gas, sino que al mismo tiempo indica dentro de qué límites la fórmula de Boyle-Mariotte expresa una aproximación suficiente y cuándo no se puede aplicar.

Semejantes razonamientos se podrían aducir también respecto a otras leyes físicas, incluidas las mecánicas (véase el § 4).

El carácter aproximado de las leyes físicas no aminora sus valores objetivos: las leyes físicas, aun sin ser absolutamente exactas, expresan aproximadamente y con relativa veracidad las propiedades objetivas de la materia, y el grado de exactitud aumenta a medida que se va conociendo la naturaleza que nos rodea. La ciencia, en cada etapa histórica de su desarrollo, nos da una «fotografía» aproximada de la realidad; pero con el tiempo, estas fotografías se perfeccionan y reflejan mejor y de manera más completa las propiedades objetivas del mundo, cuyo conocimiento total es inagotable. «El materialismo consiste precisamente en admitir que la teoría es un calco, una copia aproximada de la realidad objetiva»*).

Frecuentemente, cuando se olvida el carácter aproximado de las leyes físicas, se les atribuye una exactitud absoluta y se extrapolan a regiones para las cuales su aplicación no ha sido comprobada, lo cual puede acarrear graves errores. Por ejemplo, establecida la ley según la cual, a temperaturas próximas a las ordinarias, cualquier gas, al descender la temperatura en 1° C a presión constante, disminuye $\frac{1}{273}$ el volumen que ocupaba a 0° C (*ley de Gay-Lussac*), mediante una extrapolación infundada para temperaturas muy bajas podemos llegar a la conclusión de que al enfriarlo hasta —273° C, la substancia gaseosa debe desaparecer. En realidad, mucho antes de llegar a esta temperatura, el gas deja de subordinarse a la ley de Gay-Lussac (véase el § 44).

§ 3. **Unidades de medición.** La elección de estas unidades puede ser arbitraria. Históricamente su elección está estrechamente relacionada con el carácter práctico de sus aplicaciones, por ejemplo, la antigua unidad rusa de longitud «codo», o la inglesa «foot» («pie»), están relacionadas con las dimensiones del cuerpo humano.

En el siglo XVIII, los científicos franceses intentaron establecer un sistema «absoluto», relacionando las unidades con objetos, que no pudiesen cambiar con el tiempo o perderse. Así, por unidad de longitud se decidió elegir la $\frac{1}{40\,000\,000}$ parte de la longitud del meridiano. Sin embargo, la elaboración de una regla de esta clase inevitablemente acarrea errores. Con dificultades análogas tropezaron los intentos de establecer otras unidades «absolutas». Por eso, desde fines del siglo pasado, se empezó a determinar las unidades mediante

*) V. I. Lenin, *Materialismo y empiriocriticismo*, Editora Política, La Habana, 1963, pág. 256-257.

cuerpos modelo (patrones). Por ejemplo, la unidad de longitud, el *metro*, se determinó como la distancia entre dos trazos hechos sobre una barra de platino iridiado que se conserva en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas. Sin embargo, en la actualidad se usa un sistema «mixto», en cierto sentido, donde parte de las unidades se determina con patrones, y otra parte reproduciendo determinados fenómenos físicos. Así, según *el sistema internacional de unidades* (abreviadamente se designa con las iniciales SI) adoptado por la Conferencia Internacional de 1960, por unidad de longitud (*metro*) se toma la longitud que comprende 1 650 763,73 longitudes de ondas luminosas de la franja anaranjada del isótopo criptón 86 (Kr^{86}) en el vacío (véase el t. III):

$$1\ m = 1\,650\,763{,}73\lambda\,(Kr^{86}).$$

El metro determinado de esta manera es muy aproximado al viejo metro correspondiente a la distancia entre los trazos de la barra patrón. Pero en comparación con el metro antiguo, el nuevo tiene la ventaja de que no puede perderse ni estropearse; no cambia con el tiempo, como lo puede hacer la barra patrón al «envejecer» el material de que se ha elaborado. Siempre se puede comparar y volver a comparar repetidas veces cualquier longitud con la de la onda luminosa de la franja anaranjada del isótopo 86 del criptón.

Para medir longitudes que comprendan una cantidad muy grande de metros o una parte muy pequeña del mismo, se emplean otras unidades derivadas de la unidad de longitud, metro, según el sistema decimal:

$$1\ km = 1\,000\ m;\quad 1\ cm = \frac{1}{100}\ m;\quad 1\ mm = \frac{1}{1\,000}\ m;$$

1 micrón (abreviadamente μ) es igual a $\frac{1}{1000}$ mm, etc.

Por unidad de masa en el sistema internacional de unidades se ha tomado la masa del patrón de platino iridiado que se conserva en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas y que se denomina *kilogramo* (abreviadamente kg). La masa del kilogramo es muy próxima a la de 1 000 cm^3 de agua pura a la temperatura de 4° C. Las unidades mayores y menores que el kilogramo se establecen también según el sistema decimal:

$$1\ t = 1\,000\ kg;\quad 1\ g = \frac{1}{1\,000}\ kg,\ \text{etc.}$$

Por *unidad de tiempo* se ha tomado el correspondiente a $\frac{1}{31\,556\,925,9747}$ parte del año tropical del 1 de enero de 1900. Se entiende por año tropical el intervalo de tiempo comprendido entre dos pasos consecutivos del Sol (en su movimiento aparente según la eclíptica) por el punto del equinoccio de primavera. De esta manera resulta que la unidad de tiempo está relacionada con el de

traslación de la Tierra alrededor del Sol. Esta unidad de tiempo se denomina *segundo*.

Para cualquiera otra magnitud física se podría establecer la correspondiente unidad elegida arbitariamente. Por ejemplo, para la unidad de superficie se podría elegir la superficie de un cuerpo cualquiera sin ninguna relación con la ya elegida unidad de longitud. Pero este procedimiento de elección de unidades sería muy incómodo. Por eso, por ejemplo, por unidad de superficie se elige la de un cuadrado de longitud de lado igual a la unidad de longitud. De manera análoga se hace con las demás magnitudes físicas estableciendo las unidades para ellas basándose en las relaciones con que estas magnitudes están ligadas a las unidades de medición ya elegidas.

Expliquemos esto con un ejemplo. Supongamos que se necesita establecer la unidad de medición para la magnitud física denominada densidad. Por densidad d de un cuerpo homogéneo dado se sobreentiende una magnitud física característica directamente proporcional a su masa m e inversamente proporcional a su volumen V. Por eso, el valor numérico de la densidad d será

$$d = k\frac{m}{V}, \qquad (1)$$

donde k es un coeficiente numérico cuyo valor depende de las unidades en que se han medido d, m y V.

Teniendo establecidas por anticipado las unidades de medición de la masa m y del volumen V, podemos elegir la unidad de densidad de manera que la ecuación (1) se cumpla para cierto valor determinado del coeficiente k. Generalmente, para establecer la unidad de una magnitud física que se introduce de nuevo para su análisis, se supone a $k = 1$. Entonces la fórmula (1) adquiere el aspecto:

$$d = \frac{m}{V}, \qquad (2)$$

y para que numéricamente sea exacta, por unidad de densidad deberemos elegir la de un cuerpo (independientemente de que exista o no en la naturaleza), cuya unidad de masa ocupe la unidad de volumen.

De la misma manera se introducen las unidades de medición de otras magnitudes físicas.

En el sistema internacional de unidades se consideran fundamentales las seis unidades siguientes:

unidad de longitud	1 metro (1 m)
unidad de masa	1 kilogramo (1 kg)
unidad de tiempo	1 segundo (1 s o seg)
unidad de temperatura	1 grado Kelvin o absoluto (1° K) (véase el § 44)

unidad de intensidad de la corriente eléctrica	1 amperio (1 A) (véase el t. II)
unidad de intensidad luminosa	1 bujía o candela (1 b ó 1 cd) (véase el t. III)

Las unidades de medición de otras magnitudes se introducen basándose en las correspondencias físicas que relacionan estas magnitudes con las fundamentales. En la mecánica, como unidades fundamentales, es suficiente utilizar las tres magnitudes físicas de longitud, masa y tiempo. En el sistema internacional, como ya se ha dicho, como unidades de estas magnitudes se toman el metro, el kilogramo y el segundo. Abreviadamente este sistema se puede designar como «sistema *MKS*».

Pero se pueden crear otros sistemas eligiendo otras unidades como fundamentales. Por ejemplo, en física se usa ampliamente el denominado sistema cegesimal (sistema *CGS*), en el cual se han tomado las siguientes unidades fundamentales:

unidad de longitud	1 centímetro (1 cm)
unidad de masa	1 gramo (1 g)
unidad de tiempo	1 segundo (1 s o seg)

Está claro que el sistema *CGS* es derivado del sistema internacional (SI).

Además, se usa el llamado *sistema técnico* (o sistema gravitatorio), en el cual como unidades fundamentales se han tomado las siguientes: longitud (1 m), tiempo (1 seg) y fuerza o peso, cuya unidad es la fuerza con que el globo terrestre atrae a un cuerpo de masa igual a 1 kg al nivel del mar, a los 45° de latitud. Esta unidad se denomina kilogramo-fuerza (o kilogramo-peso) (abreviadamente se designa 1 kgf, kg′ o kg*; para más detalles véase el § 17). Así tenemos que en el sistema técnico de unidades, las fundamentales son:

unidad de longitud	1 metro (1 m)
unidad de fuerza (peso)	1 kilogramo-fuerza (kilogramopeso) (1 kgf, kg′ o kg*)
unidad de tiempo	1 segundo (1 s o seg.)

PRIMERA PARTE

FUNDAMENTOS FISICOS DE LA MECANICA

CAPITULO I

Cinemática

§ 4. Observaciones generales. La mecánica es la ciencia que estudia las formas más simples del movimiento de la materia, el cual consiste en un desplazamiento de los cuerpos o de sus partes respecto a otros cuerpos o partes.

La mecánica, como todas las demás ciencias naturales, establece sus postulados como resultado de una generalización de los datos experimentales. Los experimentos sobre el desplazamiento de los cuerpos son muy simples. El hombre observa el desplazamiento de los cuerpos diariamente en la vida cotidiana, en cualquier proceso de producción, de aquí lo *patente* de las representaciones mecánicas. Con ello se explica también el que, de todas las ciencias naturales, la mecánica haya adquirido antes que las demás un amplio desarrollo. Las leyes fundamentales de la mecánica fueron elucidadas en gran parte por Galilei (1564—1642) y formuladas definitivamente por Newton (1642—1727). Leonhard Euler (1707—1783), que trabajó durante muchos años en la Academia de Ciencias de Petersburgo, fue el primero en expresar analíticamente las leyes de la mecánica y representó un papel muy importante en el desarrollo de ésta. No obstante, la mecánica de Galilei y Newton, que se denominó «*clásica*», surgió como resultado de las observaciones de un tipo limitado de movimientos, a saber, de los movimientos de cuerpos de dimensiones comparables con las del cuerpo humano (la piedra lanzada) o muy

grandes con respecto a éste (movimiento de los planetas), y que se desplazan a pequeñas velocidades. De aquí, el carácter aproximado de la mecánica clásica. El desarrollo ulterior de la ciencia ha demostrado que la mecánica clásica es una admirable aproximación de la realidad mientras se trate del movimiento de los cuerpos que constan de gran cantidad de átomos (*cuerpos macroscópicos*) y velocidades pequeñas en comparación con la de la luz. Lenin escribió: «...la mecánica era un calco de los movimientos lentos reales, mientras que la nueva física es un calco de los movimientos reales que tienen lugar a prodigiosas velocidades»*).

Las leyes del movimiento de los cuerpos macroscópicos a velocidades comparables a la de la luz, las formula la *teoría de la relatividad* establecida por Einstein.

Las leyes de la mecánica clásica también dejan de ser justas cuando pasamos al movimiento de átomos independientes o de partículas elementales (*cuerpos microscópicos*)**). Las leyes del movimiento de los cuerpos microscópicos las establece la llamada *mecánica cuántica* (quántica). Más adelante estableceremos los límites de aplicación de la mecánica clásica; por ahora supondremos que en nuestros casos se trata siempre de movimiento de cuerpos macroscópicos a velocidades pequeñas en comparación con la de la luz.

La familiaridad de los fenómenos mecánicos, su evidencia y los éxitos obtenidos en la explicación de ciertos fenómenos físicos (por ejemplo, los acústicos) mediante representaciones puramente mecánicas, condujo a que en el siglo XIX, para muchos físicos, *explicar* cualquier fenómeno fuera reducirlo a los fenómenos mecánicos. Este punto de vista correspondía a la filosofía del *materialismo mecanicista*. Sin embargo, todo el desarrollo ulterior de la física, sobre todo el de la óptica y electricidad, ha demostrado que muchos fenómenos se rigen por sus propias leyes y no se pueden equiparar al tipo del movimiento mecánico, que es más simple. El materialismo mecanicista tuvo que ceder el puesto al *materialismo dialéctico*, el cual examina los tipos más generales del movimiento de la materia y tiene en cuenta toda la variedad del mundo real.

Engels escribía a este respecto:

«Los naturalistas identifican el movimiento en general con el desplazamiento mecánico... El movimiento, en lo que se refiere a la materia, es un *cambio en general*. De esta clase de confusiones surge la iracunda tendencia de reducirlo todo al movimiento mecá-

---

*) V. I. Lenin, *Materialismo y empiriocriticismo*, Editora Política, La Habana, 1963, pág. 255.

**) Aquí, la palabra «microscópico» no quiere decir que esta partícula se pueda ver al microscopio, sino que representa una partícula elemental, electrón, protón, etc., o una partícula que consta de una pequeña cantidad de partículas elementales, por ejemplo, un átomo o una molécula independiente.

nico..., con lo cual se borra el carácter específico de las demás formas de movimiento»*).

El movimiento mecánico puede ser de los aspectos más variados y tener un carácter bastante complejo. Por eso, la mecánica descompone los movimientos reales en otros más simples, y después de estudiarlos, vuelve a los movimientos más complejos. El movimiento mecánico más simple es el del llamado punto material. Por *punto material* se entiende en mecánica el *cuerpo, cuyas dimensiones y forma se pueden despreciar en el problema dado.* Un mismo cuerpo real, según el planteamiento del problema, se puede considerar como un punto material o como un cuerpo de dimensiones finitas. Por ejemplo, examinando el problema del movimiento de un proyectil de artillería, como primera aproximación podemos despreciar su forma y dimensiones y considerar el proyectil como un punto material. Pero is hay que tener en cuenta la influencia de la resistencia del aire en su movimiento y el papel que desempeña el giro del proyectil durante el mismo, ya no tenemos derecho a considerar el proyectil como un punto material: debemos tener en cuenta su forma, dimensiones, etc. Al mismo tiempo tenemos que los astrónomos, al examinar el movimiento de la esfera terrestre alrededor del Sol, pueden considerar el globo terrestre como un punto material.

De la definición del movimiento mecánico como un simple desplazamiento se deduce claramente que este desplazamiento no puede realizarse más que *en relación con* otros cuerpos materiales cualesquiera. Por eso, para tener la posibilidad de caracterizar el movimiento de un cuerpo cualquiera, ante todo hay que establecer convencionalmente con respecto a qué otro cuerpo (o grupo de cuerpos, cuya posición de unos respecto a los otros sea fija) tenemos que considerar el desplazamiento del cuerpo dado. Este cuerpo o grupo de cuerpos, forma el *sistema de referencia o de comparación.* De esta manera, todo movimiento debe considerarse en relación a un sistema de referencia determinado. En los diversos casos, el sistema de referencia puede elegirse de distintas maneras, pero nosotros podremos caracterizar concretamente el movimiento dado sólo después de haber elegido un determinado sistema de referencia. Por ejemplo, lanzando un objeto cualquiera, podemos examinar su movimiento respeto a la habitación en que nos hallamos; en este caso el sistema de referencia lo formarán las paredes, el suelo y otras partes de la habitación. Sin embargo, podemos analizar el movimiento de este mismo cuerpo con relación al Sol o a cualquier estrella, pero de antemano debemos establecer concretamente con respecto a qué vamos a analizar el movimiento de nuestro objeto.

---

*) F. Engels, *Dialéctica de la naturaleza.* (Según la versión rusa del año 1950, pág. 197). (*N. del T.*).

Prácticamente, para describir el movimiento de un cuerpo, hay que relacionarlo con los cuerpos que formen un sistema de referencia, cualquier sistema de coordenadas, por ejemplo, el habitual sistema de coordenadas rectilíneas rectangulares. Al examinar el movimiento respecto a la habitación, por ejemplo, se puede ubicar el origen de coordenadas en uno de los rincones de la misma y los ejes dirigirlos a lo largo de las paredes; o se puede colocar el origen de coordenadas en el Sol, y los ejes trazarlos en dirección a determinadas estrellas*). Más adelante plantearemos la cuestión de la *elección* del sistema de referencia; por ahora consideraremos que se nos da este sistema y el sistema de coordenadas invariablemente relacionado con él y que nosotros utilizaremos para caracterizar el movimiento.

Se ha convenido en dividir la mecánica en dos partes: la *cinemática* que estudia solamente el propio desplazamiento en dependencia del tiempo, y la *dinámica* que estudia las interacciones de los cuerpos que conducen a un cambio de sus estados de movimiento.

§ 5. Movimiento rectilíneo uniforme. Veamos el movimiento de un cuerpo, considerado como punto material, que se reduce a un desplazamiento uniforme a lo largo de cierta recta OA (fig. 1).

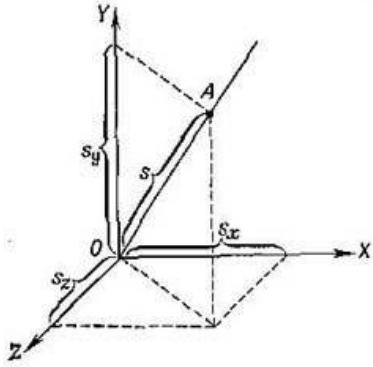


Fig. 1. La posición del cuerpo A en el movimiento rectilíneo la determina el segmento s o sus proyecciones sobre los ejes de coordenadas x_x, s_y, s_z.

En cualquier momento dado de tiempo t, cuando el cuerpo en movimiento se halla en cierto punto A, podemos determinar su posición mediante el segmento s considerado a partir de cierto punto O que tomaremos convencionalmente como origen de espacios. Está claro que s variará con el tiempo. El segmento s coincidirá con el *trayecto* recorrido realmente por el cuerpo que se mueve en línea recta, si en el momento inicial ($t = 0$) el cuerpo se hallaba en el punto O. Trazando el sistema de coordenadas $OXYZ$, se puede carac-

*) El sistema de coordenadas también se puede relacionar con cualquier medio material continuo. Por ejemplo, se puede estudiar el movimiento de los peces con respecto al agua en que están nadando.

terizar también la posición del cuerpo en cada momento dado por sus coordenadas x, y y z. En el sistema elegido de coordenadas de la fig. 1, las coordenadas del cuerpo x, y y z coinciden con las proyecciones de los trayectos s_x, s_y y s_z sobre los ejes de coordenadas. De esta manera tenemos que la posición de un punto en movimiento se puede caracterizar por el segmento s, que será cierta función del tiempo t:

$$s = f(t), \tag{1}$$

o por sus coordenadas x, y y z, que también serán funciones del tiempo:

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t); \quad z = f_3(t). \tag{2}$$

Como el movimiento que examinamos se efectúa a lo largo de una recta, se denomina *rectilíneo*.

El movimiento se denomina *uniforme*, si el cuerpo que se desplaza recorre los mismos espacios a iguales intervalos de tiempo arbitrariamente elegidos.

Los movimientos, evidentemente, se diferenciarán unos de otros en que los cuerpos pueden recorrer, durante iguales intervalos de tiempo, distintos espacios, o, en otras palabras, en que los mismos espacios pueden recorrerse en distintos intervalos de tiempo. Estas diferencias en los movimientos las caracterizaremos introduciendo el concepto de *velocidad*. Por velocidad de un movimiento uniforme se sobreentiende una magnitud física que sea tanto mayor, cuanto mayor sea el espacio recorrido por el cuerpo durante un mismo intervalo de tiempo, o, en otras palabras, una magnitud física que sea tanto mayor, cuanto menor sea el intervalo de tiempo necesario para recorrer el espacio dado. La velocidad del movimiento uniforme v es una magnitud física directamente proporcional al camino recorrido e inversamente proporcional al intervalo de tiempo invertido en recorrer este espacio.

Supongamos que la posición de un cuerpo que se desplaza en movimiento rectilíneo, en un momento determinado de tiempo t_0, se determina por el segmento s_0, y en el momento t, por el segmento s. Entonces, en el tiempo $t - t_0$ el cuerpo recorre el espacio $s - s_0$ y la expresión matemática de la velocidad v se podrá escribir de la siguiente manera:

$$v = k \frac{s - s_0}{t - t_0}, \tag{3}$$

donde k es el coeficiente de proporcionalidad. En el caso particular de $t_0 = 0$ y $s_0 = 0$, tenemos:

$$v = k \frac{s}{t}. \tag{3a}$$

En esta ecuación s es el espacio recorrido durante el tiempo t. La velocidad del movimiento uniforme es una magnitud constante. Utili-

zando la relación (3), la velocidad v, el espacio s y el tiempo t se pueden medir en unidades cualesquiera. En cambio, si de antemano le damos al coeficiente k un valor determinado cualquiera, como ya se ha indicado en el § 3, no se podrán elegir arbitariamente las unidades de medición para las tres magnitudes físicas v, s y t. Arbitrariamente se pueden elegir sólo dos unidades para dos magnitudes, y para la tercera magnitud la unidad de medición se ha de elegir de tal manera que la relación (3) se pueda efectuar con el coeficiente dado k. Así, suponiendo $k = 1$ y, por lo tanto, convirtiendo la fórmula (3) en:

$$v = \frac{s - s_0}{t - t_0}, \tag{4}$$

se pueden elegir arbitrariamente las unidades sólo para dos magnitudes de las que figuran en ella. Si elegimos por unidad de longitud 1 centímetro (cm) y por unidad de tiempo el segundo (s), utilizan-

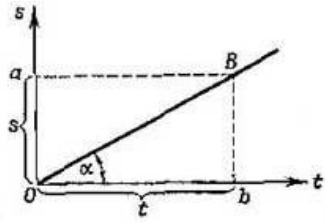


Fig. 2. En el movimiento uniforme, la relación entre el espacio recorrido s y el tiempo t la representa la recta OB.

do la fórmula (4) tendremos que tomar como unidad de velocidad la de un movimiento uniforme en el cual durante un segundo se recorra 1 cm. Esta es la unidad de velocidad en el sistema *CGS*, que abreviadamente se designa cm/s. En otros sistemas de unidades, por unidad de longitud se toma el metro (m) o el kilómetro (km), y por unidad de tiempo, el segundo (s) o la hora (h); en estos casos las unidades de la velocidad serán respectivamente m/s y km/h.

De la fórmula (4) tenemos que

$$s = s_0 + v(t - t_0). \tag{5}$$

Si $t_0 = 0$ y $s_0 = 0$, la fórmula (5) se convierte en:

$$s = vt; \tag{5a}$$

aquí, s es el espacio recorrido por el cuerpo durante el tiempo t.

Comparando la ecuación (5a) con la (1) vemos que, en el caso del movimiento uniforme del cuerpo, el espacio recorrido es una *función lineal* del tiempo.

La dependencia lineal del espacio con respecto al tiempo se puede representar gráficamente. Tomemos el eje de abscisas por eje de los tiempos t (fig. 2) y por eje de ordenadas el de espacios s. Entonces,

en correspondencia con la fórmula (5a), el espacio s en función del tiempo t se expresará por la recta OB, que pasa por el origen de coordenadas. En el transcurso de un intervalo de tiempo t, representado en el eje de abscisas por el segmento Ob, el cuerpo recorrerá el trayecto s, representado por el segmento Oa o por el segmento bB igual al Oa.

De la fig. 2 deducimos que

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{bB}{Ob} = \frac{s}{t} = v. \tag{6}$$

De esta manera, en nuestro diagrama la velocidad v se representará por la tangente del ángulo α: cuanto mayor sea la velocidad v, mayor será el ángulo α que forma la recta OB con el eje de los tiempos t.

§ 6. Movimiento rectilíneo variado. En el movimiento variado, el espacio recorrido es diferente en los distintos intervalos iguales de tiempo. En este caso se puede introducir el concepto de *velocidad media*. La velocidad media de un movimiento variado en el intervalo dado de tiempo $t - t_0$ es igual a la velocidad de un movimiento uniforme con la cual el cuerpo recorrería el mismo espacio $s - s_0$ en el mismo intervalo de tiempo $t - t_0$ que invierte al recorrerlo con movimiento variado. Designando la velocidad media por $\bar{v}$, tenemos

$$\bar{v} = \frac{s - s_0}{t - t_0}.$$

El valor de la velocidad media $\bar{v}$ depende del intervalo de tiempo en que se toma. Por eso, la velocidad media no es una característica suficiente del movimiento variado. Por ejemplo, en el movimiento de un tren en el trayecto entre dos estaciones nos puede interesar no sólo la velocidad media de todo el trayecto, sino también la velocidad que tuvo en distintos trechos. Para ello, evidentemente, deberemos dividir el trayecto en trechos Δs y medir los intervalos de tiempo Δt que se ha invertido en recorrer estos trechos, entonces

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{1}$$

representa la velocidad media en un trecho determinado Δs del trayecto.

Cuanto menores sean los intervalos de tiempo Δt para los cuales tenemos que determinar la velocidad media $\bar{v}$, tanto más exacta será la característica del movimiento que obtengamos. El intervalo de tiempo Δt se puede elegir tan pequeño, que el movimiento en este intervalo se puede considerar prácticamente uniforme. Entonces, la velocidad media $\bar{v}$ en este pequeño intervalo de tiempo nos dará una característica suficiente del movimiento en el instante dado; en otras palabras, representará la velocidad v en el punto dado del trayecto (velocidad instantánea).

Por lo tanto, la *velocidad del movimiento variado en el punto dado del trayecto (o en el instante dado, velocidad instantánea) es el límite a que tiende la velocidad media al disminuir infinitamente el intervalo de tiempo Δt para el cual se determina esta velocidad.*

Matemáticamente se expresa así:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} (\bar{v}) = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta s}{\Delta t} \right). \qquad (2)$$

Del cálculo diferencial se sabe que el $\lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta s}{\Delta t} \right)$ es la derivada del espacio respecto al tiempo; por lo tanto, la velocidad es igual, numéricamente, a la derivada del espacio respecto al tiempo:

$$v = \frac{ds}{dt}. \qquad (2a)$$

Lo dicho se puede aclarar mediante un diagrama.

Gráficamente la relación de dependencia entre el espacio y el tiempo en el movimiento variado se expresa por una curva. La forma

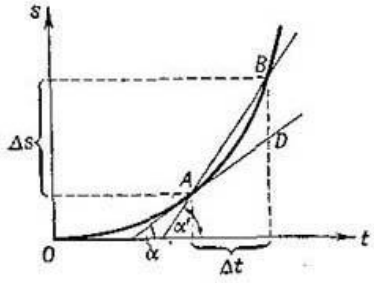


Fig. 3. La velocidad del movimiento no uniforme la determina la tangente del ángulo α formado por la línea tangente con el eje Ot.

de esta curva será diferente para distintos movimientos: para un caso particular se representa mediante la curva OAB de la fig. 3.

La velocidad media $\bar{v}$ en el intervalo de tiempo Δt es:

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \operatorname{tg} \alpha'.$$

Introduciendo la velocidad media $\bar{v}$, sustituimos por la cuerda AB la dependencia real del espacio respecto al tiempo expresada por el arco $\overset{\smile}{AB}$ para el intervalo de tiempo Δt, es decir, sustituimos el movimiento variado por el uniforme. Disminuyendo infinitamente el intervalo de tiempo Δt, según lo dicho, obtenemos la velocidad instantánea en el momento t; en este caso, en el límite la secante AB se transforma en la tangente AD; la cuerda AB y el arco $\overset{\smile}{AB}$ se confunden, es decir, el movimiento variado en un intervalo infinitamente pequeño de tiempo coincidirá con el movimiento uniforme.

Así tendremos:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = \operatorname{tg} \alpha,$$

donde α es el ángulo entre el eje Ot y la tangente al punto dado A de la curva que representa al espacio en función del tiempo.

Veamos cómo se representa el espacio recorrido en función de la velocidad en el movimiento variado.

Construyamos un diagrama en que el eje de abscisas sea el de los tiempos t y el de ordenadas, el de las velocidades v. La curva ABC

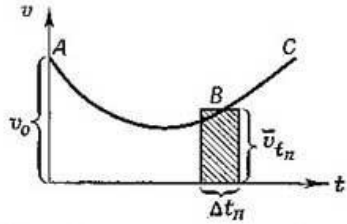


Fig. 4. El espacio recorrido en un intervalo de tiempo infinitamente pequeño Δ_n viene representado por el área de la columna rayada.

representada en la fig. 4, corresponde al caso particular en que la velocidad, de valor v_0 en el momento inicial, primeramente disminuye con el tiempo y después aumenta.

Dividamos todo el tiempo que dura el movimiento t en una gran cantidad de intervalos muy pequeños Δt. Según la fórmula (1), el trayecto recorrido en uno de estos intervalos n será $\Delta s_n = \bar{v}_{t_n} \cdot \Delta t_n$, donde $\bar{v}_{t_n}$ es la velocidad media en el intervalo de tiempo Δt_n. Gráficamente se representa por el área del estrecho rectángulo rayado de la fig. 4. Todo el trayecto s recorrido durante el tiempo t es igual a la suma de todos los pequeños trayectos Δs_n, recorridos en los distintos intervalos de tiempo Δt_n:

$$s = \sum_n \bar{v}_{t_n} \cdot \Delta_{t_n}, \qquad (3)$$

es decir, es igual a la suma de las áreas de todos los rectángulos en que ha resultado dividida la fig. $OABC$ (fig. 5.). En el límite, siendo los intervalos de tiempo Δt_n infinitamente pequeños, los rectángulos serán infinitamente estrechos y su suma coincidirá con el área de la figura $OABC$. Así tenemos que en el diagrama, el espacio s vendrá representado por el área comprendida entre la curva AB, que interpreta la relación entre la velocidad y el tiempo, y las ordenadas correspondientes a los instantes inicial y final del tiempo t durante el cual se recorre el espacio.

§ 7. Movimiento rectilíneo uniformemente variado. Aceleración. Movimiento uniformemente variado se denomina aquel en que la velocidad v, a iguales intervalos de tiempo Δt arbitrariamente elegidos

varía en igual magnitud Δv. En el caso de que Δv tenga el mismo signo que la velocidad, es decir, cuando el valor numérico de la velocidad aumenta con el tiempo, el movimiento se denomina *uniformemente acelerado*; en el caso de que Δv tenga el signo contrario, es decir, cuando el valor numérico de la velocidad disminuye con el tiempo, el movimiento se denomina *uniformemente retardado*.

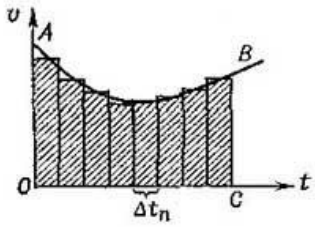


Fig. 5. El espacio recorrido en un intervalo de tiempo finito t, viene representado por el área de la figura rayada $OABC$.

Para caracterizar cuan de prisa varía la velocidad con el tiempo, se introduce la magnitud física denominada *aceleración*. La aceleración w del movimiento rectilíneo uniformemente variado es una magnitud física directamente proporcional al incremento de la velocidad e inversamente proporcional al intervalo de tiempo en que se ha efectuado este incremento de velocidad.

Supongamos que en el instante t_0 la velocidad era v_0, y en el instante t, la velocidad era v; entonces, en el intervalo $t - t_0$ la velocidad habrá variado en $v - v_0$ y matemáticamente la aceleración w se representará:

$$w = k \frac{\Delta v}{\Delta t} = k \frac{v - v_0}{t - t_0}, \qquad (1)$$

donde k es el coeficiente de proporcionalidad que depende de la elección de las unidades en que se miden la velocidad v y el tiempo t. La aceleración del movimiento uniformemente variado es una magnitud constante. Si consideramos el coeficiente de proporcionalidad $k = 1$, la aceleración

$$w = \frac{\Delta v}{\Delta t}; \qquad (1a)$$

en el sistema *CGS* por unidad de aceleración se debe tomar la de un movimiento en que la velocidad varíe 1 cm/s cada segundo. Abreviadamente esta unidad de aceleración se designa 1 cm/s^2. En el sistema *MKS*, por unidad de aceleración se toma la del movimiento en el cual la velocidad varía 1 m/s cada segundo (abreviadamente 1 m/s^2).

De la fórmula (1), siendo $k = 1$, tenemos:

$$v = v_0 + w(t - t_0). \qquad (2)$$

Por lo tanto, en el movimiento uniformemente variado, la velocidad es una función lineal del tiempo. Si $t_0 = 0$, según la (2):

$$v = v_0 + wt;$$

y, finalmente, si la velocidad inicial $v_0 = 0$,

$$v = wt. \tag{2b}$$

La aceleración w tiene el mismo signo que el incremento de velocidad Δv, por eso, en el movimiento uniformemente acelerado, la aceleración w es positiva, y en el uniformemente retardado es negativa.

Determinemos el espacio recorrido en el movimiento uniformemente variado.

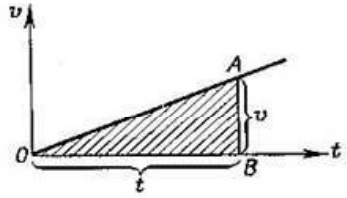


Fig. 6. El espacio recorrido en el movimiento uniformemente variado viene representado por el área del triángulo OAB.

Supongamos, para simplificar, que la velocidad inicial $v_0 = 0$, entonces, según la (2b), gráficamente, la relación entre la velocidad y el tiempo (consideramos que $w > 0$) vendrá representada por la recta OA (fig. 6), y, por lo tanto, según lo dicho en el párrafo anterior, el espacio s recorrido en el tiempo t, lo representará el área de la figura OAB. Como en el caso dado, esta figura es un triángulo, su superficie será

$$\frac{AB \cdot OB}{2} = \frac{v \cdot t}{2}.$$

De aquí que el espacio s recorrido en el tiempo t sea:

$$s = \frac{vt}{2}. \tag{3}$$

Sustituyendo la velocidad v por su valor en función de w y de t según la (2b), obtenemos:

$$s = \frac{wt^2}{2}. \tag{4}$$

Si la velocidad inicial no era igual a cero, sino que tenía un valor v_0, resulta:

$$s = v_0 t + \frac{wt^2}{2}. \tag{4a}$$

Como ejemplo de movimiento uniformemente variado puede citarse el de caída libre de los cuerpos sobre la superficie de la Tierra.

En este caso la aceleración es:

$$w = g = 9{,}81 \text{ m/s}^2.$$

La caída de los cuerpos en el aire se puede considerar uniformemente variada sólo en los casos en que el valor de la resistencia del aire sea pequeño (una piedra que cae de una pequeña altura); cuando el valor de esta resistencia sea grande, la caída de los cuerpos en el aire se convierte en movimiento uniforme (véase el § 16). Así, por ejemplo, las pequeñas gotas de agua que forman la niebla, descienden con movimiento uniforme; también desciende con movimiento uniforme en el aire un paracaidista con el paracaídas desplegado.

Examinemos varios ejemplos de movimiento uniformemente variado.

Ejemplo 1. Una piedra se ha dejado caer desde una torre de 20 m de altura con una velocidad inicial igual a cero. Despreciando la resistencia del aire, determinar: el tiempo de caída, y la velocidad con que llega la piedra al suelo.

Solución. Como el movimiento de la piedra, según los datos, se puede considerar uniformemente variado, aplicamos las ecuaciones deducidas en este párrafo.

Con la fórmula (4) determinamos el tiempo de caída de la piedra:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{w}}, \tag{5}$$

donde s es el espacio recorrido por la piedra, es decir, la altura desde la cual ha caído.

Colocando en lugar de la aceleración w su valor $w = g = 9{,}81$ m/s², obtendremos

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 20}{9{,}81}} \text{ s} \approx 2 \text{ s}.$$

La velocidad adquirida al final del movimiento será:

$$v = wt = gt = 9{,}81 \cdot 2 \text{ m/s} = 19{,}6 \text{ m/s}.$$

La velocidad v adquirida al final de la caída se puede expresar también algébricamente en función del espacio recorrido s y de la aceleración w. Para ello, en la ecuación $v = wt$, sustituimos t por su valor según la (5), entonces

$$v = wt = w\sqrt{\frac{2s}{w}},$$

de donde

$$v = \sqrt{2sw}. \tag{6}$$

Ejemplo 2. Una piedra lanzada verticalmente hacia arriba alcanza la altura de 30 m. ¿Cuánto tiempo invertirá en alcanzar esta altura y cuánto en caer a la Tierra? ¿De qué velocidad inicial hay que dotarla?

Solución. El movimiento de la piedra lanzada verticalmente hacia arriba será, en el ascenso, uniformemente retardado, por lo tanto la aceleración $w = -g$ y la altura alcanzada

$$s = v_0 t - \frac{gt^2}{2}, \tag{7}$$

donde v_0 es la velocidad inicial de la piedra y t el tiempo invertido en el ascenso. La velocidad inicial v_0 se determina partiendo de la condición de que la velocidad v_s en el punto de máxima altura es igual a cero, es decir:

$$v_s = v_0 - gt = 0,$$

de donde

$$v_0 = gt \tag{8}$$

y, por consiguiente, según la (7)

$$s = \frac{gt^2}{2},$$

el tiempo de ascenso de la piedra hasta la altura s será:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g}}.$$

Comparando este tiempo con el determinado por la ecuación (5), hallamos que el ascenso de la piedra hasta la altura s dura lo mismo que la caída libre desde la misma altura. Sustituyendo t por su valor según la (8), obtenemos:

$$v_0 = \sqrt{2sg}.$$

Por lo tanto [compárese con la fórmula (6)], la velocidad con que hay que lanzar la piedra verticalmente hacia arriba, también será igual a la que adquiere cayendo libremente desde la misma altura s. Aplicando las ecuaciones deducidas y colocando los valores numéricos del ejemplo, hallamos:

$$v_0 = \sqrt{2sg} = \sqrt{2 \cdot 30 \cdot 9{,}81}\ \text{m/s} \cong 24{,}2\ \text{m/s};$$

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 30}{9{,}81}}\ \text{s} \cong 2{,}48\ \text{s}.$$

§ 8. Aceleración de un movimiento rectilíneo variado cualquiera. En el caso general del movimiento rectilíneo variado se puede introducir el concepto de *aceleración media*. La aceleración media $\bar{w}$ en el intervalo dado de tiempo Δt es igual a la aceleración de un cuerpo con aceleración uniforme y adquiere, en este mismo intervalo de tiempo Δt, el mismo incremento de velocidad Δv, que el del cuerpo que estudiamos:

$$\bar{w} = \frac{\Delta v}{\Delta t}. \tag{1}$$

Introduzcamos el concepto de *aceleración instantánea* análogamente al de velocidad instantánea. Disminuyamos el intervalo de tiempo Δt hasta tal punto, que el movimiento en este intervalo se pueda considerar uniformemente variado. La aceleración media $\bar{w}$ en este intervalo de tiempo será la aceleración instantánea. Por lo tanto, por aceleración instantánea se comprende el límite a que tiende la aceleración media $\bar{w}$ al disminuir infinitamente el intervalo de tiempo Δt para el cual se calcula:

$$w = \lim_{\Delta t \to 0} (\bar{w}) = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta v}{\Delta t} \right), \tag{2}$$

donde Δv es la variación infinitamente pequeña de la velocidad en el intervalo de tiempo infinitamente pequeño Δt.

Del cálculo diferencial sabemos que

$$w = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta v}{\Delta t} \right) = \frac{dv}{dt}, \tag{2a}$$

es decir, la aceleración es igual a la derivada de la velocidad respecto al tiempo. Como $v = \frac{ds}{dt}$, tenemos

$$w = \frac{d^2 s}{dt^2}, \tag{2b}$$

es decir, la aceleración es igual a la segunda derivada del espacio respecto al tiempo.

Estas relaciones, lo mismo que en el caso de la velocidad, las podemos explicar mediante un diagrama. Supongamos que en la

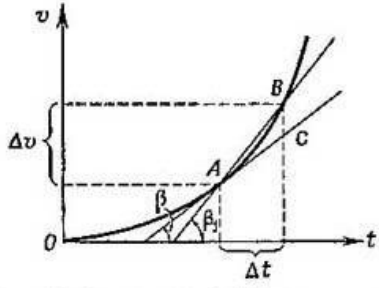


Fig. 7. La aceleración del movimiento variado viene determinada por la tangente de lángulo β que forma la línea tangente con el eje *Ot*.

fig. 7, la curva *OAB* representa la dependencia de la velocidad respecto al tiempo. La aceleración media $\bar{w}$ en el intervalo de tiempo desde t hasta $t + \Delta t$ será

$$\bar{w} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \operatorname{tg} \beta_1,$$

donde β_1 es el ángulo entre el eje *Ot* y la secante *AB*. Disminuyendo infinitamente el intervalo de tiempo Δt, la secante *AB* se aproximará a la tangente *AC* y, de esta manera, en el límite:

$$w = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta v}{\Delta t} \right) = \operatorname{tg} \beta,$$

donde β es el ángulo entre el eje *Ot* y la tangente *AC* en el punto dado *A* de la curva que representa la velocidad en función del tiempo.

§ 9. Vector velocidad y vector aceleración. La velocidad se caracteriza no sólo por su valor numérico, sino también por la dirección y sentido. Para describir el movimiento de un cuerpo no es suficiente indicar el valor numérico de la velocidad, hay que indicar además en qué dirección se desplaza.

Las magnitudes que definen la dirección además del valor numérico, se denominan *vectores*. Las magnitudes para cuya determinación es suficiente saber sólo su valor numérico, se denominan *escalares* (por ejemplo, un intervalo de tiempo, la masa, la densidad, etc.)*).

El vector se puede representar por una flecha de longitud igual a la cantidad de unidades, arbitrariamente elegidas, correspondiente a su valor numérico, y cuya dirección coincida con la del vector.

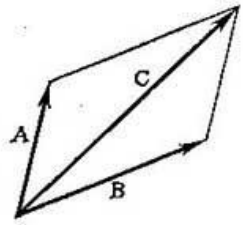


Fig. 8. Al sumar dos vectores A y B, el vector resultante C viene representado por la diagonal del paralelogramo cuyos lados son vectores A y B.

Se ha decidido designar los vectores con una letra en negrita, y su valor numérico, con la misma letra corriente; por ejemplo, la letra **A** designa un vector, y la A, su magnitud. El signo menos colocado delante del vector denota que el vector $-\mathbf{A}$ va dirigido en sentido contrario al vector **A** siendo de igual longitud.

La experiencia enseña que las magnitudes físicas vectoriales se suman de manera diferente que las magnitudes algébricas. El modo de sumar los vectores lo determina la regla del paralelogramo: al sumar dos vectores **A** y **B**, el vector resultante **C** lo determina la diagonal del paralelogramo de lados **A** y **B** (fig. 8).

Al sumar más de dos vectores se puede hallar el vector resultante aplicando sucesivamente la regla del paralelogramo. El mismo resultado se obtiene, si se construye una línea quebrada, cuyas componentes, según la magnitud, dirección y sentido, coincidan con los vectores componentes **A**, **B**, **C** y **D** (fig. 9). El vector resultante **F** lo determina el vector que cierra la línea quebrada, formando un polígono, desde su origen hasta su extremo**)).

La diferencia entre dos vectores **A** y **B** se puede determinar introduciendo un vector $\mathbf{B}' = -\mathbf{B}$, entonces:

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + \mathbf{B}'. \qquad (1)$$

*) Algunos autores españoles, las magnitudes que representan la masa, la densidad, etc., es decir, que son siempre positivas y en su representación intervienen solamente los números que las miden, las denominan magnitudes modulares; y las que admiten una sola dirección (en dos sentidos opuestos) como el tiempo que, a partir de un punto origen, tiene dos signos (positivo o negativo), las denominan escalares (*N. del T.*).

**) En español, este polígono se denomina «polígono de vectores, vectorial o sumatorio» (*N. del T.*).

Construyendo el vector **B'** de magnitud igual a la del **B**, pero de sentido opuesto, encontramos el vector **C** resultante de la suma geométrica de los vectores **A** y **B'**. Según la ecuación (1), el vector **C** representará al mismo tiempo la diferencia de vectores **A** — **B**.

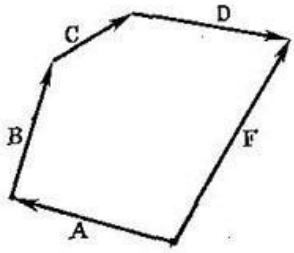


Fig. 9. El vector F, que es la resultante (suma) de los vectores A, B, C y D, se representa por el vector que cierra, formando polígono, la línea quebrada compuesta por los vectores A, B, C y D.

Un vector se puede determinar bien directamente, por su dirección, sentido y magnitud, bien por sus proyecciones sobre los ejes de coordenadas. En el caso de coordenadas planas rectangulares

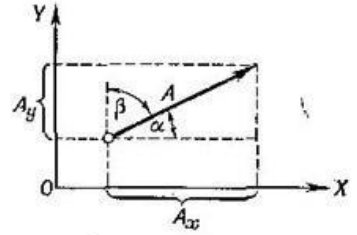


Fig. 10. Los segmentos A_x y A_y son las proyecciones del vector **A** sobre los ejes OX y OY.

(fig. 10), el vector **A** lo determinan las proyecciones en los ejes A_x y A_y. En la fig. 10 vemos que

$$A_x = A\cos\alpha; \quad A_y = A\cos\beta = A\operatorname{sen}\alpha;$$

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}. \qquad (2)$$

La dirección del vector **A** la determina el ángulo α que forma con el eje OX, o el ángulo β que forma con el eje OY.

Como se ve de la fig. 10:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{A_y}{A_x}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{A_x}{A_y}. \qquad (3)$$

La velocidad del movimiento rectilíneo es un *vector* dirigido según la recta por la cual se mueve el cuerpo y en el mismo sentido en que éste se desplaza. Los resultados del cálculo del movimiento realizado fundándose en la regla vectorial de la suma de velocidades, coinciden con el resultado de las observaciones de los movimientos reales, lo cual confirma que se puede considerar la velocidad como un vector. Si el cuerpo participa simultáneamente en

dos movimientos rectilíneos uniformes de velocidades $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ (fig. 11), el movimiento resultante lo caracteriza el vector velocidad $\mathbf{v}$, resultante de la suma vectorial de las velocidades $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$.

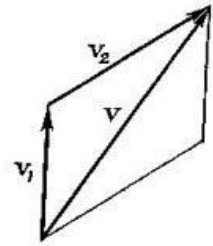


Fig. 11. La velocidad resultante v viene determinada por la diagonal del paralelogramo cuyos lados son las velocidades que se suman $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$.

El vector velocidad $\mathbf{v}$ se puede descomponer en dos vectores componentes de direcciones cualesquiera, por ejemplo, en un plano se puede descomponer en dos dirigidos según los ejes del sistema de

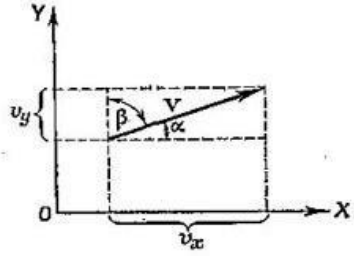


Fig. 12. Descomposición de la velocidad v en sus componentes v_x y v_y.

coordenadas OXY (fig. 12). En este caso, la fórmula (2) puede escribirse de la manera siguiente:

$$v_x = v\cos\alpha;\quad v_y = v\cos\beta = v\operatorname{sen}\alpha;\quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \qquad (4)$$

Ejemplo. Hallar la magnitud y dirección con respecto a la orilla, de la velocidad $\mathbf{v}$ de un hombre que se desplaza transversalmente en el interior de un barco. La velocidad del hombre es $v_1 = 2$ m/s, la del barco, $v_2 = 8$ m/s.

Solución. La velocidad $\mathbf{v}$ del hombre respecto a la orilla es la suma vectorial de las velocidades $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ (fig. 13). Su valor numérico será $v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{4 + 64}$ m/s $= \sqrt{68}$ m/s $= 8{,}25$ m/c. La dirección de la velocidad $\mathbf{v}$ la determina el ángulo α que forma esta velocidad con la dirección de movimiento del barco. Según la fig. 13 tenemos:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_1}{v_2} = \frac{2}{8} = 0{,}25,$$

de donde $\alpha = 14°03'$.

La aceleración, como la velocidad, es un *vector*, ya que se caracteriza por tener, además de magnitud, dirección y sentido. En el caso del movimiento rectilíneo, las direcciones de la aceleración, velocidad y movimiento están en una misma recta. En este caso, la acele-

ración, como ya se ha indicado, puede tener el mismo sentido que la velocidad (movimiento acelerado), o el sentido contrario (movimiento retardado). Si la aceleración va dirigida con cierto ángulo respecto a la velocidad, ésta variará no sólo de magnitud, sino también de *dirección*. En este caso el cuerpo se desplazará según una curva.

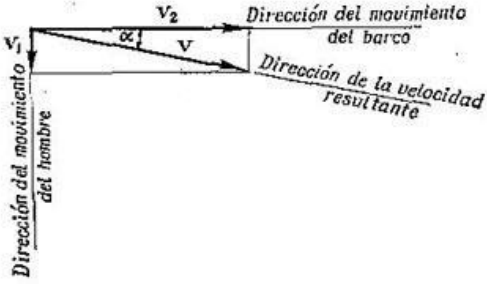
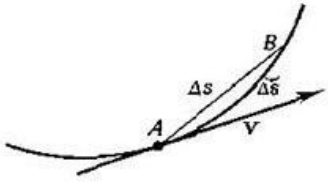


Fig. 13. Determinación de la velocidad resultante.

§ 10. Movimiento curvilíneo. Si la línea descrita por el punto material en su movimiento, o, como se ha convenido en denominarla, la *trayectoria*, es una curva, el movimiento se denominna *curvilíneo*. Para determinar el vector velocidad en el movimiento curvilíneo,

Fig. 14. En el movimiento curvilíneo, el vector velocidad v va dirigido según la tangente a la trayectoria.



examinemos lo que pasa en un pequeño intervalo de tiempo Δt. En este intervalo de tiempo, el punto material recorrerá un pequeño arco $\breve{\Delta s}$ (fig. 14). Si disminuimos infinitamente este intervalo de tiempo, el arco $\breve{\Delta s}$ también se reducirá infinitamente y en el límite se confundirá con su cuerda Δs. En el límite, el movimiento curvilíneo coincidirá, en un trecho infinitamente pequeño, con el movimiento rectilíneo. Por eso, la velocidad del movimiento curvilíneo en el punto dado A será:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\breve{\Delta s}}{\Delta t} \right), \qquad (1)$$

y su dirección coincidirá con la de una cuerda infinitamente pequeña Δs de un arco infinitamente pequeño $\breve{\Delta s}$. Pero, como en el límite, la cuerda infinitamente pequeña coincide, según la dirección, con la tangente en el punto dado A, el *vector de la velocidad instantánea v en el movimiento curvilíneo va dirigido según la tangente a la trayectoria del cuerpo en el sentido de su movimiento.*

Si la velocidad v en el movimiento curvilíneo tiene un valor *numérico* constante, es decir, si en iguales intervalos cualesquiera de tiempo el punto material recorre un arco de igual longitud, el movimiento curvilíneo se denomina uniforme. Sin embargo, hay que recordar que la velocidad, en este caso, también cambia de dirección constantemente: en cada punto de la trayectoria tendrá la dirección de la tangente, que en la trayectoria curvilínea en diferentes puntos tiene distintas direcciones.

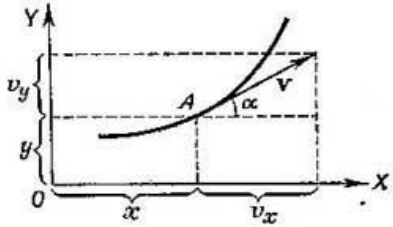


Fig. 15. Representación del movimiento curvilíneo por medio de las componentes de la velocidad en las direcciones de los ejes de coordenadas.

De esta manera tenemos que *en el movimiento curvilíneo, el vector velocidad nunca es constante: siempre va cambiando.* En el caso del movimiento curvilíneo uniforme, este vector varía sólo de dirección, conservando constante su magnitud; y en el caso general del movimiento curvilíneo variado, cambia de dirección y de magnitud.

Para examinar el movimiento curvilíneo es muy cómodo determinar la posición del cuerpo mediante coordenadas, por ejemplo, en el caso del movimiento en el plano, con las coordenadas x e y (fig. 15).

También es muy cómodo examinar, en vez del propio vector v de la velocidad instantánea, sus proyecciones en los ejes de coordenadas v_x y v_y. Entonces, el valor numérico del vector v, considerando el problema en un plano, será:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \tag{2}$$

y su dirección la determinará el ángulo α formado por el eje OX y la recta con que coincide la dirección del vector velocidad.

En la fig. 15 vemos que

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_y}{v_x}. \tag{3}$$

Las proyecciones en los ejes de coordenadas Δx y Δy corresponden al vector de desplazamiento del cuerpo Δs. Según las reglas del cálculo diferencial, las proyecciones de la velocidad

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = \frac{ds}{dt}$$

serán las magnitudes

$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \right) = \frac{dx}{dt};$$

$$v_y = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta t} \right) = \frac{dy}{dt}. \tag{4}$$

Aquí dx/dt y dy/dt son las derivadas de las coordenadas respecto al tiempo. Estas se pueden calcular, si las coordenadas del cuerpo en movimiento se dan en determinada función del tiempo:

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t).$$

Veamos unos cuantos ejemplos de movimiento curvilíneo.

Ejemplo 1. Un cuerpo ha sido lanzado con una velocidad inicial v_0 y un ángulo α de ascenso respecto al horizonte. Hallar: 1) la trayectoria, 2) la altura de máxima elevación, 3) la distancia alcanzada (amplitud del tiro).

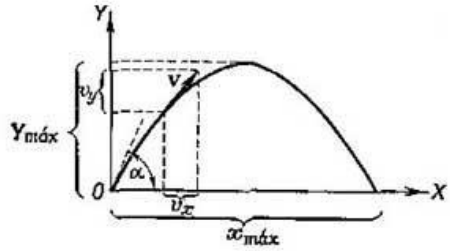


Fig. 16. Trayectoria de un cuerpo lanzado según una línea que forma el ángulo α con el horizonte.

Solución. Eligiendo los ejes de coordenadas como se indica en la fig. 16, deducimos las siguientes ecuaciones para las componentes de la velocidad del cuerpo (se desprecia la resistencia del aire).

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v_0 \cos\alpha, \\ v_y &= v_0 \operatorname{sen}\alpha - gt, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

donde g es la aceleración de la gravedad. Las coordenadas x e y del cuerpo en función del tiempo se expresan:

$$\left.\begin{aligned} x &= v_0 \cos\alpha \cdot t, \\ y &= v_0 \operatorname{sen}\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Excluyendo el tiempo t de las ecuaciones para x e y obtenemos la ecuación de la trayectoria:

$$y = \operatorname{tg}\alpha \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} \cdot x^2$$

Como α es el ángulo dado y v_0 la magnitud de la velocidad inicial, los coeficientes que van ante la x y la x^2 son magnitudes constantes; designándolos por a y b respectivamente, obtenemos

$$y = ax - bx^2,$$

que es la ecuación de *una parábola*. Por lo tanto, el cuerpo pesado lanzado hacia arriba formando un ángulo con el horizonte, se mueve según una parábola.

En el punto más elevado de la trayectoria (vértice) $v_y = 0$, de donde

$$v_0 \operatorname{sen}\alpha - gt = 0,$$

y el tiempo t' de elevación a la altura máxima será

$$t' = \frac{v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g}.$$

Altura máxima de elevación:

$$y_{máx} = v_0 \operatorname{sen}\alpha \cdot \frac{v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g} - \frac{g}{2}\left(\frac{v_0 \operatorname{sen}\alpha}{v}\right)^2 = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{2g}. \tag{7}$$

El cuerpo cae en el plano horizontal al cabo de $t = 2t'$, de donde

$$t = \frac{2v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g}.$$

La amplitud del tiro la obtenemos sustituyendo este valor de t en la ecuación para x:

$$x_{\text{máx}} = v_0 \cos \alpha \cdot \frac{2v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} \cdot \operatorname{sen} 2\alpha. \quad (8)$$

De la última fórmula tenemos que, para la velocidad dada v_0, la amplitud será máxima cuando $\alpha = 45°$.

Todas las fórmulas obtenidas son justas solamente para el movimiento de los cuerpos en el vacío. En el lanzamiento de los cuerpos pesados en el aire, un importante papel lo desempeña la resistencia de éste.

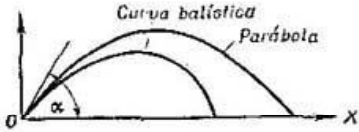


Fig. 17. Comparación de la trayectoria parabólica con la curva balística.

Debido a la resistencia del aire, durante el vuelo, la velocidad disminuye, y la trayectoria no es ya una parábola: su rama descendente es de mayor pendiente (*curva balística*, véase la fig. 17); la amplitud y la flecha (altura) son menores. El carácter de la curva balística depende en alto grado de la forma del objeto lanzado. La importancia de la resistencia del aire se puede ver en el siguiente ejemplo: de la fórmula (8) se infiere que, para un cuerpo que se desplaza en el vacío con una velocidad inicial $v_0 = 550$ m/s y un ángulo de tiro (de inclinación) de 20°, el alcance o amplitud es de 19,8 km. Pero para un proyectil de artillería de cuerpo cilíndrico con la parte anterior cónica, de 82 kgf de peso, en las mismas condiciones iniciales, la amplitud es sólo de 8,1 km.

Ejemplo 2. Un cuerpo pesado es lanzado con una velocidad inicial v_0 y un ángulo α de inclinación respecto al horizonte. Despreciando la resistencia del aire, hallar la magnitud y la dirección de la velocidad en: 1) el vértice (punto de màxima elevación) de la trayectoria, 2) el punto de caída en el plano horizontal.

Solución. Primeramente determinamos la dirección del vector velocidad v en el vértice de la trayectoria, para el cual $v_y = 0$:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{v_y}{v_x} = 0, \text{ de donde } \alpha_1 = 0.$$

Por lo tanto, en el vértice, la velocidad está dirigida horizontalmente, y será igual a

$$v_1 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha} = v_0 \cos \alpha.$$

Determinemos ahora la dirección y magnitud de la velocidad en el punto de caída. Utilizando las ecuaciones para v_y y para el tiempo t que tarda en caer el cuerpo, deducidas en el ejemplo anterior, tenemos que en el punto de caída $v_y = -v_0 \operatorname{sen} \alpha$, de donde se deduce que el ángulo α_2, que determina la dirección de la velocidad en este punto, se hallará de la relación:

$$\operatorname{tg} \alpha_2 \frac{v_y}{v_x} = -\frac{v_0 \operatorname{sen} \alpha}{v_0 \cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha,$$

de donde: $\alpha_2 = -\alpha$, es decir, la velocidad del cuerpo en el punto de caída forma con el horizonte un ángulo igual al que formaba con el horizonte la velocidad inicial, pero dirigida hacia abajo (fig. 18).

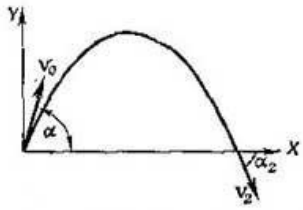


Fig. 18. La velocidad v_2 con que el cuerpo cae, numéricamente es igual a la velocidad inicial v_0.

La velocidad en el punto de caída del cuerpo será

$$v_2 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + v_0^2 \operatorname{sen}^2 \alpha} = v_0,$$

es decir, en el punto de caída la velocidad es igual a la inicial.

§ 11. La aceleración en el movimiento curvilíneo. Como se ha indicado en el párrafo anterior, en el movimiento curvilíneo variado, el vector velocidad cambia de dirección y de magnitud. La variación del vector velocidad $\Delta \mathbf{v}$ en el intervalo de tiempo desde t hasta $t + \Delta t$ es la *diferencia vectorial* de las velocidades $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_1$ que tenía el cuerpo en los instantes $t + \Delta t$ y t. En este caso la aceleración será

$$w = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{|\Delta \mathbf{v}|}{\Delta t} \right), \tag{1}$$

donde $|\Delta \mathbf{v}|$ es el valor numérico de la variación del vector velocidad $\mathbf{v}$; la aceleración tiene la misma dirección que la variación de velocidad infinitamente pequeña $\Delta \mathbf{v}$. De esta manera, la ecuación (1) puede escribirse en forma vectorial:

$$\mathbf{w} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \right), \tag{1a}$$

Antes de examinar con más detalle la aceleración en el movimiento curvilíneo, analicemos el concepto de *curvatura* de una línea curva.

En el caso de la circunferencia, la curvatura la determina la magnitud $C = \frac{1}{R}$, donde R es el radio de la circunferencia dada. Si α es el ángulo central correspondiente al arco de circunferencia s, como se sabe, entre R, α y s hay la relación:

$$\overset{\smile}{s} = R\alpha. \tag{2}$$

El *círculo osculador o de curvatura* de una línea plana en un punto A es la posición límite de la circunferencia que pasa por el punto A y otros dos puntos B_1 y B_2 al acercarse infinitamente al punto A (en la fig. 19, la curva viene representada con un trazo continuo, y el círculo osculador con una línea de puntos). El radio del círculo

osculador nos da el *radio de curvatura* de la curva en el punto A, y el centro de este círculo es el *centro de curvatura* de la curva para el mismo punto A.

Tracemos por los puntos B_1 y B_2 las tangentes B_1D y B_2E a la circunferencia que pasa por los puntos B_1, A y B_2. Las normales a estas tangentes B_1C y B_2C serán radios R de la circunferencia y se

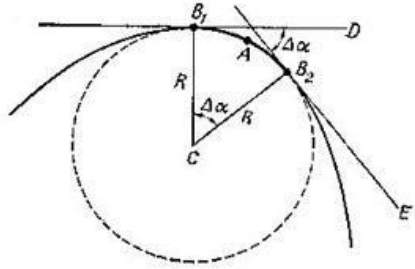


Fig. 19. Determinación del radio de curvatura del arco $\overset{\smile}{\Delta s}$.

intersecarán en su centro C. El ángulo $\Delta\alpha$ entre las normales B_1C y B_2C será igual al ángulo entre las tangentes B_1D y B_2E. Según la fórmula (2):

$$R = \frac{\overset{\smile}{\Delta s}}{\Delta\alpha},$$

donde $\overset{\smile}{\Delta s}$ representa el arco de circunferencia $\overset{\smile}{B_1AB_2}$. Cuando $\overset{\smile}{\Delta s} \to 0$, según lo dicho, el radio de la circunferencia determinará el radio de curvatura de la curva en el punto A. Así, para el radio de curvatura de la curva, tenemos:

$$R = \lim_{\overset{\smile}{\Delta s}\to 0} \left(\frac{\overset{\smile}{\Delta s}}{\Delta\alpha}\right). \qquad (2a)$$

La magnitud inversa de R es la curvatura en el punto dado:

$$C = \frac{1}{R}.$$

En la fig. 20 se ve que en el punto A_1, donde la curva es menos cerrada, el radio de curvatura R_1 es mayor que el R_2 correspondiente al punto A_2, donde la curva es más cerrada. En el punto A_3 de la curva donde la concavidad es del otro lado, el centro de curvatura también está en el otro lado de la curva.

Examinemos ahora con más detalle la aceleración de un cuerpo que se desplaza con movimiento variado según una curva plana. Sean $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ los vectores velocidad respectivamente en los puntos A y B de la curva (fig. 21). El vector $\mathbf{v}_2$ se diferencia del $\mathbf{v}_1$ por su magnitud y dirección. Tracemos desde el punto A el segmento AC

igual y paralelo al BD, que representa el vector velocidad $\mathbf{v}_2$. Entonces, el segmento EC, que es igual a la diferencia de los vectores $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_1$, representará la variación de la velocidad $\Delta\mathbf{v}$ en el trayecto AB. Acercando el punto B hacia el punto A, tenderá a cero el intervalo de tiempo Δt que invierte el cuerpo en ir desde A hasta B. En este

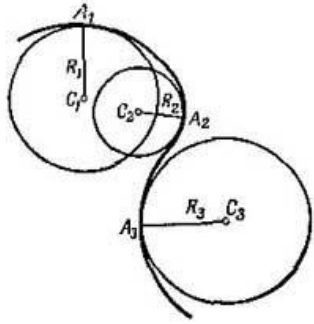


Fig. 20. Radios de curvatura en diferentes puntos de una curva.

caso, según la fórmula (1a), obtenemos para la aceleración en el punto A, la ecuación:

$$w = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta v}{\Delta t} \right).$$

Tomemos en AC el segmento $AF = v_1$ y descompongamos $\Delta\mathbf{v}$ en dos componentes: $\Delta\mathbf{v}_1$ y $\Delta\mathbf{v}_2$. Entonces $\Delta\mathbf{v}_1$ caracterizará la varia-

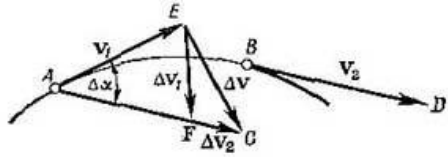


Fig. 21. Variación de la velocidad $\Delta\mathbf{v}$ en el movimiento curvilíneo.

ción de la velocidad según la dirección, y $\Delta\mathbf{v}_2$ la variación de la velocidad según la magnitud. Está claro que $\Delta\mathbf{v} = \Delta\mathbf{v}_1 + \Delta\mathbf{v}_2$; colocando este valor en la ecuación de la aceleración w, tendremos

$$w = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta v}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta v_1 + \Delta v_2}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta v_1}{\Delta t} \right) + \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta v_2}{\Delta t} \right).$$

En todas las operaciones la suma es vectorial. La magnitud

$$w_n = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta v_1}{\Delta t} \right) \qquad (3)$$

es la parte de la aceleración que caracteriza solamente la variación de la velocidad según la dirección.

Designemos el ángulo entre AE y AC por $\Delta\alpha$. Por construcción, este ángulo es el formado por los vectores de las velocidades $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$, y por lo tanto, por las tangentes a nuestra curva en los puntos A y B. Si el ángulo $\Delta\alpha$ es pequeño, como se ve de la fig. 21, se puede escribir:

$$EF = AE \cdot \Delta\alpha,$$

pero como $EF = \Delta v_t$ y $AE = v_1$, tenemos que

$$\Delta v_t = v_1 \Delta\alpha.$$

Utilizando esta ecuación de Δv_t, y sustituyendo este valor en la (3), obtenemos el valor de la componente de la aceleración w_n:

$$w_n = \lim_{\Delta t \to 0} \left(v_1 \cdot \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} \right).$$

Multiplicando y dividiendo esta magnitud por la longitud del arco $\overset{\smile}{\Delta s} = \overset{\smile}{AB}$, y teniendo en cuenta que si $\Delta t \to 0$, $\overset{\smile}{\Delta s} \to 0$ también tiende a cero, hallamos:

$$w_n = \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ \overset{\smile}{\Delta s} \to 0}} \left(v_1 \frac{\Delta\alpha}{\overset{\smile}{\Delta s}} \cdot \frac{\overset{\smile}{\Delta s}}{\Delta t} \right) = v_1 \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\overset{\smile}{\Delta s}}{\Delta t} \right) \cdot \lim_{\overset{\smile}{\Delta s} \to 0} \left(\frac{\Delta\alpha}{\overset{\smile}{\Delta s}} \right).$$

Pero el $\lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\overset{\smile}{\Delta s}}{\Delta t} \right) = v_1$, y según la (2a), el $\lim_{\overset{\smile}{\Delta s} \to 0} \left(\frac{\Delta\alpha}{\overset{\smile}{\Delta s}} \right) = \frac{1}{R}$. Sustituyendo, tendremos para w_n:

$$w_n = \frac{v_1^2}{R}, \qquad (4)$$

donde v_1 es la velocidad del cuerpo en el punto A, y R, el radio de curvatura en el mismo punto. En el límite, cuando $\Delta\alpha \to 0$, tenemos que el $\angle AEF \to 90°$ y, por lo tanto, el vector $\Delta\mathbf{v}_1$, se orientará normalmente a la velocidad $\mathbf{v}_1$, dirigida según la tangente a la curva en el punto A. De esta manera, la $\mathbf{w}_n$, que coincide según la dirección con la $\Delta\mathbf{v}_1$, resultará normal a la velocidad y dirigida hacia el centro de curvatura del trayecto en el punto dado. En consonancia con ello, esta parte $\mathbf{w}_n$ de la aceleración total se denomina *aceleración normal* o *centrípeta*.

De lo expuesto, podemos determinar fácilmente la dirección de la segunda componente $\mathbf{w}_t$ de la aceleración. Efectivamente, cuando $\Delta\alpha \to 0$, el segmento AC tiende a coincidir con la dirección de $\mathbf{v}_1$, de donde $\Delta\mathbf{v}_2$ y, por lo tanto, $\mathbf{w}_t$, resultarán dirigidas según la misma recta que la velocidad $\mathbf{v}_1$, es decir, según la tangente a la curva en el punto A. Por eso, la componente $\mathbf{w}_t$ de la aceleración se denomina *aceleración tangencial*.

Resumiendo podemos decir: *en el movimiento curvilíneo, la aceleración total* $\mathbf{w}$ *se puede descomponer en dos*: 1) *aceleración tangencial*

w_t, *que caracteriza la variación de la velocidad según su magnitud*, y 2) *aceleración normal* w_n, *que caracteriza la variación de la dirección de la velocidad.* En este caso hay que tener en cuenta que

$$w_n = \frac{v^2}{R}, \tag{5}$$

donde R es el radio de curvatura de la trayectoria en el punto dado, y v es el valor de la velocidad del cuerpo en este punto. La aceleración normal va dirigida hacia el centro de curvatura normalmente a la curva.

La aceleración tangencial es:

$$w_t = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta v}{\Delta t} \right), \tag{6}$$

donde Δv es la variación numérica del valor del vector velocidad. La aceleración tangencial va dirigida según la tangente a la trayectoria. Está claro (fig. 22) que la aceleración normal w_n y la tangencial

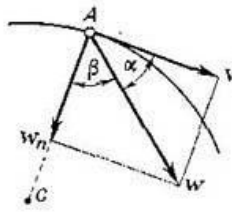


Fig. 22. En el movimiento curvilíneo, la aceleración total w se descompone en aceleración tangencial w_t y aceleración normal (centrípeta) w_n.

w_t, *son perpendiculares* entre sí, de donde la magnitud de la aceleración total w será

$$w = \sqrt{w_n^2 + w_t^2}. \tag{7}$$

La dirección del vector de la aceleración total w se determina bien en función del ángulo β que forma w con el radio de curvatura, bien en función del ángulo α que forma w con la tangente:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{w_t}{w_n}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{w_n}{w_t}. \tag{8}$$

En el movimiento curvilíneo uniforme, $w_t = 0$ y $w = w_n$; por lo tanto, en el movimiento curvilíneo uniforme, la aceleración tangencial es igual a cero, y la aceleración total coincide con la normal y *va dirigida, en cada punto de la trayectoria, según la perpendicular a ésta, hacia el centro de curvatura.* En este caso, la aceleración refleja el hecho de que la velocidad, permaneciendo constante según su magnitud, todo el tiempo *varía de dirección.*

Las fórmulas obtenidas se refieren al movimiento según una curva plana, sin embargo son fáciles de generalizar para el caso del movimiento curvilíneo no plano.

E j e m p l o. Hallar las aceleraciones normales y tangenciales de un cuerpo pesado lanzado horizontalmente con una velocidad inicial v_0 (se desprecia la resistencia del aire).

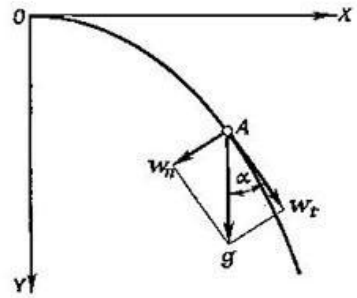


Fig. 23. Aceleración de un cuerpo lanzado horizontalmente.

S o l u c i ó n. En nuestro caso, la aceleración total será la de la gravedad g, que va dirigida verticalmente hacia abajo y es de magnitud constante. De aquí (fig. 23) que para la aceleración normal tengamos:

$$w_n = g \operatorname{sen} \alpha$$

y para la tangencial

$$w_t = g \cos \alpha \tag{10}$$

El valor del ángulo α lo determinamos sabiendo que la velocidad del cuerpo v tiene la misma dirección que w_t, y que el eje OY, en la fig. 23 va dirigido verticalmente hacia abajo; entonces

$$v_x = v_0; \quad v_y = gt,$$

de donde

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}$$

y

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{v_x}{v} = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}};$$

$$\cos \alpha = \frac{v_y}{v} = \frac{gt}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}.$$

Colocando estos valores de sen α y cos α en las (9) y (10), hallamos

$$w_n = \frac{g v_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}; \qquad w_t = \frac{g^2 t}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}}.$$

Cuando $t = 0$, es decir, en el momento inicial en que $w_t = 0$ y $w_n = w = g$, la aceleración normal coincide con la total. Según va cayendo el cuerpo, la aceleración normal irá disminuyendo (aumenta el radio de curvatura, la trayectoria del cuerpo lanzado se va enderezando) y empieza a aumentar la aceleración tangencial. Cuando $t \to \infty$, tenemos que: $w_t \to w = g$ y $w_n \to 0$.

§ 12. Cinemática del sistema invariable (del cuerpo sólido invariable). Velocidad y aceleración angulares. Todos los cuerpos reales existentes se deforman más o menos bajo la acción de las fuer-

zas que se les aplican; unas partes del cuerpo pueden desplazarse respecto a otras. Para simplificar este razonamiento se ha introducido el concepto de *cuerpo sólido invariable*. Por cuerpo sólido invariable se entiende un cuerpo imaginario que no se deforma bajo la acción de las fuerzas aplicadas al mismo. En el cuerpo sólido invariable no puede haber desplazamientos relativos de unas de sus partes respecto a las otras. El movimiento del cuerpo sólido invariable se reduce a los movimientos *de traslación* y *de rotación*.

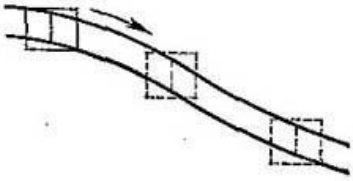


Fig. 24. Movimiento de traslación de un cuerpo sólido.

El movimiento de traslación del cuerpo sólido invariable es el movimiento en el cual cualquier línea recta trazada en el cuerpo y fija en él, se desplaza permaneciendo paralela a sí misma (fig. 24). En el movimiento de traslación, todos los puntos del cuerpo sólido invariable tienen la misma velocidad v y la misma aceleración w.

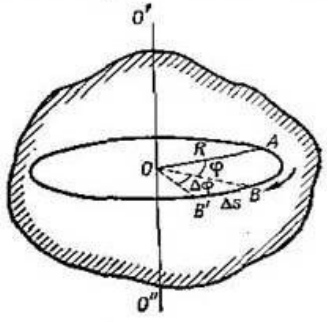


Fig. 25 Movimiento de rotación de un cuerpo sólido

El movimiento de rotación es aquel en que todos los puntos del cuerpo describen circunferencias cuyos centros están en una línea recta denominada *eje de rotación* (fig. 25).

En el caso general, el cuerpo sólido puede realizar al mismo tiempo los movimientos de traslación y de rotación. Y por fin, el mismo eje de rotación puede variar de posición con respecto al cuerpo; en este caso, para cada instante dado de tiempo, se dice que la rotación se efectúa alrededor del eje instantáneo.

Introduzcamos el concepto de *velocidad angular*. Para ello determinemos la posición de cierto punto *B* del cuerpo en rotación (fig. 25) mediante el ángulo φ que forma el radio *OB* con cierto radio inicial *OA*. Al girar el cuerpo, el ángulo φ varía constantemente. Velocidad

angular de un cuerpo de rotación uniforme se llama la magnitud física ω que es proporcional al ángulo $\Delta\varphi$, que gira el radio OB, e inversamente proporcional al intervalo de tiempo Δt que invierte el radio para girar en este ángulo $\Delta\varphi$:

$$\omega = k\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}, \tag{1}$$

donde k es un coeficiente de proporcionalidad. Si suponemos a $k = 1$, resulta

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}, \tag{2}$$

en este caso, al medir $\Delta\varphi$ y Δt en determinadas unidades, deberemos elegir para la medición de ω las unidades que no alteren el cumplimiento de la ecuación (2). Midiendo, como generalmente se hace, los ángulos en radianes y el tiempo en segundos, deberemos elegir por unidad de velocidad angular la del movimiento en el cual el ángulo φ varía un radián por segundo; esta unidad de la velocidad angular se puede designar por radián/s, pero con frecuencia se designa simplemente por $\frac{1}{s}$ o s^{-1}.

El valor de la velocidad angular ω del cuerpo sólido en rotación no depende de la elección del punto B, ya que el ángulo $\Delta\varphi$ que gira el radio OB en el intervalo de tiempo dado Δt, no depende de la posición del punto B.

Veamos la relación existente entre la velocidad lineal v del punto B y la velocidad angular ω del sólido.

Supongamos que al variar el ángulo en $\Delta\varphi$, el punto B recorre el arco de círculo $\widetilde{\Delta s}$, entonces la velocidad lineal será

$$v = \frac{\widetilde{\Delta s}}{\Delta t};$$

por otro dado (véase la fig. 25), tenemos que

$$\Delta\varphi = \frac{\widetilde{\Delta s}}{R}, \text{ de donde } v = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\cdot R,$$

o, según la (2)

$$v = \omega R, \tag{3}$$

donde R es la distancia del punto B al eje de rotación. Cuanto más alejado esté el punto B del eje de rotación, tanto mayor será su velocidad lineal v, siendo la angular ω constante. Los distintos puntos de un cuerpo que gira tienen distintas velocidades lineales.

Relacionemos la velocidad angular con *el período T de rotación* del cuerpo. En el intervalo de tiempo $\Delta t = T$, el cuerpo realiza

una vuelta completa, y el ángulo φ aumenta en 2π, es decir, $\Delta\varphi = 2\pi$, de donde, según la (2):

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \tag{4}$$

Por fin, veamos el concepto de *número de revoluciones* (*vueltas*) n por unidad de tiempo (frecuencia). Como en una vuelta se invierte el tiempo T, en la unidad de tiempo se efectuarán n vueltas:

$$n = \frac{1}{T}. \tag{5}$$

De aquí, según la (4), obtenemos otra ecuación para la velocidad angular del sólido:

$$\omega = 2\pi n. \tag{6}$$

Todos los puntos del sólido, moviéndose según una circunferencia, tienen una aceleración normal:

$$w_n = \frac{v^2}{R},$$

donde v es la velocidad lineal, y R la distancia al eje de rotación. Sustituyendo en esta ecuación la velocidad v por su valor en función de la velocidad angular ω según la (3)

$$w_n = \omega^2 R. \tag{7}$$

Como todos los puntos del sólido tienen una misma velocidad angular ω, de la fórmula (7) se ve que cuanto más alejados estén del eje de rotación del sólido, mayor será la aceleración normal.

Mediante las fórmulas (5) y (6) podemos expresar la (7) de la siguiente manera:

$$w_n = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \tag{8}$$

o

$$w_n = 4\pi^2 n^2 R. \tag{8a}$$

En el caso del movimiento *variado* circular introducimos el concepto de velocidad angular instantánea ω:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \right). \tag{9}$$

En este caso, la relación entre la velocidad angular instantánea ω y la velocidad lineal instantánea v, seguirá siendo la misma que entre ω y v en el movimiento de rotación uniforme [fórmula (3)].

En la rotación variada, la velocidad angular ω varía con el tiempo. Para caracterizar esta variación se introduce el concepto de *aceleración angular* β, que, en el caso de una rotación uniformemente

variada, es un magnitud física directamente proporcional a la variación de la velocidad angular $\Delta\omega$ e inversamente proporcional al intervalo de tiempo Δt en que ha ocurrido esta variación. En el caso general de una rotación variada, la aceleración angular instantánea será

$$\beta = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta \omega}{\Delta t} \right). \tag{10}$$

Del cálculo diferencial sabemos que

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \tag{9a}$$

y para la aceleración angular:

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \tag{10a}$$

Ejemplo 1. Determinar las velocidades angular y lineal de los puntos de la superficie terrestre y sus aceleraciones normales.

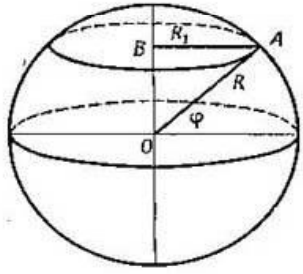


Fig. 26. El punto A, que se halla en la esfera terrestre a la latitud φ, describe una circunferencia de radio R_1.

Solución. La velocidad angular será:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60}\ \text{s}^{-1} \cong 7{,}3 \cdot 10^{-5}\text{s}^{-1},$$

que es la misma para todos los puntos de la esfera terrestre.

La velocidad lineal de los puntos a la latitud φ (fig. 26) será

$$v = \omega R_1 = \omega R \cos \varphi,$$

donde R es el radio de la esfera terrestre. Sustituyendo ω por su valor y sabiendo que $R = 6370\ \text{km} = 6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m}$, obtenemos

$$v = 4{,}65 \cdot 10^2 \cos \varphi\ \text{m/s}.$$

La aceleración normal w_n a la latitud φ es

$$w_n = \omega^2 R_1 = \omega^2 R \cos \varphi.$$

Sustituyendo ω y R por sus valores, tenemos

$$w_n = 3{,}4 \cos \varphi\ \text{cm/s}^2.$$

Ejemplo 2. Una rueda de radio $r = 10$ cm gira aceleradamente de manera que el número de revoluciones aumenta en $n_0 = \frac{1}{2}$ vueltas por segundo.

¿Cuáles son al cabo de dos segundos: 1) la velocidad angular de la rueda, 2) la lineal de los puntos de su llanta y 3) las aceleraciones normal, tangencial y total de los puntos de la llanta?

S o l u c i ó n. El número de revoluciones n al cabo de dos segundos será

$$n = n_0 t = \frac{1}{2} \cdot 2 \frac{1}{s} = 1\ s^{-1}.$$

La velocidad angular ω al cabo de dos segundos será:

$$\omega = 2\pi n = 2\pi n_0 t = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 1\ s^{-1} = 6{,}28\ s^{-1}.$$

La velocidad lineal de los puntos de la llanta de la rueda en ese mismo instante será:

$$v = \omega R = 6{,}28 \cdot 10\ cm/s = 62{,}8\ cm/s = 0{,}628\ m/s.$$

La aceleración normal de los puntos de la llanta será

$$w_n = \omega^2 R = 6{,}28^2 \cdot 10\ cm/s^2 = 394{,}4\ cm/s^2.$$

La aceleración tangencial w_t la hallamos sabiendo que

$$v = \omega R = 2\pi n_0 R t,$$

es decir, v aumenta uniformemente con el tiempo, por lo tanto, lo mismo que en el caso del movimiento uniformemente variado, tiene que verificarse la ecuación $v = \omega_t t$, donde w_t es la aceleración tangencial buscada, de donde

$$w_t = 2\pi n_0 R = 6{,}28 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10\ cm/s^2 = 31{,}4\ cm/s^2.$$

La aceleración total

$$w = \sqrt{w_n^2 + w_t^2} = \sqrt{394{,}4^2 + 31{,}4^2}\ cm/s^2 = 396{,}5\ cm/s^2.$$

La dirección de la aceleración total la determinamos de la fig. 22, donde se ve que el ángulo α que forma con la tangente a la circunferencia se determina por la ecuación:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{w_n}{w} = \frac{394{,}4}{396{,}5} = 0{,}9965,$$

de donde $\alpha = 85°30'$. De esta manera, la aceleración total va dirigida formando un ángulo de 85°30' con la tangente, o, lo que es lo mismo, formando un ángulo $\beta = 4°30'$ con el radio.

§ 13. **La velocidad angular como vector.** El movimiento según una circunferencia de radio dado R estará completamente caracterizado, si se conocen: 1) *la velocidad angular* ω (o la lineal v), 2) *el plano* en que está la circunferencia, y 3) *el sentido de la rotación*. La última característica es imprescindible ya que el movimiento según una circunferencia, mirado desde un lado determinado del plano, puede transcurrir bien en el sentido de las agujas del reloj, bien en sentido contrario. No obstante, todas estas características se pueden dar con ayuda de un vector, si convenimos en trazar este vector perpendicularmente al plano y concordar el sentido del vector con un sentido determinado de rotación. Esta última se establece según la regla del sacacorchos: *se hace coincidir el sentido del vector con el movimiento de traslación (avance) del sacacorchos, y la rotación con la dirección de giro de la manilla del sacacorchos* (fig. 27). De esta manera, para la característica de la rotación se introduce el concepto de un vector ω, denominado *vector de la velocidad* angular, que: 1) su magnitud sea igual al valor numérico de la velocidad angular ω, 2) sea perpendicular al plano de la circunferencia por la cual se realiza la rotación, y 3) mirando desde el extremo de este vector, la rotación se efectúe contra las agujas del reloj (fig. 28).

La representación de la velocidad angular mediante un vector se justifica porque, en el caso de que el sólido esté dotado de dos rotaciones simultáneas, la rotación resultante (composición de rotaciones) se caracteriza por un vector obtenido sumando los vectores de las velocidades angulares componentes según la regla del paralelogramo.

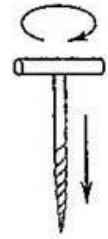


Fig. 27. Regla del sacacorchos.

En el análisis vectorial se introduce el concepto del llamado *producto vectorial* de dos vectores. Por producto vectorial de los vectores **A** y **B** se sobreentiende un vector **C** de magnitud

$$C = A \cdot B \operatorname{sen} (\angle\ \mathbf{A}, \mathbf{B}),$$

donde A y B son las magnitudes de los vectores **A** y **B**, y $(\angle\ \mathbf{A}, \mathbf{B})$, el ángulo formado por ellos (ángulo α en la fig. 29). El vector **C** es perpendicular al plano

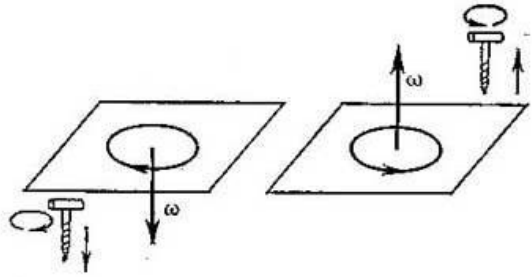


Fig. 28. El vector de la velocidad angular se traza perpendicularmente al plano en que se realiza la rotación y en el sentido en que, mirando desde su extremo, la rotación se efectúa contra las agujas del reloj.

que contiene los vectores **A** y **B**, y de sentido hacia el lado en que, mirando desde su extremo, el vector **A** se pueda hacer coincidir con el vector **B** haciéndolo girar contra las agujas del reloj (hacia el lado del ángulo menor, véase la fig. 29). En otras palabras: al girar la manilla del sacacorchos desde **A** hacia **B** (en el sentido del ángulo menor), el movimiento de traslación del sacacorchos determina el sentido del vector **C**.

El producto vectorial de dos vectores se escribe así:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}.$$

El producto vectorial no es conmutativo: los vectores $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ y $\mathbf{C}' = \mathbf{B} \times \mathbf{A}$ coinciden solamente en magnitud, pero tienen sentido opuesto.

La representación de la velocidad angular como vector nos permite relacio-

nar cómodamente el vector de la velocidad lineal v con el de la velocidad angular ω y el radio vector r, que determina la posición del punto material respecto al eje de rotación.

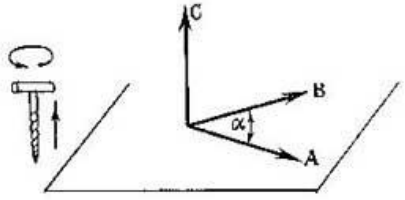


Fig. 29. Producto vectorial.

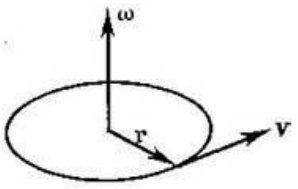


Fig. 30. Relación entre los vectores ω, v y r.

Como se ve de la fig. 30:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r},$$

es decir, v es el producto vectorial de ω por r.

Al examinar la velocidad angular como vector, debemos considerar también la aceleración angular β como vector, porque en este caso, en la ecuación

$$\beta = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta \omega}{\Delta t} \right)$$

la magnitud $\Delta\omega$ representa una variación vectorial de la velocidad angular ω.

CAPITULO II

Dinámica

§ 14. Primera ley de Newton (Principio de la inercia). Hasta ahora hemos estudiado solamente el desplazamiento de los cuerpos en función del tiempo, es decir, los problemas de la cinemática. Las cuestiones relacionadas con la acción mutua de los cuerpos y que acarrean cambios en el estado del movimiento, no las hemos tocado en absoluto. De estas cuestiones se ocupa la *dinámica*. Los postulados fundamentales de la dinámica los formuló Newton en su «Philosophiae naturais principia mathematica» (1687) en forma de *tres leyes básicas del movimiento.*

La primera ley puede enunciarse de la siguiente manera: *todo cuerpo permanece en su estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme mientras otros cuerpos no actúen sobre él y le obliguen a cambiar de estado.*

En esta definición, el cuerpo se considera un punto material, es decir, en su estudio es excluye el movimiento de rotación. En el § 35 veremos que el cuerpo puede hallarse también en estado de rotación uniforme, si otros cuerpos no actúan sobre él.

De esta primera ley (principio) se deduce que el cuerpo puede cambiar su estado de reposo o de movimiento rectilíneo, cuando *actúen sobre él otros cuerpos materiales.*

La comprobación experimental directa de este principio es imposible, ya que en el medio real que nos rodea, no se puede colocar el cuerpo en tales condiciones que no sufra la acción de otros cuerpos. No obstante, mediante generalizaciones de una serie de hechos, nos convencemos de la veracidad de este principio. Generalmente, el estado de reposo que observamos en los cuerpos que nos rodean, se debe a que la acción de los diferentes cuerpos se compensa mutuamente, por ejemplo, la atracción de la Tierra y la reacción del apoyo o de la suspensión del cuerpo pesado, si está en reposo. Si el cuerpo se mueve, mantendrá tanto más su velocidad, cuanto menos actúen sobre él otros cuerpos: una piedra impulsada, resbalando sobre la superficie de la Tierra con cierta velocidad inicial, se deslizará tanto más cuanto más llana sea esta superficie, es decir, cuanto menos cuerpos actúen sobre la piedra. Definitivamente, de la veracidad del principio de la inercia, nos convence indirectamente la coincidencia de todas las consecuencias que se deducen con los datos experimentales,

Deteniéndonos con más detalle en la primera ley de Newton, hay que plantear la siguiente pregunta: ¿sobre qué sistema de referencia (qué sistema de coordenadas) se establece el reposo o el movimiento rectilíneo uniforme de que se habla en el principio de la inercia? El mismo Newton consideraba que se trataba de un movimiento absoluto en el espacio absoluto. El escribió: «El espacio absoluto por su esencia misma, sin relacionarlo con nada exterior, siempre permanece igual e inmóvil... El movimiento absoluto es el desplazamiento de un cuerpo de un lugar absoluto a otro»*). Este punto de vista es metafísico y no corresponde a la realidad. Las propiedades del espacio real existente las determina la misma materia. La posición de unos cuerpos y sus movimientos, como ya lo hemos subrayado, no se pueden determinar más que en relación con otros cuerpos materiales; respecto a diferentes cuerpos, un mismo cuerpo puede desplazarse de distintas maneras.

Las observaciones demuestran que el principio de la inercia no es justo para cualquier sistema de referencia. Veamos unos cuantos ejemplos. Supongamos que el sistema de referencia es un vagón con movimiento rectilíneo uniforme. Entonces, abstrayéndonos de las trepidaciones, se cumple la primera ley de Newton: un cuerpo que esté en reposo con respecto al vagón, no se mueve si no actúan sobre él otros cuerpos, etc. Pero en cuanto el vagón empiece a girar, a frenar o a acelerar la marcha, aparecen claras infracciones del principio de la inercia: el cuerpo, hasta entonces en reposo, puede inclinarse o caer sin que actúen, al parecer, sobre él los cuerpos que le rodean. Tomemos como sistema de referencia la esfera terrestre; en este caso el principio de la inercia se cumple con mucha más exactitud que en el caso del vagón en marcha, donde, incluso con movimiento uniforme, se deja sentir la trepidación; pero hasta en el caso de la esfera terrestre, las observaciones minuciosas sobre ciertos procesos (oscilación del péndulo, difusión de las corrientes aéreas y oceánicas, etc.) revelan cierto incumplimiento del principio de la inercia, mejor dicho, de las consecuencias que se desprenden del mismo. Pero si elegimos como sistema de referencia el sistema heliocéntrico con el origen de coordenadas en el Sol y los ejes dirigidos a determinadas estrellas, en este sistema el principio de la inercia se cumple prácticamente con mucha exactitud. El sistema de referencia respecto a cual se cumple el principio de la inercia se denomina *sistema inercial*.

Como ya se ha indicado, el sistema heliocéntrico prácticamente es, con mucha exactitud, un sistema inercial; será inercial también cualquier otro sistema de referencia que se mueve con respecto al primero con movimiento rectilíneo uniforme. Cualquier sistema que

---

*) Esta cita está traducida del ruso (*N. del T.*).

tenga cierta aceleración con respecto a un sistema inercial, no puede ser inercial. Más abajo hablaremos con más detalle sobre los sistemas acelerados.

§ 15. Ley de la aceleración (segunda ley de Newton). Fuerza y masa. La ley de la aceleración, según definición del mismo Newton, dice: *la variación del movimiento es proporcional a la fuerza aplicada, y su dirección es la misma que la de la fuerza que actúa**).

De esta manera, la ley de la aceleración introduce el concepto de una nueva magnitud física: la *fuerza*.

Del principio de la inercia, como hemos visto, se deduce que sólo la acción de unos cuerpos sobre otros es capaz de variar el estado de sus movimientos. Esta acción de unos cuerpos sobre otros que acarrea el cambio del estado de sus movimientos, la caracteriza la magnitud física denominada fuerza. El cambio de estado del movimiento significa que el cuerpo deja el estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme, es decir, que *varía su velocidad*, que *el cuerpo adquiere una aceleración*. De esto se deduce que la magnitud física denominada fuerza caracteriza la acción de unos cuerpos sobre otros, de cuyo resultado los cuerpos adquieren aceleración.

Tomemos un cuerpo determinado cualquiera y hagamos ejercer sobre él la acción de otro cuerpo cualquiera (u otros cuerpos) de manera que el primero adquiera diferentes aceleraciones w. Está claro que cuanto mayor sea la acción mayor será la aceleración w adquirida por el cuerpo. De esto se deduce naturalmente que la fuerza con que otros cuerpos actúan sobre el que se examina, es la magnitud física f, proporcional a la aceleración que adquiere el cuerpo dado:

$$f = k'w, \tag{1}$$

donde k' es un coeficiente de proporcionalidad.

La ecuación (1) nos permite comparar entre sí las fuerzas que actúan sobre un cuerpo dado, por las aceleraciones que le comunican. Como la aceleración tiene dirección y sentido, la fuerza también será una magnitud dirigida. La experiencia demuestra que al actuar varias fuerzas sobre un cuerpo, éste adquiere la misma aceleración que la adquirida bajo la acción de una fuerza igual a la suma vectorial de las dadas. De esto se deduce que *la fuerza es un vector*; y este vector fuerza va dirigido en el mismo sentido que el vector aceleración que aquél origina.

De esta manera, la ecuación (1) se puede escribir en forma vectorial:

$$\mathbf{f} = k'\mathbf{w}. \tag{1a}$$

La acción de un cuerpo sobre otro no se limita sólo a comunicarse mutuamente una aceleración. La fuerza también caracteriza a otras

---

*) Esta definición es traducción de la versión rusa (*N. del T.*).

acciones que, a su vez, pueden utilizarse para puntualizar el concepto de fuerza. Hablando con exactitud, los cuerpos, actuando unos sobre otros, originan cambios de forma o, como se dice, *se deforman* mutuamente. Estas deformaciones se pueden utilizar para comparar las fuerzas. Supongamos que el cuerpo A (fig. 31, *a*), actuando directamente sobre el cuerpo B le comunica una aceleración w (lo empuja). Si colocamos entre los cuerpos A y B un cuerpo elástico cualquiera, por ejemplo, un resorte p (fig. 31, *b*), cuando el cuerpo A empuje al B, el resorte se comprimirá, y tanto más cuanto mayor sea la aceleración que el cuerpo A le comunique al B, es decir, cuanto mayor sea la

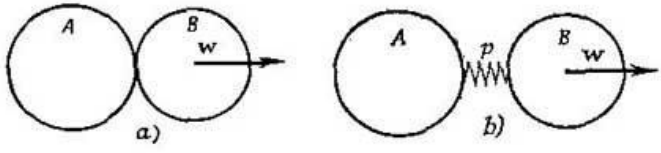


Fig. 31. El cuerpo A, empujando al B, le comunica la aceleración w. En este caso, el resorte colocado entre los cuerpos, se comprime.

fuerza con que el cuerpo A actúa sobre el B. Midiendo esta fuerza mediante la aceleración que origina según la ecuación (1), podemos graduar el resorte y en adelante utilizarlo para medir fuerzas. El resorte se convertirá en un instrumento para medir las fuerzas; este instrumento se denomina dinamómetro.

Utilizando este método de medición de fuerzas con el dinamómetro de resorte, podemos hacer el siguiente experimento: aplicar una misma fuerza a *distintos* cuerpos y comparar las aceleraciones que éstos adquieren. Resulta que, bajo la acción de una misma fuerza, diferentes cuerpos adquieren distintas aceleraciones. De esta manera tenemos que la aceleración adquirida por distintos cuerpos se determina no sólo por la fuerza o fuerzas que actúan sobre ellos, sino también por cierta propiedad de los mismos cuerpos. Esta propiedad de los cuerpos viene caracterizada por la magnitud física denominada *masa*.

Cuanto menor sea la aceleración que adquiere el cuerpo bajo la acción de una fuerza, tanto mayor será su masa. Por lo tanto, podemos suponer que las masas de diferentes cuerpos son inversamente proporcionales a las aceleraciones adquiridas bajo la acción de fuerzas iguales:

$$\frac{m_1}{m_2} = \left| \frac{w_2}{w_1} \right|. \qquad (2)$$

La masa de los cuerpos depende de sus dimensiones y de la naturaleza de la substancia.

La masa es una de las características más fundamentales de los cuerpos. Newton consideraba que la masa es una medida de la cantidad de materia en el cuerpo. Esta definición, que reinó durante mucho tiempo en los círculos científicos, tenía carácter metafísico. También era falso el parecer de los físicos idealistas que le atribuían a la masa el carácter meramente formal de «coeficiente» en las ecuaciones de la mecánica.

El materialismo dialéctico nos enseña que las propiedades de la materia son inagotables, y por eso ninguna de las características físicas de la materia en movimiento puede servir de medida absoluta. Hablando de la materia como categoría filosófica, gnoseológica, Lenin indicaba que no hay que confundir el concepto filosófico de la materia con unas u otras características de sus diferentes variedades, y decía: «Pero no puede permitirse de ningún modo confundir, como hacen los adeptos de Mach, la doctrina sobre esta o la otra estructura de la materia con la categoría gnoseológica, confundir la cuestión de las nuevas propiedades de las nuevas variedades de la materia (de los electrones, por ejemplo) con la vieja cuestión de la teoría del conocimiento, con la cuestión de los orígenes de nuestro conocimiento, de la existencia de la verdad objetiva, etc.»*).

El concepto de masa, como el de cualquier otra magnitud física, puede establecerse sólo estudiando el complejo de las leyes generales objetivas de las relaciones mutuas de esta magnitud con otras magnitudes físicas. Con respecto a la masa, una de estas relaciones mutuas la expresa la ley de la aceleración, la cual comprende el concepto de la inercia de los cuerpos. Aquí hay que tener en cuenta, al hablar de la inercia de los cuerpos, que éstos se diferencian por cierta propiedad objetiva que se revela en que adquieren diferentes aceleraciones siendo iguales las acciones exteriores a que se someten. Esta propiedad, inherente a todos los cuerpos, la caracteriza una determinada magnitud física, que es la masa. La ecuación (2) nos permite comparar cuantitativamente las masas de diferentes cuerpos. La masa medida de esta manera se puede denominar «*masa inerte*», ya que se mide basándose en fenómenos de inercia.

Un contenido más completo del concepto de masa se revela al examinar un amplio conjunto de hechos. Uno de los más fundamentales es la ley de la conservación de las masas, establecida por M. V. Lomonósov: la masa de un sistema aislado de cuerpos permanece constante sean cuales fueran los cambios que se produzcan en él. En el § 17 indicaremos la relación existente entre la masa y la magnitud física denominada cantidad de movimiento; esta magnitud, que tiene carácter vectorial, también se subordina a la ley de la conservación (ley de conservación de la cantidad de movimiento).

---

*) V. I. Lenin, Obras completas, t. XIV, *Materialismo y empiriocriticismo*, cap. II, 4; Editorial Cartago, S. A., Buenos Aires, 1960.

Además, la masa también se revela en los fenómenos gravitatorios (ley de la gravitación, §§ 32 y 33). Por fin, la teoría de la relatividad lleva a la conclusión de la existencia de una profunda relación mutua entre la masa y la energía. A velocidades próximas a la de la luz en el vacío, la masa del cuerpo no permanece constante, sino que aumenta con la velocidad. Lo que permanece constante es la masa del sistema completamente aislado, es decir, del sistema con el cual no hay ninguna clase de intercambio (ni de materia: átomos, moléculas, etc.; ni de energía).

Comparando las ecuaciones (1) y (2), llegamos a la conclusión de que: *la aceleración* **w** *adquirida por un cuerpo, es directamente proporcional a la fuerza* **f** *que actúa sobre él, e inversamente proporcional a su masa m*:

$$\mathbf{w} = k\frac{\mathbf{f}}{m}, \qquad (3)$$

donde k es un coeficiente de proporcionalidad.

La ecuación (3) tiene carácter vectorial y expresa el contenido exacto de la segunda ley de Newton.

Al resolver muchos problemas físicos, frecuentemente se conocen la magnitud y dirección de las fuerzas que actúan, como por ejemplo, en el caso de las fuerzas de gravitación (§ 32) o de fuerzas elásticas que se subordinan a la ley de Hooke (§ 89). Entonces la ecuación (3) permite hallar la aceleración y, por lo tanto, determinar el carácter del movimiento.

La igualdad (3) es la ecuación o ley fundamental de la dinámica.

§ 16. Fuerzas de rozamiento. Junto con las fuerzas que surgen al deformarse los cuerpos (fuerzas elásticas) y las fuerzas de gravitación, existen otras fuerzas originadas por las interacciones moleculares de contacto entre dos cuerpos o entre diferentes partes de un mismo cuerpo. Estas fuerzas que se revelan al desplazarse estos cuerpos o estas partes de un cuerpo respecto a otros o a otras, se denominan *fuerzas de rozamiento*.

Las fuerzas de rozamiento que surgen al contacto de diferentes cuerpos, se denominan fuerzas *de rozamiento exterior*. Estas fuerzas no desaparecen incluso cuando los cuerpos en contacto están inmóviles uno con respecto al otro (*rozamiento en reposo o rozamiento de adherencia*). Las fuerzas originadas por el desplazamiento de unas partes del cuerpo respecto a otras, se denominan fuerzas *de rozamiento interno* (estas fuerzas aparecen con más frecuencia en el movimiento de los líquidos y de los gases, en cuyo caso este rozamiento interno se denomina viscosidad).

Las fuerzas de rozamiento tienen una importancia muy grande en nuestra práctica cotidiana y en la técnica, por eso, el saberlas calcular es esencial para la justa aplicación de la ley de la aceleración en muchos importantes casos prácticos.

La dirección de las fuerzas de rozamiento es tangencial a las superficies de contacto de los cuerpos y depende de sus velocidades relativas. Esto último las diferencia notablemente de las fuerzas de elasticidad y de las de gravitación. Las fuerzas de rozamiento pueden surgir no solamente entre los cuerpos sólidos en contacto, sino también entre un cuerpo sólido y un líquido, o entre un sólido y un gas.

Como, en las condiciones terrestres, en todo movimiento real surgen unas u otras fuerzas de rozamiento, para determinar la aceleración del cuerpo hay que tener en cuenta, además de la fuerza dada $\mathbf{f}$ que actúa sobre él, la de rozamiento $\mathbf{f}_r$, que surge si hay una velocidad relativa $\mathbf{v}$.

Supongamos que un cuerpo A se desplaza respecto a otro, en contacto con él, a la velocidad relativa $\mathbf{v}$. La experiencia demuestra que la fuerza de rozamiento $\mathbf{f}_r$ que actúa en el cuerpo A, siempre va dirigida en sentido contrario a la velocidad $\mathbf{v}$. Supongamos que sobre el cuerpo A, además de la fuerza de rozamiento $\mathbf{f}_r$, actúa otra fuerza cualquiera $\mathbf{f}$. Entonces, la aceleración $\mathbf{w}$ adquirida por el cuerpo A, se determina por la suma de las fuerzas $\mathbf{f} + \mathbf{f}_r$.

Según la segunda ley de Newton:

$$\mathbf{w} = \frac{k}{m}(\mathbf{f} + \mathbf{f}_r), \qquad (1)$$

donde m es la masa del cuerpo, y k un coeficiente de proporcionalidad.

Para que en las condiciones reales el cuerpo se mueva a velocidad constante $\mathbf{v}$, hay que aplicarle un fuerza $\mathbf{f}$ que equilibre la fuerza de rozamiento $\mathbf{f}_r$. Sólo en este caso, según la ecuación (1), la fuerza resultante $\mathbf{f} + \mathbf{f}_r$ es igual a cero y, por consiguiente, es igual a cero la aceleración $\mathbf{w}$, es decir, el cuerpo se mueve uniformemente.

El cuerpo se desplaza con movimiento rectilíneo uniforme cuando la fuerza de rozamiento debida al movimiento mismo equilibra a la fuerza exterior.

Veamos, por ejemplo, un barco con movimiento rectilíneo empujado por la fuerza constante f de la hélice, que consideramos positiva. En cuanto el barco arranca, surge la fuerza de rozamiento, que depende de la velocidad v del barco. Como la fuerza de rozamiento va en sentido contrario a la propulsora f de la hélice, la designaremos por $-f_r$. El barco se mueve debido a la fuerza resultante $f - f_r$. Al principio del movimiento, cuando la velocidad v es pequeña, la fuerza resultante es positiva y el barco se desplaza con movimiento acelerado. A medida que aumenta la velocidad v, aumenta la magnitud de la fuerza de rozamiento, y la aceleración disminuye. Por fin, la diferencia $f - f_r$ se hace igual a cero, y entonces el barco se mueve uniformemente. Si la fuerza propulsora de la hélice, por cualquier causa, disminuye, la diferencia $f - f_r$ puede resultar negativa, entonces el barco empieza a desplazarse con movimiento retardado.

Como segundo ejemplo veamos la caída de un sólido en el aire teniendo en cuenta la resistencia de éste. Si el cuerpo empieza a caer con velocidad inicial igual a cero, sobre el cuerpo actuará solamente la fuerza de la gravedad P, y adquirirá la aceleración w, que es igual a la de la caída libre g. A medida que aumenta la velocidad de caída aparece y aumenta la fuerza de rozamiento con el aire; la fuerza resultante $P - f_r$ será menor que la de la gravedad, y la aceleración w, menor que la de la caída libre g. Con el aumento ulterior de la velocidad de caída, la fuerza de rozamiento, por fin, equilibrará a la de la gravedad P, y el cuerpo caerá con movimiento uniforme, a velocidad constante. La magnitud de esta velocidad de caída uniforme depende de la forma y dimensiones del cuerpo que cae. Por ejemplo, la experiencia demuestra que para un hombre que cae, esta velocidad aproximadamente es igual a 60 m/s. Esta es la velocidad que adquieren los paracaidistas en el «salto retardado». Después de abrir el paracaídas la fuerza de resistencia del aire aumenta de súbito, y la velocidad de caída («descenso») disminuye aproximadamente hasta 5-6 m/s.

La fuerza de rozamiento que surge al deslizarse unas superficies secas con respecto a otras, depende en alto grado del estado de estas superficies (de su rugosidad). La magnitud de la fuerza de rozamiento depende también de la componente normal F_n de la fuerza que actúa sobre la superficie. Al aumentar la componente normal F_n, la fuerza de rozamiento aumenta poco más o menos proporcionalmente a la F_n:

$$f_r = \varkappa F_n. \qquad (2)$$

El coeficiente $\varkappa$ de la fórmula (2) se denomina *coeficiente de rozamiento*. El valor del coeficiente de rozamiento $\varkappa$ depende no sólo del carácter de las superficies de contacto, sino también de su velocidad relativa v.

La magnitud de la fuerza de rozamiento (siendo constante la componente normal F_n de la fuerza), para superficies sólidas que se tocan, en unos límites bastante amplios, no depende de la magnitud de las superficies de contacto.

Si, por ejemplo, un paralelepípedo de superficies igualmente elaboradas, que resbala por una superficie sólida, lo colocamos sobre otra cara de dimensiones diferentes, la fuerza de rozamiento f_r, siendo la velocidad relativa v la misma, permanece invariable.

El rozamiento entre dos superficies secas de contacto, como ya se ha indicado, no desaparece cuando la velocidad relativa v es igual a cero. Para que el cuerpo empiece a deslizarse por una superficie cualquiera, hay que aplicarle una fuerza exterior f, paralela a la superficie de contacto, mayor que cierta magnitud f_1 determinada para el caso dado. Mientras la fuerza exterior $f < f_1$, el cuerpo permanecerá inmóvil, lo cual significa que entre el cuerpo y la superficie con la cual está en contacto, surge una fuerza f_r, denominada *fuerza de rozamiento estático*, que equilibra la fuerza exterior.

La fuerza de rozamiento estático puede adquirir cualquier valor entre 0 y f_1, según sea la magnitud de la fuerza exterior aplicada. El valor máximo de la fuerza de rozamiento estático es igual a la magnitud de la fuerza f_1 bajo cuya acción empieza a deslizarse el cuerpo. Este valor satisface la ecuación (2); en este caso, el coeficiente $\varkappa$ se denomina *coeficiente de rozamiento estático*. El valor de este coeficiente depende solamente de la naturaleza de las superficies de contacto. Si éstas son de madera y están secas, el coeficiente aproxima-

damente es igual a 0,6; si el contacto es entre el acero y el hielo, el coeficiente de rozamiento estático es aproximadamente de 0,03.

Cuando la fuerza exterior f supera a la fuerza máxima de rozamiento estático, el cuerpo empieza a deslizarse y aparece la fuerza de rozamiento al (de) deslizamiento (o fuerza de rozamiento cinético). Esta fuerza de rozamiento al deslizamiento, al principio es *menor* que la fuerza de rozamiento estático, y con el aumento de la velocidad relativa v, primeramente continúa disminuyendo, y después, al seguir aumentando esta velocidad relativa v, aumenta. Gráficamente la dependencia de la fuerza de rozamiento respecto a la velocidad relativa se representa en el diagrama de la fig. 32. Si $v = 0$, la fuerza de rozamiento

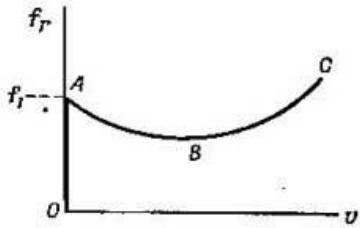


Fig. 32. Dependencia de la fuerza de rozamiento f respecto a la velocidad relativa v.

puede tener cualquier valor entre cero y f_1 (segmento OA en el eje de ordenadas), según sea el valor de la fuerza exterior aplicada. La dependencia ulterior de la fuerza de rozamiento respecto a la velocidad relativa v, la representa la curva ABC.

En la técnica, entre las superficies de contacto se introduce un lubricante, es decir, un líquido viscoso que forma una delgada capa entre las superficies sólidas. El primero que desarrolló la teoría de la lubricación fue el ingeniero ruso N. P. Petrov, el cual demostró que, con lubricante, la cuestión se reduce al rozamiento interno. La capa del lubricante líquido más cercana al cuerpo, se adhiere a éste; el deslizamiento se produce solamente entre las capas del líquido. En el caso de un árbol coaxial con un cojinete, la fuerza de rozamiento es proporcional a la viscosidad del líquido lubricante y al número de revoluciones del árbol por unidad de tiempo, e inversamente proporcional a la holgura entre la superficie del árbol y el cojinete.

§ 17. Cantidad de movimiento. Impulsión (impulso) de una fuerza. Veamos primeramente el movimiento producido por una fuerza constante f, es decir, un movimiento que se caracteriza por una magnitud constante del vector aceleración w. Supongamos que en el intervalo de tiempo Δt, la velocidad del cuerpo varía en la magnitud $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$; entonces

$$\mathbf{w} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1}{\Delta t};$$

colocando este valor de la aceleración w en la ecuación de la segunda ley de Newton:

$$\mathbf{w} = k\frac{\mathbf{f}}{m},$$

obtenemos

$$\frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1}{\Delta t} = k\frac{\mathbf{f}}{m} \quad \text{o} \quad \frac{m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1}{\Delta t} = k\mathbf{f}. \tag{1}$$

Hay que tener en cuenta que $m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1$ es la diferencia vectorial de las magnitudes $m\mathbf{v}_2$ y $m\mathbf{v}_1$. La magnitud $m\mathbf{v}$, igual al producto del vector velocidad v del cuerpo por su masa, se denomina *cantidad de movimiento* **K**. La cantidad de movimiento

$$\mathbf{K} = m\mathbf{v} \tag{2}$$

es una magnitud vectorial y tiene la misma dirección que el vector velocidad **v**.

Introduciendo en la ecuación (1) la cantidad de movimiento, tenemos

$$\frac{\mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_1}{\Delta t} = k\mathbf{f} \quad \text{o} \quad \frac{\Delta \mathbf{K}}{\Delta t} = k\mathbf{f}, \tag{3}$$

donde $\Delta \mathbf{K}$ es la variación del vector cantidad de movimiento. La ecuación (3) significa que *en el movimiento uniforme la variación de la cantidad de movimiento por unidad de tiempo es proporcional a la fuerza aplicada y se produce en la misma dirección en que actúa el vector fuerza.*

De la ecuación (3) se puede dar también la siguiente definición de fuerza: la fuerza es una magnitud vectorial proporcional a la variación de la cantidad de movimiento causada por ella en la unidad de tiempo y dirigida en el mismo sentido que la variación de la cantidad de movimiento.

Generalicemos la ecuación (3) para el caso de movimientos variados cualesquiera, cuando la fuerza f varía con el tiempo. Entonces, en la ecuación (3) por Δt debemos sobreentender un instante infinitamente pequeño, es decir, tenemos que escribir:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{K}}{\Delta t} = k\mathbf{f}, \tag{3a}$$

donde el vector f es la magnitud de la fuerza en el instante dado.

La ecuación (3a), lo mismo que la (3) del § 15, expresa la segunda ley de Newton.

Desde el punto de vista de los razonamientos aducidos, la ecuación (3) del § 15 y la (3a) del presente, son completamente equivalentes, ya que la segunda se ha deducido directamente de la primera; ambas expresan exactamente la segunda ley de Newton. No obstante, la equivalencia indicada tiene lugar suponiendo que la masa m del cuerpo es una magnitud constante, independiente de su velocidad. Esto es justo mientras la velocidad del cuerpo sea pequeña en comparación con la velocidad de la luz. En los movimientos verificados a velocidades comparables con la de la luz, la masa m no permanece constante: depende de la velocidad v. Los movimientos a tales velocidades se rigen por la mecánica de la teoría de la relatividad. En este caso, no obstante, la ecuación (3a) conserva su valor, por lo tanto es una fórmula más general de la ley de la aceleración que la

ecuación (2) del § 15. Junto con el valor de la fuerza en el instante dado de tiempo, podemos examinar también el valor medio de la fuerza $\bar{f}$ en un intervalo finito de tiempo Δt; entonces, en lugar de la (3a) obtenemos

$$\frac{\Delta K}{\Delta t} = k\bar{f}, \quad \text{o} \quad \bar{f}\Delta t = k'\Delta K = k'(mv_2 - mv_1), \tag{4}$$

donde $k' = \frac{1}{k}$.

La magnitud $\bar{f}\,\Delta t$, igual al producto del valor medio de la fuerza $\bar{f}$ por el intervalo de tiempo Δt en que examinamos su acción, se denomina *impulsión o impulso de la fuerza*. La impusión de la fuerza es una magnitud vectorial. La ecuación (4) establece que el vector impulso de la fuerza es proporcional a la variación vectorial de la cantidad de movimiento que se verifica en el intervalo de tiempo en que se considera la impulsión de la fuerza, y va dirigido en el mismo sentido que la variación de la cantidad de movimiento.

§ 18. Unidades de fuerza y de masa. Ejemplos. Suponiendo que en la ecuación (3) del § 15, el coeficiente de proporcionalidad $k = 1$, obtenemos

$$w = \frac{f}{m}. \tag{1}$$

Esta relación se puede utilizar para establecer las unidades de medición de la fuerza f y de la masa m.

En el sistema *CGS*, por unidad de masa se ha tomado el gramo (véase el § 3), y por unidad de aceleración 1 cm/s²; de donde, según la ecuación (1), debemos elegir, en el sistema *CGS*, *por unidad de fuerza una fuerza que comunique al cuerpo de 1 g de masa una aceleración de 1 cm/s²*. Esta unidad de fuerza se denomina *dina*.

Suponiendo en la fórmula (véase el § 17).

$$\bar{f}\Delta t = k'(mv_2 - mv_1)$$

el coeficiente $k' = 1$, obtenemos

$$\bar{f} = \frac{mv_2 - mv_1}{\Delta t},$$

de donde se deduce que la dina es igual a la fuerza que produce una variación de la cantidad de movimiento de 1 g·cm/s por segundo.

En el sistema *MKS*, por unidad de fuerza debe elegirse una fuerza tal que comunique a un cuerpo de 1 kg de masa una aceleración de 1 m/s². Esta unidad de fuerza de denomina *newton*. Como se puede calcular fácilmente, tenemos:

$$1 \text{ newton} = 0{,}001 \text{ estenio} = 10^5 \text{ dinas}.$$

En el sistema técnico de unidades, la unidad de fuerza se eligo como una de las fundamentales, independientemente de la segunda

ley de Newton. Está claro que cualquier fuerza establecida de modo determinado, puede servir de unidad. En el sistema técnico se ha elegido como tal, una determinada fuerza de gravedad. Sobre todos los cuerpos que se hallan en la superficie de la Tierra actúa una fuerza de atracción de la Tierra (fuerza de gravedad, o *peso*, como se denomina habitualmente). La fuerza de gravedad es distinta para diferentes cuerpos, y, para un mismo cuerpo, depende del lugar de la esfera terrestre y de la altura sobre la superficie de la Tierra a que se encuentre el cuerpo. No obstante, si se elige un cuerpo completamente determinado y se fija su posición sobre la esfera terrestre, estará completamente determinada la fuerza de gravedad que actúa sobre él (su peso), y que puede ser elegida como unidad. Así se ha hecho: *en el sistema técnico, por unidad de fuerza se ha elegido la fuerza con que es atraída una pesa patrón de 1 kg masa, a la latitud de 45° y al nivel del mar* (con más exactitud, en el sistema técnico se toma por unidad de fuerza la que comunica a 1 kg masa una aceleración $g_0 = 9{,}80665$ m/s^2). Esta unidad de fuerza se denomina *kilogramo*, es decir, lo mismo que la unidad de masa. Para evitar confusiones, designaremos estas dos unidades de magnitudes físicas completamente diferentes, con distinas siglas: la unidad de masa de un kilogramo la designaremos kg, y la unidad de fuerza de un kilogramo, kgf. La fuerza igual a $\frac{1}{1\,000}$ kgf, se denomina *gramo-fuerza* y la designaremos con la sigla gf (a diferencia del gramo masa designado por *g* o gr.). La fuerza de 1 000 kgf se denomina *tonelada-fuerza* (se designa por tf.). Como la fuerza de 1 kgf comunica a un cuerpo de 1 kg de masa una aceleración de 981 cm/s^2 (aceleración de la gravedad), tendremos que

$$1 \text{ kgf} = 981\,000 \text{ dinas}, \quad 1 \text{ gf} = 981 \text{ dinas}.$$

Como las variaciones del peso de los cuerpos para los distintos puntos de la superficie de la Tierra no son muy grandes, al resolver los problemas, generalmente se puede considerar que en la Tierra, el cuerpo de 1 kg de masa pesa 1 kgf. Para la latitud de 45° y al nivel del mar, esta correlación, por definición, se cumple exactamente.

Habiendo elegido en el sistema técnico la unidad de fuerza de la manera indicada y midiendo la aceleración en m/s^2, con la fórmula (1) del presente párrafo ya no podemos establecer arbitrariamente la unidad de masa. *Por unidad de masa, en el sistema técnico, debe elegirse la masa de un cuerpo que bajo la acción de una fuerza de 1 kgf adquiere la aceleración le 1 m/s^2*. Esta unidad de masa no tiene una denominación especial.

Como la masa de 1 kg, si se le aplica la fuerza de 1 kgf, es decir, su propio peso, adquiere la aceleración de la caída libre que es igual a 9,81 m/seg^2, la unidad técnica de masa que impulsada por una

uerza de 1 kgf adquiere una aceleración de 1 m/s², debe ser 9,81 veces mayor que un kg. De esta manera:

$$1 \text{ unidad técn. de masa} = 9{,}81 \text{ kg}.$$

Detengámonos con más detalle en la correlación entre peso y masa de los cuerpos. El peso de un cuerpo P es la fuerza con que lo atrae la esfera terrestre, por lo tanto, la aceleración $w = g$ que el cuerpo de masa m adquiere por su propio peso, según la fórmula (3) del § 15, será

$$g = k\frac{P}{m}, \text{ de donde } P = k'mg, \tag{2}$$

donde k' es un coeficiente de proporcionalidad.

La fórmula (2) da la relación general entre el peso P del cuerpo y su masa m, independientemente de la elección de unidades de medición del peso P del cuerpo, de su masa m y de la aceleración de la gravedad g. El valor del coeficiente de proporcionalidad k' depende de la elección de estas unidades. Si suponemos que $k' = 1$, tendremos

$$P = mg, \tag{2a}$$

pero en este caso ya no tenemos derecho a medir P, m y g con unidades cualesquiera, sino que deberemos utilizar las unidades determinadas de un sistema cualquiera. Por ejemplo, en el sistema *CGS*, m se mide en gramos, g en cm/s² y P en dinas; en el sistema técnico: m en unidades técnicas de masa, g en m/s², y P en kgf. En cada uno de estos sistemas se cumple la ecuación (2a). Pero si nosotros utilizamos un sistema mixto de unidades, por ejemplo, medimos m en kilogramos masa (kg), g en m/s² y P en kilogramos peso (kgf), el coeficiente de proporcionalidad k' ya no se puede suponer igual a la unidad; en este caso adquirirá el valor de:

$$k' = \frac{1}{9{,}81}.$$

Entonces

$$P \text{ (kgf)} = \frac{1}{9{,}81} \cdot m \text{ (kg)} \cdot g \text{ (m/s²)}.$$

Colocando en esta ecuación los valores $m = 1$ kg y $g = 9{,}81$ m/s² obtenemos: $P = 1$ kgf, como era de esperar.

Debido a la importancia de las relaciones deducidas en los §§ 15 y 17, y a la necesidad de saber utilizar bien los sistemas de unidades, daremos unos cuantos ejemplos.

Ejemplo 1. Un vagón de 16 tf de peso se desliza con una velocidad inicial de 5 m/s. Determinar el valor medio de la fuerza que impulsa al vagón, para los siguientes tres casos: a) el vagón se detiene al cabo de 1 min frenado por la fuerza de rozamiento; b) el vagón se frena en 15 s; c) el vagón se para, al chocar con un obstáculo, en 0,5 s.

S o l u c i ó n. Hallamos el valor medio de la fuerza que actúa sobre el vagón de la relación entre la impulsión de la fuerza y la variación de la cantidad de movimiento, según la ecuación (4) del § 17:

$$\bar{f}\Delta t = mv_2 - mv_1, \text{ de donde } \bar{f} = \frac{mv_2 - mv_1}{\Delta t}.$$

En nuestros casos, el vagón se detiene, por lo tanto su velocidad final $v_2 = 0$, de donde

$$\bar{f} = -\frac{mv_1}{\Delta t}.$$

El signo menos significa que la fuerza que actúa sobre el vagón va en sentido contrario al de la velocidad del vagón v_1. Utilizando el sistema técnico de unidades, tenemos que la masa del vagón $m = \frac{16\,000}{9{,}81}$ unid. técn. de masa $\cong$ $\cong$ 1632 unid. técn. de masa, de donde, en el caso a), el valor medio de la fuerza $\bar{f}$ será

$$\bar{f} = \frac{1632 \cdot 5}{60} \text{ kgf} = 136 \text{ kgf};$$

en el caso b):

$$\bar{f} = \frac{1632 \cdot 5}{15} \text{ kgf} = 544 \text{ kgf};$$

y en el caso c):

$$\bar{f} = \frac{1632 \cdot 5}{0{,}5} \text{ kgf} = 16\,320 \text{ kgf}.$$

Así tenemos que, a una misma variación de cantidad de movimiento, la fuerza depende del tiempo en que esta cantidad de movimiento varía: al detenerse despacio debido al rozamiento, esta fuerza resultó igual a 136 kgf solamente, al chocar contra un obstáculo, cuando la cantidad de movimiento ha

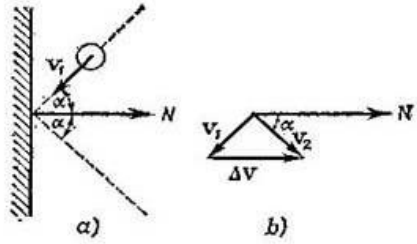


Fig. 33. Choque elástico de la pelota contra la pared.

descendido hasta cero en el pequeño intervalo de tiempo de 0,5 s, la fuerza ya es mayor de 16 tf.

E j e m p l o 2. Una pelota de 200 gf de peso choca contra una pared y rebota, sin pérdida de velocidad, de manera que su trayectoria de antes del golpe forma con la normal a la pared (fig. 33, *a*), el mismo ángulo que después del golpe. La velocidad de la pelota es de 5 m/s y la duración del golpe sobre la pared es $\Delta t = 0{,}05$ s. Determinar la fuerza del golpe para $\alpha = 60°$.

S o l u c i ó n. De la fórmula (4) del § 17 tenemos:

$$\bar{f}\Delta t = m\,(v_2 - v_1) = m\Delta v, \qquad (3)$$

donde $v_2 - v_1$ es una diferencia vectorial. Considerando positivo el sentido de la normal hacia el exterior de la pared (fig. 33, *b*), tenemos

$$\Delta v = v_2 \cos \alpha - (-v_1 \cos \alpha) = v_2 \cos \alpha + v_1 \cos \alpha.$$

Según la condición del problema, la pelota rebota sin pérdida de velocidad, es decir:

$$v_1 = v_2 = v, \quad \text{de donde } \Delta v = 2v \cos \alpha;$$

el vector Δv va dirigido según la normal a la pared. Sustituyendo este valor de Δv en la (3), encontramos que el valor medio de la fuerza $\overline{f}$ que actúa sobre la pelota durante el golpe, es

$$\overline{f} = \frac{2mv \cdot \cos \alpha}{\Delta t},$$

donde Δt es la duración del golpe. Para lo valores dados en el ejemplo, tenemos:

$$\overline{f} = \frac{2 \cdot 0{,}2 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2}}{9{,}81 \cdot 0{,}05} \text{ kgf} \cong 2 \text{ kgf}.$$

Ejemplo 3. Por una polea fija pasa arrollada una cuerda (fig. 34 en cuyos extremos van colgadas las pesas P_1 y P_2. Suponiendo que el movimiento se efectúa sin rozamiento, determinar la aceleración con que se mueven las pesas.

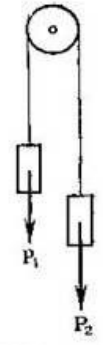


Fig. 34. Movimiento de las pesas fijas en una cuerda que pasa por una polea.

Solución. En cada pesa actúa su peso y la fuerza de tensión de la cuerda f_t. Consideremos que la dirección hacia abajo es positiva. Entonces:

$$m_2 w = P_2 - f_t, \quad -m_1 w = P_1 - f_t,$$

donde m_1 y m_2 son las masas de las pesas, y w el valor de su aceleración. Restando una ecuación de otra tenemos:

$$(m_1 + m_2)\, w = P_2 - P_1;$$

pero los pesos P_2 y P_1 son iguales respectivamente a $m_2 g$ y $m_1 g$, donde g es la aceleración de la gravedad, de donde

$$w = g \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}. \tag{4}$$

Esta clase de polea con una cuerda arrollada y dos pesas representa un aparato demostrativo («máquina de Atwood»), que se utiliza para ilustrar la segunda ley de Newton.

Si ambas pesas son iguales, $m_2 = m_1$, y, según la (4), la aceleración de las pesas $w = 0$. En este caso, impulsando a las pesas, es decir, comunicándoles cierta velocidad v, es fácil observar que, siendo pequeño el rozamiento de la polea, las pesas se desplazarán con movimiento uniforme. Si tomamos una pesa un poco más pesada que la otra, obtenemos que $m_2 - m_1$ es mucho menor que $m_2 + m_1$, de donde, según la (4), la aceleración de las pesas w no será muy grande. En este caso es fácil registrar los trayectos recorridos por las pesas en distintos intervalos de tiempo, y convencerse de que corresponden al caso del movimiento uniformemente acelerado.

§ 19. Principio clásico de la relatividad. En el § 14 hemos visto que la primera ley de Newton se cumple en un sistema inercial de referencia; lo mismo ocurre con la segunda ley. El principio de la inercia, puede, en general, considerarse como un caso particular de la ley de la aceleración; efectivamente, haciendo $\mathbf{f} = 0$ en la ecuación de la ley de la aceleración $\mathbf{f} = m\mathbf{w}$, obtenemos que $\mathbf{w} = 0$, lo cual indica que en el cuerpo sobre el cual no actúa ninguna fuerza (es decir, no actúa ningún otro cuerpo), la aceleración es igual a cero, es decir, el cuerpo permanece en reposo o se desplaza con movimiento rectilíneo y uniforme.

Hemos indicado también que cualquier sistema que se desplace con movimiento rectilíneo uniforme respecto a un sistema inercial, es también un sistema inercial.

Veamos el movimiento de un mismo cuerpo respecto a dos sistemas inerciales diferentes. Está claro que este movimiento se distinguirá solamente en cierta diferencia constante de velocidades: *la aceleración de un mismo cuerpo en diferentes sistemas inerciales es la misma.* De aquí que, según la ley de la aceleración, las fuerzas que actúan sobre un mismo cuerpo en ambos sistemas inerciales, también serán iguales. Si nosotros nos encontramos en el interior de un vagón que se desplaza con movimiento rectilíneo uniforme, para comunicar una determinada aceleración a un cuerpo cualquiera hay que aplicarle las mismas fuerzas que se le aplicarían de estar el vagón parado. En otras palabras, en el interior del vagón con movimiento rectilíneo uniforme, todos los procesos mecánicos transcurren exactamente igual que en el vagón inmóvil. Esto quiere decir (abstrayéndonos, claro está, de las trepidaciones y de la posibilidad de mirar por la ventanilla) que, hallándonos en el interior de un vagón con movimiento rectilíneo uniforme, no se puede, con mediciones o experimentos mecánicos determinar la velocidad del vagón; ni siquiera establecer si se desplaza con movimiento rectilíneo uniforme o está en reposo. Galilei fue el primero que demostró esta imposibilidad. En 1623, examinando los fenómenos que transcurrían en el interior de un camarote cerrado de un barco, escribió: «Y (sólo si el movimiento del barco es uniforme), usted no notará el menor cambio en los fenómenos, y por ninguno de ellos será capaz de juzgar si el barco se mueve o está parado: usted, saltando, recorrerá respecto al suelo las mismas distancias que estando el barco parado, es decir, porque

el barco se mueva con mucha rapidez, usted no realizará mayores saltos hacia la popa que hacia la proa, aunque, al tiempo de hallarse en el aire, el suelo que se encuentra debajo de usted, corre en sentido contrario a su salto, y al lanzarle cualquier cosa a su amigo, no necesitará lanzarla con más fuerza, si él está cerca de la proa y usted cerca de la popa, que si se encontrasen cambiados sus lugares; las gotas de agua de un jarro suspendido del techo caerán verticalmente al suelo, y ni una de ellas caerá inclinándose hacia la popa, aunque, mientras la gota se halla en el aire, el barco se desplaza hacia delante. Las moscas continuarán su vuelo indiferentemente en todas direcciones, y de ninguna manera ocurrirá que (al parecer, cansadas de seguir la rápida carrera del barco) se reúnan en la parte más cercana a la popa»*).

Resumiendo podemos decir: *con ningún experimento mecánico realizado en el interior de un sistema, se puede determinar si el sistema inercial se halla en reposo o se desplaza con movimiento rectilíneo uniforme.* Desde el punto de vista mecánico, todos los sistemas inerciales son equivalentes. Cualquiera de ellos se puede suponer fijo (en reposo) y determinar la velocidad de los demás sistemas inerciales, respecto a este sistema.

Este postulado se denomina *principio clásico de la relatividad o principio de la relatividad de Galilei.*

La teoría de la relatividad de Einstein generaliza este resultado estableciendo que, en general, con ninguna clase de experimentos realizados en el interior del sistema, sean eléctricos, luminosos, etc., se puede determinar el movimiento rectilíneo uniforme del sistema.

§ 20. Principio de la igualdad de la acción y de la reacción (tercera ley de Newton). Ley (principio) de la conservación de la cantidad de movimiento. *El principio de la igualdad de la acción y de la reacción* complementa a la ley de la aceleración: subraya la circunstancia de que la acción de los cuerpos que lleve a un cambio de estado de sus movimientos, tiene carácter *de acción mutua.* Este principio dice: *si el cuerpo B* (fig. 35) *actúa sobre el cuerpo A con una fuerza* $\mathbf{f}_1$, *el cuerpo A, a su vez, actúa sobre el B con una fuerza* $\mathbf{f}_2$ *igual a la fuerza* $\mathbf{f}_1$, *y dirigida en sentido contrario*:

$$\mathbf{f}_1 = -\mathbf{f}_2. \qquad (1)$$

Es esencial subrayar que las fuerzas $\mathbf{f}_1$ y $\mathbf{f}_2$ de que se trata en este principio («acción» y «reacción»), *están aplicadas a diferentes cuerpos.*

Aduzcamos unos cuantos ejemplos: a) un hombre empuja una vagoneta (fig. 36): la fuerza $\mathbf{f}_1$ dirigida hacia delante estará aplicada a la vagoneta, la fuerza $\mathbf{f}_2$, igual a la anterior, pero de sentido contrario, estará aplicada a las manos del hombre; b) un martillo golpea

*) Traducción de la versión rusa (*N. del T.*)

un clavo: la fuerza $\mathbf{f}_1$ actúa sobre el clavo del lado del martillo, una fuerza $\mathbf{f}_2$, igual a la anterior, pero de sentido opuesto, actuará sobre el martillo; c) de un pozo se eleva atado a una cuerda un cubo: la fuerza $\mathbf{f}_1$ está aplicada al cubo y dirigida hacia arriba, la fuerza $\mathbf{f}_2$, igual a la anterior, pero dirigida hacia abajo, está aplicada a la cuerda*).

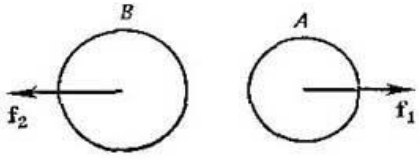


Fig. 35. El cuerpo B actúa sobre el A con una fuerza $\mathbf{f}_1$; a su vez, el cuerpo A actúa sobre el B con una fuerza $\mathbf{f}_2$ de igual intensidad que la $\mathbf{f}_1$, pero de sentido contrario.

Los dos cuerpos solicitados mutuamente adquieren aceleración. Si las masas de los cuerpos son m_1 y m_2, y las aceleraciones adquiridas por ellos son respectivamente $\mathbf{w}_1$ y $\mathbf{w}_2$, según la segunda ley de Newton tendremos:

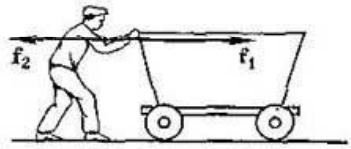


Fig. 36. El hombre empuja a la vagoneta con una fuerza $\mathbf{f}_1$; la fuerza $\mathbf{f}_2$ de la misma intensidad que la $\mathbf{f}_1$, pero de sentido contrario, está aplicada a las manos del hombre.

$$\mathbf{w}_1 = \frac{\mathbf{f}_1}{m_1}, \quad \mathbf{w}_2 = \frac{\mathbf{f}_2}{m_2},$$

de donde, según (1)

$$\mathbf{w}_1 = -\frac{m_2}{m_1}\mathbf{w}_2, \tag{2}$$

es decir, los cuerpos solicitados mutuamente adquieren una aceleración de sentidos opuestos e inversamente proporcional a sus masas.

Del principio de la igualdad de la acción y de la reacción se deduce una consecuencia muy importante. En el caso de la acción

*) La fuerza $\mathbf{f}_2$ que, según la tercera ley de Newton, está aplicada al cuerpo B, que es solicitado por el cuerpo A, a veces se llama *fuerza de inercia*. Sin embargo, está claro que esta división de fuerzas $\mathbf{f}_1$ y $\mathbf{f}_2$ en «motriz», fuerza $\mathbf{f}_1$, y «fuerza de inercia», $\mathbf{f}_2$, se puede hacer sólo en el caso de que los mismos cuerpos A y B, por cualquier característica, se puedan dividir en «movido» y «motor», como tiene lugar en el caso del hombre que, apoyándose en el suelo, mueve la vagoneta. En cuanto nos representemos el caso del choque de dos bolas iguales, estará claro que ambos cuerpos A y B y las dos fuerzas $\mathbf{f}_1$ y $\mathbf{f}_2$, que figuran en este principio, «tienen iguales derechos». Por eso el término de «fuerza de inercia» en el sentido indicado (en el de acción y reacción) no tiene razón de ser, y nosotros no lo vamos a utilizar.

Sobre la otra acepción del término «fuerza de inercia», véase el § 22.

mutua de dos cuerpos A y B, la variación de la cantidad de movimiento del cuerpo A según la fórmula (3) del § 17 será:

$$\Delta \mathbf{K}_A = \mathbf{f}_1 \cdot \Delta t_1, \tag{3}$$

donde $\mathbf{f}_1$ es la fuerza que actúa sobre el cuerpo A de parte del cuerpo B, y Δt_1, el tiempo durante el cual actúa la fuerza $\mathbf{f}_1$. Hay que tener en cuenta que en este caso se suponía que la fuerza $\mathbf{f}_1$ era constante durante el intervalo de tiempo Δt_1. La variación de la cantidad de movimiento del cuerpo B será:

$$\Delta \mathbf{K}_B = \mathbf{f}_2 \cdot \Delta t_2,$$

donde $\mathbf{f}_2$ es la fuerza que actúa sobre el cuerpo B de parte del A, y Δt_2, el tiempo durante el cual actúa la fuerza $\mathbf{f}_2$. Según el principio de la igualdad de la acción y de la reacción:

$$\mathbf{f}_2 = -\mathbf{f}_1,$$

además, está claro que el tiempo Δt_1 durante el cual el cuerpo B actúa sobre el A, será igual al tiempo Δt_2 durante el cual el cuerpo A actúa sobre el B, de donde $\mathbf{f}_1 \Delta t_1 = -\mathbf{f}_2 \Delta t_2$ y, por lo tanto:

$$\Delta \mathbf{K}_A = -\Delta \mathbf{K}_B. \tag{4}$$

Esta igualdad que hemos obtenido para el caso de una fuerza constante de acción mutua entre los cuerpos, se puede generalizar fácilmente para el caso cuando la fuerza $\mathbf{f}_1$ varía. Para ello, el tiempo de acción mutua entre los cuerpos se ha de dividir en intervalos tan pequeños Δt_i, que durante el transcurso de cada uno de ellos, se pueda considerar constante la fuerza. Para cada uno de los intervalos de tiempo Δt_i infinitamente pequeños se cumplirá la igualdad (4), por lo tanto, se cumplirá para todo el tiempo de acción mutua. Resulta, pues, que la ecuación (4) tiene carácter general. Esto significa que *como consecuencia de la acción mutua de los cuerpos, la cantidad de movimiento de uno ha aumentado tanto, como ha disminuido la del otro*, es decir, se ha producido una transmisión de cantidad de movimiento.

La fórmula (4) se puede escribir así:

$$\Delta \mathbf{K}_A + \Delta \mathbf{K}_B = 0, \tag{5}$$

es decir, al solicitarse mutuamente dos cuerpos, la variación total de sus cantidades de movimiento es igual a cero, de lo cual se deduce que la cantidad de movimiento total, $\mathbf{K} = \mathbf{K}_A + \mathbf{K}_B$, permanece constante. Este resultado se puede generalizar para cualquier cantidad de cuerpos que formen un *sistema cerrado*, es decir, de cuerpos que se soliciten mutuamente, pero que no lo hagan con ningún cuerpo exterior respecto al sistema de los mismos. Suponiendo que el sistema consta de n cuerpos y designando sus respectivas

cantidades de movimiento por $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$, $\mathbf{K}_3$, . . ., $\mathbf{K}_n$, obtenemos

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_3 + \ldots + \mathbf{K}_n = \text{const}, \qquad (6)$$

es decir, *el vector total de la cantidad de movimiento de un sistema cerrado, que es la suma vectorial de las cantidades de movimiento de los cuerpos que forman el sistema cerrado, permanece constante durante todo el tiempo del movimiento.*

Esta ley que lleva el nombre *de ley (principio) de la conservación de la cantidad de movimiento*, es una de las leyes fundamentales de la física. Es justa no sólo en el caso de la acción mutua de los

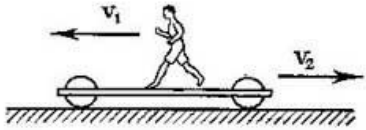


Fig. 37. El hombre corre por la carretilla a la velocidad $\mathbf{v}_1$; la carretilla se desplaza en sentido contrario a la velocidad $\mathbf{v}_2$.

cuerpos macroscópicos, sino también en el de las partículas microscópicas, es decir, de átomos, núcleos atómicos, electrones, etc. independientes.

Para ilustrar la ley de la conservación de la cantidad de movimiento veamos el siguiente ejemplo: un hombre de masa m_1 está inmóvil en una carretilla, que a su vez está en reposo respecto a la Tierra. La masa de la carretilla es m_2. Su cantidad de movimiento total es igual a cero. Si el hombre empieza a correr por la carretilla a la velocidad $\mathbf{v}_1$ respecto a la Tierra (fig. 37), adquiere una cantidad de movimiento $m_1 v_1$, en cuyo caso, la carretilla, si no actúan las fuerzas de rozamiento, también adquirirá la cantidad de movimiento $m_2 v_2 = -m_1 v_1$, ya que la cantidad de movimiento total $m_1 v_1 + m_2 v_2$ debe permanecer igual a cero. De esta manera tenemos que la carretilla adquiere, respecto a la Tierra, una velocidad igual a

$$v_2 = -\frac{m_1}{m_2} v_1,$$

donde el signo menos indica que la velocidad $\mathbf{v}_2$ va dirigida en sentido contrario al del hombre. La carretilla se desplazará mientras corra el hombre. Cuando el hombre se detenga en la carretilla, su cantidad de movimiento de nuevo será igual a cero, y la cantidad de movimiento de la carretilla también será igual a cero, es decir, se detiene.

Examinemos el choque de dos bolas inelástico. La ley de la conservación de la cantidad de movimiento nos permite determinar la velocidad v que adquieren las dos bolas de masas m_1 y m_2 después de un golpe inelástico y central (las velocidades de las bolas están diridas según la recta que une sus centros), siendo las respectivas velocidades de antes del choque v_1 y v_2.

Después del golpe inelástico las dos bolas se mueven a la misma velocidad v. Además, como el golpe es central, las tres velocidades v_1, v_2 y v estarán en una recta. Por lo tanto, debido a la conservación de la cantidad de movimiento, tendremos

$$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)\,v, \text{ de donde } v = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}.$$

Examinemos el caso cuando en los dos cuerpos A y B, además de las fuerzas de acción mutua $\mathbf{f}_1$ y $\mathbf{f}_2$, actúan las fuerzas exteriores $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$; entonces, para cada uno de los cuerpos, tenemos:

$$\Delta\mathbf{K}_A = \mathbf{f}\Delta t + \mathbf{F}_1\Delta t; \quad \Delta\mathbf{K}_B = \mathbf{f}_2\Delta t + \mathbf{F}_2\Delta t.$$

Sumando estas ecuaciones y observando que, según el principio de la igualdad de la acción y de la reacción, $\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 = 0$, tenemos:

$$\Delta(\mathbf{K}_A + \mathbf{K}_B) = (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2)\,\Delta t.$$

Haciendo $\mathbf{K}_A + \mathbf{K}_B = \mathbf{K}$, cantidad de movimiento total, y $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{F}$, fuerza resultante, podemos escribir:

$$\Delta\mathbf{K} = \mathbf{F}\cdot\Delta t.$$

Esta misma igualdad tendrá lugar sea cual quiere el número de cuerpos del sistema. Luego, *la variación de la cantidad de movimiento total de un sistema de cuerpos la determina la impulsión de la resultante de las fuerzas exteriores*. Si la resultante de las fuerzas exteriores es igual a cero, también lo será la variación de la cantidad de movimiento total, y, por lo tanto, el vector total de la cantidad de movimiento del sistema permanecerá constante; por consiguiente, la ecuación (7) nos lleva otra vez a la (6).

Denominando las fuerzas de acción mutua de los cuerpos que forman un sistema, *fuerzas internas*, podemos decir: *bajo la acción de las fuerzas internas, el sistema no puede variar su cantidad de movimiento total*. Bajo la acción de estas fuerzas, solamente pueden ponerse en movimiento distintas partes del sistema respecto a otras. Por ejemplo, una locomotora, bajo la acción de las fuerzas que solamente actúan sobre el émbolo de parte del vapor, no puede ponerse en movimiento; se pone en movimiento por la aparición de *una fuerza exterior* que es la fuerza de rozamiento entre las ruedas y los carriles. La fuerza que se origina debido al rozamiento, aplicada a las ruedas, mueve a la locomotora. La fuerza que, según la tercera ley de Newton es igual y opuesta y está aplicada a los carriles, empuja a éstos en sentido contrario. Como los carriles están fijos a la Tierra, su desplazamiento no tiene importancia. La cantidad de movimiento adquirida por la locomotora es igual a la que se transmite a la esfera terrestre. Como la masa de la esfera terrestre es extremadamente grande en comparación con la de la locomotora, la velocidad adquirida por ella es insignificante.

Como la proyección del vector resultante sobre cualquier dirección (eje) (fig. 38) es igual a la suma de las proyecciones de los vectores componentes sobre esta misma dirección, de la ecuación (7) se deduce que la variación de la suma de proyecciones de las cantidades de movimiento de los cuerpos que forman el sistema, en cualquier dirección, también se determina por la suma de

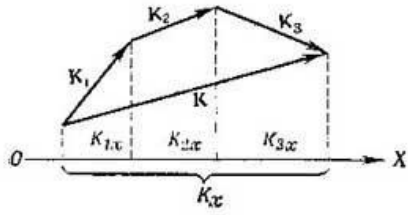


Fig. 38. La proyección K_x del vector resultante **K** es igual a la suma de las proyecciones de los vectores componentes.

las proyecciones de las impulsiones de las fuerzas exteriores en la misma dirección. Si como tales direcciones tomamos las de los ejes OX, OY y OZ del sistema de coordenadas rectilíneas rectangulares, obtenemos, para el sistema de n cuerpos:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta K_{xi} = \sum_{i=1}^{n} F_{xi}\Delta t, \quad \sum_{i=1}^{n} \Delta K_{yi} = \sum_{i=1}^{n} F_{yi}\Delta t,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta K_{zi} = \sum_{i=1}^{n} F_{zi}\Delta t. \tag{8}$$

Pasando a los intervalos de tiempo infinitamente pequeños y, en correspondencia con ello, a las variaciones infinitamente pequeñas de las componentes de las cantidades de movimiento, obtenemos:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{dK_{xi}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} F_{xi}, \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{dK_{yi}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} F_{yi},$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{dK_{zi}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} F_{zi}, \tag{8a}$$

es decir, la suma de las derivadas respecto al tiempo de las proyecciones de las cantidades de movimiento sobre cada uno de los ejes coordenados, es igual a la suma de las proyecciones de las fuerzas exteriores sobre el mismo eje.

Si la suma de las proyecciones de las fuerzas exteriores sobre uno de los ejes es igual a cero, según la ecuación (8), la suma de las proyecciones de las cantidades de movimiento de los cuerpos que forman el sistema, sobre el mismo eje, permanece constante. Si la suma de las fuerzas exteriores es igual a cero, será constante la suma de las proyecciones de las cantidades de movimiento de los cuerpos en cada uno de los ejes:

$$K_x = \sum_{i=1}^{n} k_{xi} = \text{const}, \quad K_y = \sum_{i=1}^{n} K_{yi} = \text{const},$$

$$K_z = \sum_{i=1}^{n} K_{zi} = \text{const}. \tag{6a}$$

§ 21. Fuerzas que actúan en el movimiento curvilíneo. La relación entre el vector fuerza f y la aceleracion w originada por él, expresada por la segunda ley de Newton:

$$\mathbf{f} = m\mathbf{w}, \tag{1}$$

es general y justa para cualquier movimiento, tanto rectilíneo como curvilíneo. Sin embargo, en vista de la importancia de diferentes tipos de movimientos curvilíneos, veamos con más detalle las fuerzas que actúan en este caso. La ecuación (1) indica que la fuerza y la aceleración en cada instante dado tienen la misma dirección. En el movimiento curvilíneo, como ya hemos visto en el § 11, la aceleración w no va dirigida según la tangente a la trayectoria, sino que forma

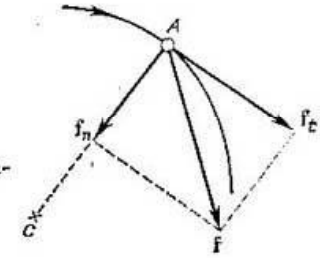


Fig. 39. Descomposición de una fuerza en sus componentes tangencial y normal.

con ella cierto ángulo y puede ser descompuesta en dos componentes: tangencial w_t y normal w_n. De esto se deduce que la fuerza f que actúa sobre el cuerpo que se desplaza con movimiento curvilíneo, en cada instante dado va dirigida formando cierto ángulo con la dirección del movimiento y puede descomponerse en dos componentes: tangencial $\mathbf{f}_t$ y normal $\mathbf{f}_n$.

La primera componente f_t va dirigida según la tangente a la trayectoria, la segunda, f_n, según la normal a la misma, es decir, según el radio de curvatura hacia el centro de curvatura (fig. 39); por eso, la componente normal f_n se denomina también *componente centrípeta de la fuerza*.

De la fig. 39 se ve que el valor de la fuerza total f es:

$$f = \sqrt{f_t^2 + f_n^2}. \tag{2}$$

Las componentes tangencial f_t y normal f_n están relacionadas respectivamente con las componentes tangencial w_t y normal w_n de la aceleración mediante las ecuaciones:

$$f_t = mw_t, \quad f_n = mw_n. \tag{3}$$

Como, según la ecuación (5) del § 11, la componente normal de la aceleración es $w_n = \frac{v^2}{R}$, donde v es la velocidad lineal del

cuerpo, y R el radio de curvatura de la trayectoria en el punto dado, tenemos que

$$f_n = m\frac{v^2}{R}. \qquad (4)$$

En el movimiento curvilíneo uniforme, donde la velocidad es constante por su magnitud, y la componente tangencial de la aceleración igual a cero, la componente tangencial de la fuerza es también igual a cero, y toda la fuerza es centrípeta. Esta fuerza, actuando según la normal a la trayectoria, obliga al cuerpo a girar continuamente sin variar de magnitud la velocidad. Si esta fuerza no existiese, el cuerpo se desplazaría en movimiento rectilíneo.

En el caso del movimiento circular, en la ecuación (4) se puede sustituir la velocidad lineal v por la angular ω o expresarla en función del período T, o del número de revoluciones (vueltas) n. Entonces, según las ecuaciones $v = \omega R = 2\pi\frac{R}{T} = 2\pi nR$ (véase el § 12), obtenemos para la fuerza centrípeta:

$$f_n = m\omega^2 R = 4\pi^2 m\frac{R}{T^2} = 4\pi^2 mn^2 R. \qquad (4a)$$

Según la tercera ley de Newton, junto a la fuerza centrípeta aplicada al cuerpo que se mueve según una curva, existe otra fuerza igual a la primera y de sentido contrario aplicada al mismo cuerpo (a las «ligaduras» o «enlaces»), y que le obliga a girar. Esta fuerza se denomina *centrífuga*. De esta manera, las fuerzas centrípeta y centrífuga son las dos fuerzas cuya existencia viene determinada por el principio de la igualdad de la acción y de la reacción, aplicadas a diferentes cuerpos. Por ejemplo, en el caso de hacer girar una piedra atada de una cuerda, la fuerza centrípeta está aplicada a la piedra, y la centrífuga, a la cuerda; en el caso del tranvía que toma una curva, la fuerza centrípeta está aplicada al tranvía, y la centrífuga, a los carriles; en el caso de la Luna girando alrededor de la Tierra, la fuerza centrípeta está aplicada a la Luna, la centrífuga a la Tierra.

De la denominada *fuerza centrífuga de inercia* se hablará más abajo (§ 22).

Examinemos unos cuantos *ejemplos*.

Para disminuir la presión lateral de las ruedas de los trenes sobre los carriles en las curvas, la vía se hace un poco inclinada (peralte). Calculemos en qué ángulo α hay que inclinar la vía respecto al horizonte en una curva de radio R para que el vagón que vaya a la velocidad v al tomar la curva no cause presión lateral sobre los carriles.

El vagón no originará ninguna presión lateral sobre los carriles en el caso de que la componente f_1 de la fuerza de la gravedad P, no equilibrada por la reacción de la vía, dirigida hacia el centro de curvatura (fig. 40), sea la fuerza cen-

trípeta que hace inclinar al vagón. Por lo tanto, se debe cumplir la condición:

$$f_1 = P \operatorname{tg} \alpha = \frac{mv^2}{R}, \tag{5}$$

donde m es la masa del vagón. Como el peso del vagón es $P = mg$, según la (5), la inclinación buscada de la vía la determinará el ángulo α que cumpla la ecuación:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v^2}{Rg}. \tag{6}$$

En la fórmula (6), como se ve, no entra la masa del vagón, sino solamente el radio de curvatura R y la velocidad v. En las vías ferroviarias el peralte se

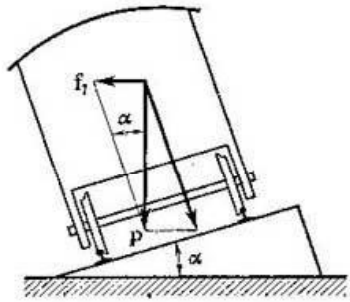


Fig. 40. La componente f_1 de la fuerza de la gravedad inclina al vagón.

determina según la velocidad media con que los trenes toman la curva; en este caso, los trenes que van más despacio, ejercen mayor presión sobre el carril interior, y los que van a mayor velocidad, sobre el exterior.

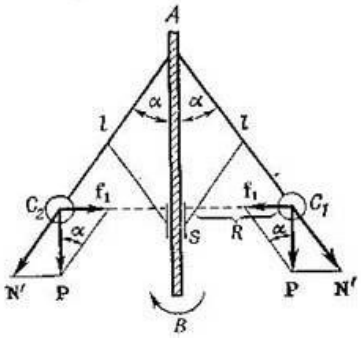


Fig. 41. Regulador centrífugo.

Como segundo ejemplo veamos la acción del regulador centrífugo de péndulo de la máquina de vapor, cuyo esquema se representa en la fig. 41. En el extremo superior A del árbol vertical AB del regulador, van articulados dos brazos de igual longitud l, en cuyos extremos hay dos bolas pesadas C_1 y C_2. Con los brazos AC_1 y AC_2 van unidos con articulación otros dos brazos cuyos extremos inferiores llevan el manguito S. El regulador gira alrededor del eje vertical AB. Al variar la velocidad de giro, varía el ángulo de desviación (de divergencia) de los brazos AC_1 y AC_2, lo cual produce un desplazamiento del manguí-

to S. El manguito está unido al mecanismo de regulación de la admisión del vapor en el cilindro de la máquina de vapor.

Determinemos el ángulo de divergencia α de los brazos AC_1 y AC_2 a la velocidad angular dada ω del regulador.

En la posición inclinada del brazo AC_1, la fuerza de la gravedad del contrapeso C_1, que es $P = mg$ y va dirigida verticalmente hacia abajo, no la equilibra la reacción del brazo. Descompongamos la fuerza P en dos: N en dirección del brazo, y f_1 horizontalmente. La componente N' la equilibra la reacción del brazo; la componente f_1 es la fuerza centrípeta que hace girar la bola obligándola a moverse según una circunferencia alrededor del árbol AB. De esto se deduce que se debe cumplir la condición.

$$f_1 = m\omega^2 R. \tag{7}$$

Pero de la fig. 41 tenemos que

$$f_1 = P \operatorname{tg} \alpha = mg \operatorname{tg} \alpha, \quad R = l \operatorname{sen} \alpha,$$

de donde, según la (7)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{l\omega^2 \operatorname{sen} \alpha}{g}, \quad \text{o} \quad \operatorname{sen} \alpha \left(\frac{1}{\cos \alpha} - \frac{l\omega^2}{g} \right) = 0.$$

De donde obtenemos dos soluciones; primera:

$$\cos \alpha = \frac{g}{l\omega^2} \tag{8}$$

y segunda: $\operatorname{sen} \alpha = 0$, es decir, $\alpha = 0$. Esta segunda solución no representa ningún interés, ya que la construcción del regulador no permite el valor de $\alpha = 0$; la primera solución determina el valor buscado de α: con el aumento de ω aumenta el ángulo α.

§ 22. Sistemas acelerados. Fuerzas de inercia. Como hemos visto basándonos en los razonamientos aducidos en el § 19, con ninguna clase de experimentos mecánicos llevados a cabo en el

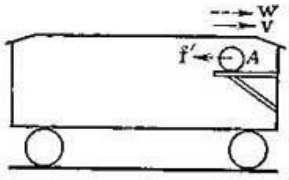


Fig. 42. La bola A queda rezagada respecto al vagón que se desplaza con movimiento acelerado.

interior de un sistema de referencia se puede establecer si el sistema se desplaza o no con movimiento rectilíneo uniforme. Sin embargo, una aceleración cualquiera del sistema se refleja en los fenómenos mecánicos que se producen en él.

Examinemos ahora más detenidamente la influencia de la aceleración del sistema en los procesos que pasan en él. Para ello, volvamos de nuevo al ejemplo del vagón en marcha. Supongamos que, al principio, el vagón lleva un movimiento rectilíneo a velocidad constante v en la dirección indicada por la flecha (fig. 42). En un tablero horizontal de la pared delantera del vagón hay una bola A

de masa m. Consideremos que el tablero es absolutamente liso, de modo que entre el tablero y la bola no haya rozamiento. Veamos lo que ocurre dentro del vagón respecto a uno de los sistemas de referencia siguientes: 1) respecto al relacionado con la vía del ferrocarril y 2) respecto al relacionado con el vagón. En el movimiento rectilíneo uniforme, ninguna fuerza actúa sobre la bola en ninguno de los dos sistemas (excepto la gravedad y la reacción en el punto de apoyo, que se equilibran mutuamente). Supongamos ahora que el vagón adquiere una aceleración w constante dirigida en el mismo sentido que la velocidad v del vagón: el vagón empieza a desplazarse cada vez más de prisa.

¿Qué ocurre con el movimiento de la bola respecto a los dos sistemas de referencia indicados?

Aclaremos primeramente el carácter del movimiento de la bola respecto al sistema de referencia relacionado con la vía del ferrocarril. Respecto a la vía, la bola continúa moviéndose a la velocidad primitiva v, ya que ninguna clase de fuerza horizontal actúa sobre ella; pero como el vagón empieza a ir cada vez más de prisa, la bola quedará rezagada del vagón.

De esta manera tenemos que la bola que antes estaba en reposo respecto al tablero del vagón, ahora empieza a resbalar en dirección contraria al movimiento del mismo. De esto se deduce que respecto al sistema de referencia relacionado con el vagón, la bola ha adquirido una aceleración — w.

Si admitimos que en el sistema de referencia relacionado con el vagón (que es inercial), es aplicable la segunda ley de Newton, la aparición, en este sistema, de la aceleración se puede explicar formalmente por la acción de una fuerza que actúa sobre la bola:

$$\mathbf{f}' = m(-\mathbf{w}),$$

donde m es la masa de la bola (contrapeso), y — w, su aceleración respecto al vagón, de magnitud igual a la aceleración del mismo. Esta fuerza ficticia que tenemos que introducir en el sistema de referencia acelerado para que se cumpla la segunda ley de Newton se denomina *fuerza de inercia*.

Supongamos ahora que la bola del tablero se fija a la pared del vagón con un resorte C (fig. 43). En este caso, al acelerar el vagón, la bola empezará a rezagarse respecto al mismo y lo hará solamente hasta que el resorte se extienda lo suficiente para que la fuerza surgida en él le comunique a la bola la aceleración w igual a la del vagón. En otras palabras: el resorte *tira* de la bola con una fuerza f; esta fuerza está aplicada a la bola, *va dirigida en el sentido de la aceleración del vagón* w y es de magnitud igual a mw, donde m es la masa de la bola. Según la tercera ley de Newton hay una segunda fuerza $\mathbf{f}_1 = -\mathbf{f}$, aplicada al resorte y dirigida en sentido contrario de la aceleración del vagón.

Respecto al sistema de referencia relacionado con el vagón, la bola, después que el resorte se ha extendido, permanecerá en estado de reposo respecto al vagón. Por consiguiente, en este sistema de referencia, según la segunda ley de Newton, la suma de las fuerzas aplicadasa la bola debe ser igual a cero. Esto se cumplirá, si aplicamos a la bola la fuerza de inercia f′ y consideramos que equilibra

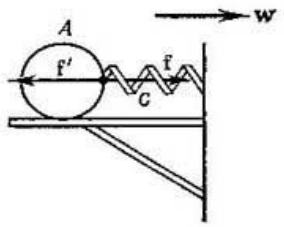


Fig. 43. El resorte tira de la bola con la fuerza f en la dirección del vagón en movimiento acelerado. Con una fuerza de la misma intensidad f′, la bola hace extenderse al resorte.

a la fuerza f con que el resorte extendido tira de ella. Esta es la fuerza de inercia $\mathbf{f}' = \mathbf{f}_1$. De esta manera, la fuerza $\mathbf{f}_1$ debida a la tercera ley de Newton, y que se aplica al resorte («enlaces» o «ligaduras») en el sistema de referencia acelerado, la aplicamos al mismo cuerpo (bola A). Utilizando el sistema acelerado, relacionado con el vagón, nosotros transformamos en estático el problema dinámico de equilibrio de la bola. Para ello, como se ha indicado, consideramos aplicada a la bola A, no sólo la fuerza f que actúa sobre ella, sino también la fuerza $\mathbf{f}_1$ que actúa sobre el enlace. Esta sustitución del problema dinámico por el estático se puede hacer en cualquier caso de movimiento acelerado.

Supongamos que sobre un punto materiál de masa m actúa una fuerza f. La ecuación del movimiento de este punto material viene expresada por la segunda ley de Newton:

$$\mathbf{f} = m\mathbf{w},$$

donde w es la aceleración adquirida por el punto material. Esta ecuación se puede escribir así:

$$\mathbf{f} + (-m\mathbf{w}) = 0.$$

La magnitud $\mathbf{f}_1 = -m\mathbf{w}$, según la tercera ley de Newton, representa la fuerza aplicada a los cuerpos que, al actuar sobre el punto material que examinamos, le comunican a éste una aceleración. Aplicando mentalmente la fuerza $\mathbf{f}' = \mathbf{f}_1$ al mismo punto material y llamándola *fuerza de inercia*, obtenemos que:

$$\mathbf{f} + \mathbf{f}' = 0,$$

es decir, *en todo instante dado, la fuerza de inercia y la fuerza aplicada al punto material se equilibran*. Este postulado se denomina *principio de D'Alembert*.

Veamos unos cuentos ejemplos más en los que surgen fuerzas de inercia. Supongamos que en el suelo de un ascensor hay una carga de masa m. Si el ascensor se eleva con una aceleración w, esta misma aceleración la adquiere también la carga como resultado de la presión que el suelo ejerce sobre ella, y que se suma al esfuerzo reactivo que equilibra el peso de la carga. La fuerza de esta presión $\mathbf{f} = m\mathbf{w}$. Según la tercera ley de Newton la carga, a su vez, presionará sobre el suelo con una fuerza complementaria de $\mathbf{f}_1 = -\mathbf{f}$. Si la carga no reposa directamente sobre el suelo, sino en el platillo de una

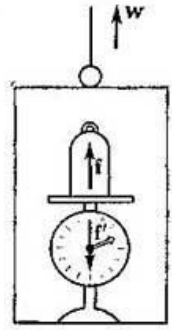


Fig. 44. El ascensor que se desplaza hacia arriba con movimiento acelerado, comunica la aceleración a la carga. Sobre la carga actúa una fuerza f; con la fuerza $\mathbf{f}_1$ de igual intensidad que la anterior actúa la carga sobre el platillo de la balanza.

balanza de resorte (fig. 44), esta fuerza $\mathbf{f}_1$ presionará sobre el resorte; este se comprimirá más y, si la aguja de la balanza, cuando no había aceleración, indicaba el peso de la carga P, ahora indicará el peso $\mathbf{P}' = \mathbf{P} + \mathbf{f}'$, donde $\mathbf{f}' = \mathbf{f}_1$.

En el caso de que el ascensor descienda con la aceleración w, con la misma aceleración descenderá junto con él la carga. Parte de la fuerza de la gravedad que actúa sobre la carga, le comunicará a ésta una aceleración. Esta parte de la fuerza de la gravedad será $\mathbf{f} = m\mathbf{w}$, de donde la presión de la carga sobre la balanza será $\mathbf{P}' = \mathbf{P} - \mathbf{f}$.

En ambos casos, las indicaciones de la balanza se diferenciarán de lo que indicaba la misma (P) cuando no había aceleración en el ascensor, debido a que se trata de un problema dinámico: movimiento de una carga con aceleración w. Respecto al sistema de referencia relacionado con el ascensor, la carga continúa, en ambos casos, en reposo, y la variación de las indicaciones en la balanza se puede considerar como un cambio de peso de la carga, cambio debido a que a su verdadero peso P se le ha añadido la fuerza de inercia f' (dirigida en el mismo sentido que P, si la aceleración del ascensor w va hacia arriba, y en sentido contrario a P, si la aceleración w va dirigida hacia abajo).

De manera completamente análoga se explica la aparición de las fuerzas de inercia *en un sistema de movimiento circular*. Sea un hombre

sentado en una plataforma giratoria con una piedra de masa m en las manos (fig. 45). Para que la piedra se desplace junto con la plataforma, es decir, describiendo una circunferencia de radio R (donde R es la distancia desde la piedra hasta el eje de la plataforma), es necesario comunicar a la piedra *una aceleración centrípeta* $w_n = \omega^2 R$, donde ω es la velocidad angular de la plataforma. Para ello, *a la piedra deberá estar aplicada una fuerza centrípeta* $f = m\omega^2 R$. El hombre

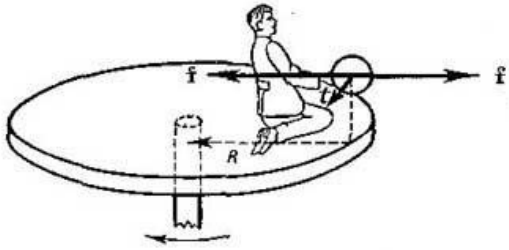


Fig. 45. El hombre sentado en una plataforma giratoria tira de una pesa con la fuerza f para hacerla girar.

debe tirar continuamente de la piedra para obligarla a girar. Sin la fuerza f, la piedra empezaría a desplazarse por la tangente t. Según la tercera ley de Newton, la piedra actúa sobre las manos del hombre con una fuerza $\mathbf{f}_1 = -\mathbf{f}$; esta fuerza $\mathbf{f}_1$ está aplicada a las manos del hombre y dirigida desde el centro de la plataforma hacia el exterior. En el § 21 hemos denominado a esta fuerza *fuerza centrífuga*.

Sin embargo, si examinamos todo el proceso con respecto al sistema de referencia que gira junto con la plataforma, la piedra, al girar, permanece inmóvil en este sistema, y la necesidad de aplicarle la fuerza f se puede considerar como resultado de que la misma piedra tenía aplicada la fuerza $\mathbf{f}' = \mathbf{f}_1$, dirigida desde el centro de la plataforma hacia el exterior. Esta es una fuerza de inercia análoga a las fuerzas de inercia estudiadas en los ejemplos del vagón y del ascensor con aceleración.

La fuerza de inercia que actúa en un sistema que gira, a veces se denomina *fuerza centrífuga de inercia*. Y no se debe confundir con la fuerza *realmente* centrífuga de que hablamos en el § 21.

En la vida cotidiana frecuentemente nos encontramos con fuerzas de inercia. Por ejemplo, cuando el tranvía empieza a frenar bruscamente, o a tomar una curva a bastante velocidad, nos lanza, respecto al tranvía, hacia delante o hacia un lado (a la parte exterior de la curva). Esto es debido a que nosotros conservamos la velocidad que teníamos antes de que el vagón adquiriese aceleración. Con respecto al sistema de referencia relacionado con el vagón, estos desplazamientos relativos se explican por la acción de las fuerzas de inercia. Estas fuerzas de inercia hay que considerarlas, en cualquier sistema acelerado, como complementarias a las fuerzas que actúan en el sistema inercial.

Einstein, en la teoría general de la relatividad, intentó poner en claro la naturaleza de las fuerzas de inercia. Según Einstein las fuerzas de inercia son equivalentes a las fuerzas de la gravitación. Nosotros ya hemos visto que la aceleración del ascensor nos lleva al mismo resultado que si la carga se hiciese más o menos pesada (según la dirección de la aceleración w), es decir, las fuerzas de inercia resultan equivalentes a las de la gravedad.

De esta manera resulta que la aceleración de cualquier sistema es equivalente a la aparición en el mismo de fuerzas de gravitación. Sin embargo, como demostró V. A. Fok, esta equivalencia no es justa en los límites de grandes escalas espaciales y temporales. El sistema inercial de referencia, es decir, el relacionado con el conjunto de estrellas fijas, es el privilegiado, y la aceleración en este sistema no tiene el carácter relativo que tiene la velocidad.

§ 23. Dependencia entre la gravedad y la latitud del lugar. Es muy cómodo utilizar las fuerzas de inercia para resolver diferentes problemas mecánicos de sistemas acelerados, en particular, sistemas de movimiento circular. Un sistema

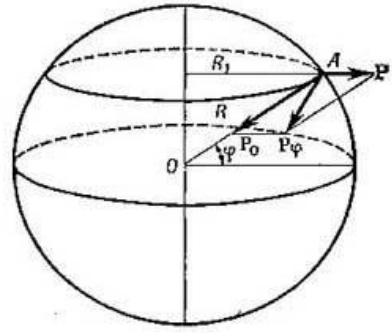


Fig. 46. Influencia de la rotación de la Tierra sobre la fuerza de la gravedad.

de movimiento circular de esta clase es, entre otros, el de la esfera terrestre, que da una vuelta al día. Por eso, para analizar con exactitud los diferentes procesos mecánicos que transcurren en la superficie de la Tierra, hay que tener en cuenta las fuerzas de inercia debidas a su rotación. Estas fuerzas son pequeñas, por eso, en muchos casos, las podemos despreciar y considerar aproximadamente, como ya se ha indicado, que la Tierra es un sistema inercial de referencia. No obstante, en una serie de casos no se puede despreciar la rotación de la Tierra.

Examinemos la influencia de la rotación de la Tierra en la fuerza de la gravedad. Sea un cuerpo sólido A de masa m situado en la latitud φ (fig. 46). Resolviendo el problema respecto a un sistema de coordenadas que gire junto con la Tierra, debemos tener en cuenta la fuerza de inercia:

$$f = m\omega^2 R_1, \qquad (1)$$

donde ω es la velocidad angular de la Tierra, y R_1 la distancia desde el cuerpo hasta el eje terrestre. La fuerza f va dirigida perpendicularmente al eje de la Tierra. Esta fuerza f se suma a la fuerza de la gravedad del cuerpo P_0 dirigida hacia el centro de la Tierra.

De aquí que el peso aparente $\mathbf{P}_\varphi$ del cuerpo a la latitud φ sea:

$$\mathbf{P}_\varphi = \mathbf{P}_0 + \mathbf{f}. \tag{2}$$

En esta ecuación, el miembro de la derecha es una suma vectorial.

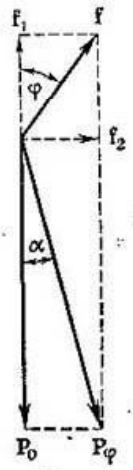
En la fig. 46, tenemos que: $R_1 = R \cos \varphi$, donde R es el radio de la Tierra, de donde, según la (1):

$$f = m\omega^2 R \cos \varphi. \tag{3}$$

Esta fuerza es muy pequeña en comparación con la de la gravedad. Efectivamente, $P_0 = mg_0$, de donde:

$$\frac{f}{P_0} \frac{\omega^2 R}{g_0} \cos \varphi;$$

sustituyendo ω, R y g_0 (aceleración verdadera de la fuerza de la gravedad) por sus valores resulta que $\frac{\omega^2 R}{g_0} = \frac{1}{289}$, y como el coseno del ángulo φ siempre es $\leqslant 1$, tenemos que la fuerza f es mucho menor que la de la gravedad P_0. Por eso, para determinar el peso aparente $\mathbf{P}_\varphi$ según la ecuación (2), hacemos el siguiente cálculo aproximado: descomponemos la fuerza $\mathbf{f}$ en dos: $\mathbf{f}_1$ dirigida verticalmente hacia arriba (para el punto dado de la esfera terrestre), y $\mathbf{f}_2$ dirigida horizontalmente. Entonces, aproximadamente se puede considerar que la componente f_2 solamente desvía la fuerza de la gravedad, y la componente $\mathbf{f}_1$, la hace variar solamente de magnitud. De aquí que aproximadamente tengamos:



$$P_\varphi = P_0 - f_1.$$

Pero de la fig. 47 tenemos que $f_1 = f \cos \varphi$, de donde

$$P_\varphi = P_0 - f \cos \varphi,$$

o, según la (3)

$$P_\varphi = P_0 - m\omega^2 R \cos^2 \varphi.$$

Fig. 47. Determinación del peso del cuerpo $\mathbf{P}_\varphi$ a la latitud φ.

Sustituyendo $mg_0 = P_0$, y sacando P_0 fuera del paréntesis, tenemos:

$$P_\varphi = P_0 \left(1 - \frac{\omega^2 R}{g_0} \cos^2 \varphi\right). \tag{4}$$

La fórmula (4) nos da la dependencia que hay entre el peso aparente P_φ y la latitud del lugar φ. La magnitud $\frac{\omega^2 R}{g_0}$ es constante e igual a $\frac{1}{289}$, de modo que

$$P_\varphi = P_0 \left(1 - \frac{1}{289} \cos^2 \varphi\right). \tag{4a}$$

En realidad, hay que tener en cuenta, además, que la Tierra no es una esfera perfecta, sino que está achatada por los polos, lo cual acarrea un aumento de la fuerza de la gravedad en éstos. La dependencia verdadera del peso del cuerpo respecto a la latitud φ es:

$$P_\varphi = P_0 \left(1 - \frac{1}{191} \cos^2 \varphi\right).$$

En el polo, P_φ coincide con P_0; en el ecuador, la diferencia entre P_φ y P_0 es la máxima.

El ángulo α que forma la dirección del peso aparente $\mathbf{P}_\varphi$ con el radio terrestre, como se ve de la fig. 47, se determina de la ecuación:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{f_2}{P_\varphi}.$$

Haciendo la sustitución aproximada de P_φ por P_0, y teniendo en cuenta que $f_2 = f \operatorname{sen}\varphi$, obtenemos que

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{f \operatorname{sen}\varphi}{P_0} = \frac{m\omega^2 R \cos\varphi \operatorname{sen}\varphi}{mg_0},$$

o

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\omega^2 R}{g_0} \cos\varphi \operatorname{sen}\varphi. \qquad (5)$$

De esta manera, la fuerza aparente de la gravedad P_φ va dirigida hacia el centro de la Tierra, tanto en el polo como en el ecuador. La mayor desviación la tiene en la latitud

$$\varphi = 45°.$$

Si el cuerpo se mueve según el ecuador a la velocidad lineal de v (calculada según un sistema inercial de coordenadas, relacionado con el centro de la esfera terrestre), sobre él actuará una fuerza de inercia f dirigida en sentido opuesto a la de la gravedad, e igual a:

$$f = \frac{mv^2}{R}.$$

El valor de esta fuerza será igual al de la gravedad P_0, si

$$\frac{mv^2}{R} = mg_0,$$

de donde, para v tendremos el valor de:

$$v = \sqrt{g_0 R}$$

Como $g_0 = 981$ cm/s^2 y $R = 6370$ km $= 6{,}37 \cdot 10^8$ cm, tenemos que:

$$v = \sqrt{981 \cdot 6{,}37 \cdot 10^8}\ \frac{\text{cm}}{\text{s}} = 7{,}91 \cdot 10^5\ \frac{\text{cm}}{\text{s}} \cong 7{,}9\ \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

Así tenemos que, si no hay fuerza de rozamiento con el aire, un cuerpo lanzado horizontalmente a la velocidad de $v = 7{,}9$ km/s, se movería sobre la superficie de la Tierra sin caer, es decir, como un satélite. Esta velocidad se denomina *«velocidad orbital»* (*«primera velocidad cósmica»*).

En el movimiento de un satélite artificial, «sputnik», sobre la superficie de la Tierra a la altura h según una órbita circular, como es fácil de calcular la velocidad será menor. A la altura de $h = 250$ km, tenemos que $v = 7{,}76$ km/s y a la de $h = 2000$ km, $v = 6{,}9$ km/s.

§ 24. Fuerzas de Coriolis. Demostremos que, en un sistema que gira, sobre un cuerpo que *se desplaza* respecto a este sistema, actúa, además de la fuerza centrífuga, otra fuerza complementaria. Esta fuerza se denomina *fuerza de Coriolis* (en honor del matemático francés Coriolis, 1795-1843), depende de la velocidad $\mathbf{v}'$ del cuerpo respecto al sistema en rotación y de la velocidad angular del sistema ω.

Veamos primeramente un caso particular. Sea el sistema un disco que gira a una velocidad angular ω constante alrededor de un eje vertical O (fig. 48) en la dirección que indica la flecha. Supongamos que el cuerpo a se desplaza con movimiento uniforme partiendo del punto A según el radio OC a la velocidad v' respecto al disco. En el tiempo Δt, el cuerpo a recorre el espacio $\Delta l = AB = v'\Delta t$. En este tiempo Δt, *en el sistema fijo de*

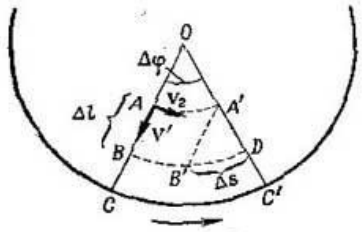


Fig. 48. Movimiento de un cuerpo según el radio de un disco que gira.

coordenadas, gracias a la rotación del disco, el radio OC gira en un ángulo $\Delta\varphi = \omega\Delta t$, y el cuerpo se traslada de A a D. *En el sistema fijo de coordenadas*, el cuerpo a participa al mismo tiempo en dos movimientos: uno, respecto al disco a la velocidad v', y otro, junto con el disco que gira. La velocidad lineal de rotación del disco es diferente para los distintos puntos del mismo. Llamemos v_r a su valor para el punto A. Moviéndose solamente a la velocidad de giro v_r, el cuerpo a describiría el arco $\overset{\frown}{AA'}$ y vendría a parar al punto A'. Al moverse al mismo tiempo a la velocidad v_r y a la velocidad relativa v', el cuerpo a debería venir a parar al punto B' (el segmento $A'B' \parallel AB$). En realidad, el cuerpo a viene a parar al punto D. Esto ocurre debido a que la velocidad lineal de rotación v_r aumenta a medida que se aleja el punto a del centro de rotación. De esta manera tenemos que, respecto *al sistema fijo de coordenadas*, el cuerpo a varía constantemente su velocidad al desplazarse según el radio: se desplaza con movimiento *acelerado*. La magnitud de esta aceleración w puede determinarse por trayecto complementario $\overset{\frown}{\Delta s} = \overset{\frown}{B'D}$ que el cuerpo a ha recorrido en el tiempo Δt. En la fig. 48 vemos que:

$$\Delta s = A'B'\Delta\varphi,$$

o, como $A'B' = \Delta l = v'\Delta t$ y $\Delta\varphi = \omega\Delta t$,

$$\Delta s = \omega v' (\Delta t)^2. \qquad (1)$$

Por consiguiente, el trayecto complementario Δs aumenta proporcionalmente al cuadrado del tiempo Δt. Pero esta proporcionalidad del trayecto al cuadrado del tiempo Δt tiene lugar en el movimiento

con aceleración constante w (movimiento uniformemente acelerado), en el cual

$$\Delta s = \frac{1}{2} w (\Delta t)^2.$$

Comparando esta ecuación de Δs con la (1), vemos que el cuerpo a tiene una aceleración

$$w = 2v'\omega. \qquad (2)$$

Esta aceleración va dirigida perpendicularmente a la velocidad relativa v', y, en nuestro caso, hacia la derecha. Para comunicarle

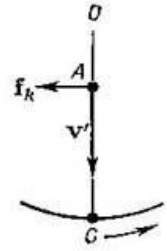


Fig. 49. Dirección de la fuerza de Coriolis en el movimiento de un cuerpo según el radio de un disco que gira.

al cuerpo a esta aceleración es necesario aplicarle una fuerza f dirigida hacia la derecha e igual a $f = mw$, donde m es la masa del cuerpo. Si no existiese esta fuerza f, el cuerpo se desviaría, en el sistema de coordenadas que *gira junto con el disco*, de su movimiento «rectilíneo» según el radio del disco.

La fuerza f_k de magnitud igual a la f, pero de sentido opuesto, según la tercera ley de Newton, actuará sobre los enlaces o ligaduras que mantienen al cuerpo a en su movimiento según el radio. De manera completamente análoga a los casos examinados antes de los sistemas acelerados, consideraremos, usando el sistema de coordenadas que gira junto con el disco, que la fuerza f_k está aplicada al mismo cuerpo a. Así tenemos que, *al cuerpo que se mueve según el radio a la velocidad* v' *en un sistema que gira, se le aplica una fuerza «de inercia»*

$$f_k = 2v'\omega m, \qquad (3)$$

de dirección perpendicular a v' (en nuestro ejemplo hacia la izquierda, véase la fig. 49).

La fuerza f_k se denomina *fuerza de Coriolis.*

Demostremos ahora que la fuerza de Coriolis existe también cuando el cuerpo a se desplaza por el disco según una circunferencia de centro en el eje de rotación (fig. 50). Al desplazarse el cuerpo a respecto al disco a la velocidad v', la velocidad total *en el sistema fijo de coordenadas* es igual a $v_r + v'$, donde v_r es la velocidad lineal de rotación del disco en el lugar donde se encuentra el cuerpo a.

Por consiguiente, sobre el cuerpo a actúa una fuerza centrípeta

$$f_c = \frac{m(v_r + v')^2}{R},$$

donde R es la distancia del cuerpo al eje de rotación. Desarrollando el cuadrado, obtenemos

$$f_c = \frac{mv_r^2}{R} + \frac{mv'^2}{R} + 2\frac{v' \cdot v_r}{R} m.$$

En el sistema de coordenadas *relacionado con el disco*, el miembro $\frac{mv_r^2}{R}$ determina la fuerza centrífiga de inercia originada por la rotación del disco a la velocidad angular ω; el miembro $\frac{mv'^2}{R}$ determina la fuerza centrífuga originada por el movimiento relativo del cuerpo según la circunferencia de radio R a la velocidad v'; el miembro

$$f = 2\frac{v' \cdot v_r}{R} m = 2v'\omega m$$

determina la fuerza complementaria originada por la existencia simultánea de la rotación del disco y del movimiento del cuerpo respecto al mismo.

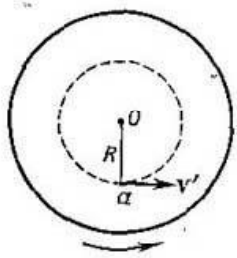


Fig. 50. Movimiento de un cuerpo según una circunferencia concéntrica sobre un disco que gira.

La fuerza f_k, igual a la f, pero de sentido opuesto, nos da para esto caso la fuerza de Coriolis.

Esta fuerza, por su magnitud, coincide con la fuerza que surge en el movimiento según el radio [fórmula (3)], y va dirigida también perpendicularmente a la velocidad relativa.

Ahora examinemos el caso cuando el cuerpo a se desplaza a la velocidad relativa v' cuya dirección con el radio OC forma un ángulo β (fig. 51).

En este caso la velocidad v' se puede descomponer en dos: una componente según el radio $v'_1 = v' \cos \beta$, y la otra perpendicular al mismo $v'_2 = v' \operatorname{sen} \beta$.

A la componente v'_1, según la fórmula (3), le corresponde la fuerza *de Coriolis* $f_{k1} = 2v'\omega \cos \beta \cdot m$; a la componente v_2, la fuerza $f_{k2} = 2v'\omega \operatorname{sen} \beta \cdot m$; la fuerza total de Coriolis será:

$$f_k = \sqrt{f_{k1}^2 + f_{k2}^2} = 2v'\omega m.$$

Así vemos que para cualquier dirección de la velocidad relativa obtenemos la misma ecuación (3) para la fuerza de Coriolis.

Por fin, examinemos el caso más general cuando el cuerpo se desplaza según una dirección que forma un ángulo con el eje de rotación (fig. 52). Descompongamos la velocidad v' en dos: una perpendicular al eje de rotación v'_1, y otra paralela al mismo v'_2. Esta última componente no estipula ninguna variación de la distancia del eje y, por consiguiente, no puede originar ninguna clase de aceleraciones o fuerzas complementarias.

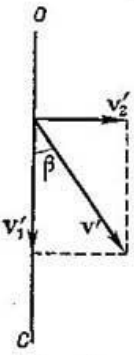


Fig. 51. Descomposición de la velocidad relativa en sus componentes v'_1, según el radio, y v'_2, perpendicular al radio.

Por lo tanto, la magnitud de la fuerza de Coriolis la determina sólo la componente $v'_1 = v' \operatorname{sen} \alpha$. Sustituyendo en la fórmula (3) v' por $v'_1 = v' \operatorname{sen} \alpha$, obtenemos la ecuación general para la fuerza de Coriolis.

$$f_k = 2v'\omega \operatorname{sen} \alpha \cdot m. \qquad (4)$$

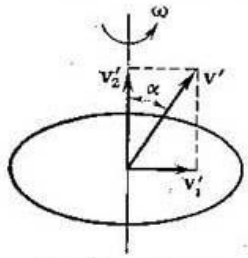


Fig. 52. Descomposición de la velocidad relativa en sus componentes v'_1, perpendicular al eje de rotación, y v'_2, según el eje de rotación.

En todos los casos, la fuerza de Coriolis va dirigida perpendicularmente a la velocidad relativa v' y al eje de rotación. Para determinar el sentido de la

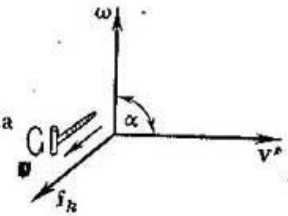


Fig. 53. Determinación de la dirección y sentido de la fuerza de Coriolis f_k.

fuerza $\mathbf{f}_k$ introducimos en el examen el vector de la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ (véase el § 13). Entonces, la fuerza *de Coriolis* $\mathbf{f}_k$ será perpendicular al plano que contiene los vectores $\boldsymbol{\omega}$ y $\mathbf{v}'$ (fig. 53), y de manera que, si hacemos coincidir la dirección de rotación de la manilla del sacacorchos con la que va desde el vector $\mathbf{v}'$ hacia el vector $\boldsymbol{\omega}$ (según el ángulo menor), la dirección de la fuerza $\mathbf{f}_k$ la determinará la de traslación del sacacorchos.

Utilizando las notaciones del análisis vectorial, $\mathbf{f}_k$ se determina por el producto vectorial de $\mathbf{v}'$ y $\boldsymbol{\omega}$ (véase el § 13):

$$\mathbf{f}_k = 2\,[\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\omega}]m. \qquad (4a)$$

La fuerza de Coriolis se revela en los movimientos sobre la superficie de la esfera terrestre que tiene una velocidad angular determinada, debido a la rotación de la Tierra. Supongamos, por ejemplo, que un tren, en el hemisferio septentrional va hacia el norte según la dirección de un meridiano (punto *a* en la fig. 54). En este aso, el vector de la velocidad relativa v′ orma un ángulo agudo α con el vector de la velocidad angular ω, y *la fuerza de Coriolis* f_k va dirigida según la tangente a la superficie terrestre hacia la derecha, si la

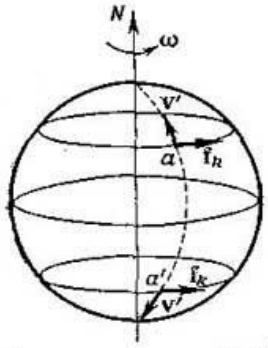


Fig. 54. Dirección y sentido de las fuerzas de Coriolis que actúan sobre un cuerpo que se desplaza por la superficie de la Tierra.

observamos poniéndonos de cara al sentido del movimiento del tren. El tren ejerce sobre el carril de la derecha más presión que sobre el de la izquierda. En el hemisferio austral, moviéndose el tren hacia el sur (punto *a* en la fig. 54), v′ forma con ω un ángulo obtuso, y la fuerza de Coriolis va hacia la izquierda respecto de la marcha del tren. Con la fuerza de Corolis se explica la socavación de la orilla derecha de los ríos en el hemisferio septentrional, y la de la izquierda, en el austral (ley de Baer), la causa de los vientos alisios del noreste en el hemisferio septentrional, etc.

Otros ejemplos de la influencia de la fuerza de Coriolis en el movimiento de los cuerpos en la superficie de la esfera terrestre son: la desviación hacia oriente de la vertical de los cuerpos que caen libremente y la desvición del plano de oscilación del péndulo. Examinemos este último caso más detalladamente. Supongamos, para simplificar, que el péndulo oscila en el polo norte. Entonces, la velocidad v′ de la pesa del péndulo todo el tiempo es perpendicular al eje de la esfera terrestre (siendo el hilo bastante largo) y, por consiguiente, v′ es perpendicular a ω, donde ω, como antes, es el vector de la velocidad angular de rotación de la Tierra. Como resultado de ello, en la pesa del péndulo actúa una fuerza de Coriolis de valor $f_k = 2mv'\omega$, situada en el plano horizontal y dirigida hacia la derecha respecto al vector v′. Solicitada por esta fuerza, la pesa del péndulo, a cada oscilación se inclina hacia la derecha. Por consiguiente, el plano de oscilación del péndulo gira respecto a la Tierra según las agujas del reloj y efectúa un ángulo de 2π al día. Si el péndulo está situado en la latitud φ, su plano de oscilación gira diariamente un ángulo de 2π sen φ.

El primero que llevó a cabo la observación de la desviación del plano de oscilación del péndulo fue Foucault en 1851 y esto fue la demostración directa de la rotación de la Tierra.

CAPITULO III

Trabajo y energía

§ 25. Trabajo y potencia. En el ambiente que nos rodea, los cuerpos actúan unos sobre otros mediante diversas fuerzas (fuerzas elásticas, de gravitación, de rozamiento, etc.). El desplazamiento de los cuerpos se realiza bajo la acción de estas fuerzas. De aquí naturalmente, surge la necesidad de caracterizar la acción de las fuerzas que está relacionada con dichos desplazamientos. En mecánica, con este objeto se toma una magnitud que será tanto mayor

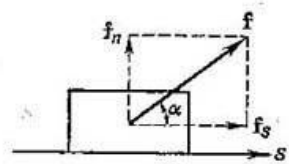


Fig. 55. El trabajo lo realiza solamente la componente f_s según la dirección del desplazamiento s.

cuanto mayor sea la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento y cuanto mayor sea el espacio recorrido por el punto de aplicación de la fuerza. Esta magnitud se denomina trabajo. Su esencia física se podrá ver claramente después de establecer la relación entre el trabajo realizado y la variación de la energía. Entonces se aclarará que el trabajo es una variación de la energía (§ 28).

En el caso elemental del movimiento rectilíneo y de una fuerza constante dirigida según el desplazamiento, el trabajo es proporcional al producto de la fuerza f por el desplazamiento s del punto de su aplicación:

$$A = kfs, \tag{1}$$

donde k es un coeficiente de proporcionalidad.

En el caso de que la fuerza aplicada al cuerpo forme un ángulo α con la dirección del desplazamiento (fig. 55), descomponemos la fuerza $\mathbf{f}$ en dos: una, $\mathbf{f}_s$, según la dirección del desplazamiento, y la otra, $\mathbf{f}_n$, perpendicular al mismo.

Según lo dicho, el trabajo lo ejecuta sólo la componente f_s, de donde

$$A = kf_s s,$$

o, como $f_s = f \cos \alpha$,

$$A = kfs \cos \alpha. \qquad (1a)$$

Suponiendo el coeficiente de proporcionalidad $k = 1$, obtenemos:

$$A = fs \cos \alpha. \qquad (2)$$

De esta manera tenemos que, en el caso de una dirección cualquiera de la fuerza, *el trabajo es igual al producto de la fuerza f por el desplazamiento s de su punto de aplicación y por el coseno del ángulo α entre la dirección de la fuerza y la del desplazamiento.*

El trabajo se caracteriza solamente por su valor numérico, por lo tanto es una magnitud escalar.

En el análisis vectorial, la magnitud escalar C, igual al producto de las magnitudes de los vectores B y D y el coseno del ángulo formado por ellos, se denomina producto escalar, geométrico o interno:

$$C = B \cdot D \cos \alpha.$$

De la ecuación (2) se deduce que el trabajo es un producto escalar del vector fuerza f por el de desplazamiento s.

Cuando el ángulo $\alpha < 90°$, el $\cos \alpha > 0$, y el trabajo será positivo; en este caso, la componente f_s de la fuerza tiene el mismo sentido que el desplazamiento. Si el ángulo $\alpha > 90°$, el $\cos \alpha < 0$, y el trabajo es negativo; en este caso la componente f_s de la fuerza tiene sentido opuesto al desplazamiento. Aclaremos lo dicho con ejemplos: 1) al cuerpo que descansa en una superficie rugosa, se le aplica una fuerza f que lo desplaza por esta superficie; la fuerza f va dirigida en el sentido del desplazamiento y realiza un trabajo positivo. Al mismo tiempo, al cuerpo va aplicada la fuerza de rozamiento f_r y dirigida en sentido contrario al desplazamiento del cuerpo; el trabajo realizado por esta fuerza es negativo; 2) un cuerpo sólido se ha lanzado hacia arriba, la fuerza de la gravedad va dirigida hacia abajo, es decir, en sentido contrario al del movimiento; el trabajo de la gravedad es negativo; 3) un cuerpo sólido cae; en este caso la gravedad tiene el mismo sentido que el movimiento del cuerpo, por lo tanto, el trabajo de la fuerza de la gravedad es positivo; 4) un cuerpo, solicitado por una fuerza centrípeta se desplaza uniformemente por una circunferencia; en este caso la fuerza en cada instante es perpendicular a la dirección del movimiento ($\alpha = 90°$), y el trabajo, según la fórmula (2), es igual a cero.

Veamos ahora el caso cuando la fuerza no es constante y el movimiento es curvilíneo. Tomemos un arco elemental $\overset{\smile}{\Delta s}$ tan pequeño que se pueda considerar que coincide con su cuerda Δs. Sea f_s la componente de la fuerza f según la tangente al arco $\overset{\smile}{\Delta s}$. Entonces, valor de f_s en el trayecto Δs se puede considerar constante, y el

trabajo elemental ΔA, realizado en este trayecto, será

$$\Delta A = f_s \cdot \Delta s.$$

Todo el trabajo A realizado en el trayecto finito s, lo obtenemos dividiendo el trayecto s en elementos infinitamente pequeños Δs, determinando los trabajos elementales ΔA y sumándolos:

$$A = \sum f_s \Delta s. \qquad (4)$$

El trabajo total A se puede representar gráficamente. Tomemos como abscisas los desplazamientos s (fig. 56), y como ordenadas los

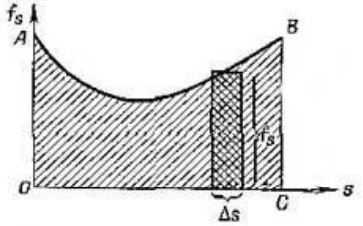


Fig. 56. Gráficamente el trabajo viene determinado por el área de la figura $OABC$.

correspondientes valores de la componente f_s de la fuerza. Supongamos que la curva AB representa los valores de estos componentes f_s para los distintos puntos del trayecto de un caso particular. Dividamos toda la longitud del trayecto, representada por el segmento OC, en segmentos elementales Δs. El trabajo elemental ΔA realizado en uno de estos segmentos Δs es igual a $f_s \Delta s$, es decir, se representa por la columna rayada en cruz. Todo el trabajo en el trayecto s será igual a la suma de los trabajos elementales ΔA, es decir, gráficamente se representa por toda la superficie rayada de la figura, $OABC$.

Determinemos el trabajo realizado cuando el cuerpo está solicitado al mismo tiempo por varias fuerzas $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$, etc. (fig. 57). El trabajo elemental ΔA de la resultante será

$$\Delta A = f \cos \alpha \ \Delta s,$$

donde $\mathbf{f}$ es la resultante de las fuerzas $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ y α es el ángulo que esta resultante forma con la dirección del desplazamiento Δs. La magnitud $f \cos \alpha$ es la

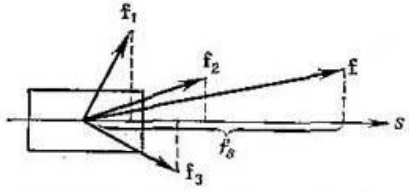


Fig. 57. El trabajo de la fuerza resultante $\mathbf{f}$ es igual a la suma de los trabajos de las fuerzas componentes $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$.

proyección f_s de la fuerza $\mathbf{f}$ en la dirección $\mathbf{s}$. Pero nosotros hemos visto (§ 20) que la proyección del vector resultante en una dirección es igual a la suma de las proyecciones de sus componentes en la misma dirección, de donde

$$f_s = f_{1s} + f_{2s} + f_{3s}$$

y por consiguiente,

$$\Delta A = f_s \Delta s = f_{1s}\Delta s + f_{2s}\Delta s + f_{3s}\Delta s,$$

es decir, el trabajo de la resultante es igual a la suma algebraica de los trabajos de las componentes.

Utilizando este lema, podemos transformar la ecuación del trabajo de la siguiente manera: descomponemos la fuerza f, que actúa en cierta dirección, en sus componentes según los ejes coordenados, f_x, f_y, f_z, y entonces, según lo demostrado:

$$\Delta A = f_x \cos \alpha_1 \Delta s + f_y \cos \alpha_2 \Delta s + f_z \cos \alpha_3 \Delta s,$$

donde α_1, α_2, y α_3 son los ángulos correspondientes formados por las componentes de las fuerzas f_x, f_y y f_z, con la dirección del desplazamiento Δ s. Las componentes f_x, f_y y f_z coinciden en dirección con los ejes de coordenadas X, Y, Z, de donde $\Delta s \cos \alpha_1 = \Delta x$, $\Delta s \cos \alpha_2 = \Delta y$ y $\Delta s \cos \alpha_3 = \Delta z$, donde Δx, Δy y Δz son las proyecciones del desplazamiento Δs sobre los ejes de coordenadas. Por lo tanto:

$$\Delta A = f_x \Delta x + f_y \Delta y + f_z \Delta z. \qquad (5)$$

Para una fuerza variable, se debe tomar un desplazamiento infinitamente pequeño ds con sus componentes dx, dy y dz; entonces tendremos:

$$dA = f_x dx + f_y dy + f_z dz. \qquad (5a)$$

Todo el trabajo en un desplazamiento finito s se expresará por la suma de los trabajos elementales dA, es decir, con una integral curvilínea:

$$A = \int_{B_1}^{B_2} (f_x dx + f_y dy + f_z dz), \qquad (6)$$

donde B_1 y B_2 son, respectivamente, los puntos inicial y final del trayecto s.

En la práctica, frecuentemente es muy importante saber, además del trabajo realizado por las fuerzas, el tiempo en que se ejecuta. Está claro que, de dos mecanismos que hagan un mismo trabajo, se considerará mejor el que lo realice en menos tiempo. Por eso, junto al trabajo se introduce una nueva magnitud denominada *potencia*. Se denomina *potencia W la magnitud física directamente proporcional al trabajo* ΔA *e inversamente proporcional al intervalo de tiempo* Δt *en que se ha efectuado este trabajo*:

$$W = k \frac{\Delta A}{\Delta t}, \qquad (7)$$

donde k es un coeficiente de proporcionalidad. Suponiendo $k = 1$, tenemos:

$$W = \frac{\Delta A}{\Delta t} \qquad (7a)$$

Si la fuerza varía con el tiempo, la potencia también varía; en este caso conviene hablar *de la potencia instantánea*, entendiendo por tal el límite a que tiende la relación $\Delta A/\Delta t$ al disminuir infi-

nitamente el intervalo de tiempo Δt:

$$W = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta A}{\Delta t} \right). \tag{8}$$

Según las notaciones del cálculo diferencial, tendremos:

$$W = \frac{dA}{dt}. \tag{8a}$$

es decir, la potencia es igual a la derivada del trabajo respecto al tiempo.

Como el trabajo elemental $\Delta A = f_s \Delta s$, tendremos, según (8)

$$W = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{f_s \cdot \Delta s}{\Delta t} \right) = f_s \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta s}{\Delta t} \right), \text{ pero el } \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = v,$$

donde v es la magnitud de la velocidad instantánea. De donde:

$$W = f_s \cdot v, \tag{9}$$

es decir, la potencia instantánea es proporcional al producto de la proyección de la fuerza sobre la dirección del movimiento por la velocidad.

Debido a la importancia práctica de las magnitudes del trabajo y de la potencia, históricamente ha surgido una gran cantidad de unidades para medirlas. Citémoslas.

1) *Unidad de trabajo en el sistema CGS.* Utilizando la ecuación (2) en la cual suponemos $\alpha = 0$, obtenemos que por *unidad de trabajo en el sistema CGS se toma el realizado por una fuerza de una dina cuando su punto de aplicación se desplaza 1 cm en la dirección de la fuerza.* Esta unidad de trabajo se denomina *ergio.*

Además se usa una unidad mayor de trabajo, el *julio*:

$$1 \text{ julio} = 10^7 \text{ ergios.}$$

2) *En el sistema MKS, por unidad de trabajo se toma el realizado por la fuerza de 1 newton en el trayecto de 1 m.* Como 1 N $= 10^5$ dinas, y 1 m $= 10^2$ cm, esta unidad de trabajo es igual a 10^7 ergios, es decir, 1 julio.

3) *En el sistema práctico de unidades, por unidad de trabajo se toma el realizado por la fuerza de 1 kgf en el trayecto de 1 m.* Esta unidad de trabajo se denomina *kilográmetro* (abreviadamente kgm).

Como 1 kgf = 981 000 dinas, y 1 m = 100 cm, tenemos que 1 kgm = 981 000 · 100 ergios = $9{,}81 \cdot 10^7$ ergios = 9,81 julios;

$$1 \text{ julio} = \frac{1}{9{,}81} \text{ kgm} = 0{,}102 \text{ kgm.}$$

4) *Unidad de potencia en el sistema CGS.* En el sistema *CGS*, por unidad de potencia se toma *la de un mecanismo que realiza el trabajo de 1 ergio en 1 s.* Esta unidad se denomina *ergio/s.*

Además de la unidad de potencia ergio/s, se emplea otra mayor denominada *vatio*:

$$1 \text{ vatio} = 10^7 \text{ ergios/s} = 1 \text{ julio/s}.$$

Así tenemos que un mecanismo que realice un trabajo de 1 J en 1 s, tiene una potencia de 1 W.

100 vatios es 1 hectovatio (hW),

1000 vatios es 1 kilovatio (kW).

5) En el sistema *MKS*, por unidad de potencia se toma *la de un mecanismo que realiza el trabajo de 1 julio en 1 s*, es decir, 1 *vatio*.

6) *En el sistema técnico, por unidad de potencia se toma la de un mecanismo que realice el trabajo de 1 kgm en 1 s.* Esta unidad de potencia se designa abreviadamente por kgm/s.

Está claro que:

$$1 \text{ kgm/s} = 9{,}81 \text{ vatios},$$

$$1 \text{ vatio} = \frac{1}{9{,}81} \text{ kgm/s} = 0{,}102 \text{ kgm/s}.$$

Además, históricamente se creó la unidad de potencia denominada «*caballo de vapor*»*), igual a 75 kgm/s. Así tenemos:

$$1 \text{ CV} = 75 \text{ kgm/s} = 736 \text{ vatios} = 0{,}736 \text{ kilovatios}.$$

7) En la práctica actual, frecuentemente se emplean, además, las dos siguientes unidades *de trabajo*:

a) la unidad igual al trabajo realizado durante 1 hora por un mecanismo de potencia constante igual a 1 hectovatio. Esta unidad de trabajo se denomina *hectovatio-hora*:

$$1 \text{ hectovatio-hora} = 100 \text{ vatios} \cdot 3600 \text{ s} = 3{,}9 \cdot 10^5 \text{ julios};$$

b) la unidad igual al trabajo realizado durante 1 hora por un mecanismo de potencia constante igual a 1 kilovatio. Esta unidad de trabajo se denomina *kilovatio-hora*:

$$1 \text{ kilovatio-hora} = 1000 \text{ vatios} \cdot 3600 \text{ s} = 3{,}6 \cdot 10^6 \text{ julios}.$$

Veamos unos cuantos ejemplos de determinación del trabajo de la potencia.

E j e m p l o 1. Un tren de tracción eléctrica de 500 tf de peso recorre con movimiento uniforme un trayecto de 3 km cuesta arriba con una inclinación de 4 m por 1 km. El coeficiente de rozamiento es $\varkappa = 0{,}002$.

Determinar: a) el trabajo realizado por el tren; b) la potencia desarrollada por el mismo sabiendo que el trayecto de 3 km ha sido recorrido en 5 min.

*) Como término medio, trabajando largo tiempo, un caballo produce, efectivamente, una potencia de unos 75 kgm/s; sin embargo, en un pequeño intervalo de tiempo, un caballo puede desarrollar una potencia de varios «caballos de vapor».

Solución. El trabajo se realiza en sentido contrario al de la fuerza de rozamiento:

$$P_r = \varkappa P_1,$$

donde P_1 es la presión que ejerce el tren sobre la vía (fig. 58), y contra la componente de la fuerza de la gravedad P_2, paralela a la vía. Así tenemos que el trabajo buscado A es

$$A = (\varkappa P_1 + P_2) \cdot s. \tag{10}$$

De la fig. 58 tenemos que

$$P_1 = P \cos \alpha; \quad P_2 = P \operatorname{sen} \alpha,$$

donde P es el peso del tren y α el ángulo de inclinación de la vía respecto al horizonte.

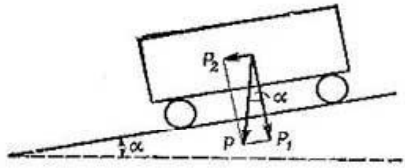


Fig. 58. El trabajo se realiza en sentido contrario al de las fuerzas de rozamiento y de la componente P_2, que tira del tren hacia atrás.

Colocando estos valores de P_1 y P_2 en la (10), tenemos

$$A = P (\varkappa \cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha) s. \tag{11}$$

Las magnitudes sen α y cos α se determinan de la condición de que la pendiente es de 4 m por km de vía, de donde

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{4}{1000} = 0{,}004 \text{ y } \cos \alpha = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha} = \sqrt{1 - 0{,}004^2} = 0{,}99992,$$

es decir, aproximadamente la unidad. Después, según la ecuación (11), tenemos que:

$$A = 5 \cdot 10^5 (0{,}002 + 0{,}004) \cdot 3{,}000 \text{ kgm},$$

de donde

$$A = 9 \cdot 10^6 \text{ kgm} = 8{,}83 \cdot 10^7 \text{ J} = 8{,}83 \cdot 10^4 \text{ kJ}.$$

La potencia buscada será

$$W = \frac{A}{t} = \frac{8{,}83 \cdot 10^4}{300} \text{ kW} = 2{,}94 \cdot 10^2 \text{ kW}$$

o

$$W = \frac{2{,}94 \cdot 10^2}{0{,}736} \text{ CV} = 399 \text{ CV}.$$

Ejemplo 2. Determinar el trabajo realizado al comprimir un resorte reduciendo su longitud en 10 cm, si se sabe que la fuerza es proporcional a la compresión del resorte y que para reducirlo en 1 cm es necesario aplicar una fuerza de 2 kgf.

Solución. Esto es un caso de trabajo de una fuerza variable; la fuerza aumenta proporcionalmente a la compresión del resorte. Llamando s a esta reducción de longitud tenemos que la fuerza es

$$f = ks, \tag{12}$$

donde k es un coeficiente que se determina por el grado de rigidez del resorte.

Gráficamente, la dependencia de la fuerza f respecto a la reducción de longitud s se representa por la recta OA que pasa por el origen de coordenadas (fig. 59).

Si el resorte se ha comprimido en la magnitud s, esta magnitud representará el trayecto en que la fuerza variable que estudiamos, ha realizado el tra-

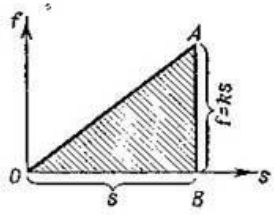


Fig. 59. El trabajo de las fuerzas elásticas de un resorte extendido o comprimido es igual al área del triángulo OAB.

bajo. Según lo dicho en la pág. 91, el trabajo viene representado por la superficie rayada de la figura. Como esta figura es un triángulo, su superficie será igual a $\frac{AB \cdot OB}{2}$, pero $OB = s$ y $AB = ks$, de donde el trabajo buscado será

$$A = \frac{ks \cdot s}{2} = \frac{ks^2}{2}. \qquad (13)$$

El valor k lo determinamos, según la (12) de la condición de que $f = 2$ kgf siendo $s = 1$ cm; sin embargo, prefiriendo utilizar el sistema técnico, tomaremos s en m, entonces $s = 0{,}01$ m y

$$k = \frac{f}{s} = \frac{2}{0{,}01} \text{ kgf/m} = 200 \text{ kgf/m}.$$

Colocando este valor de k en la (13) obtenemos

$$A = \frac{200 \cdot (0{,}1)^2}{2} \text{ kgm} = 1 \text{ kgm}.$$

§ 26. Energía cinética de un sistema mecánico. El cuerpo considerado como un punto material, que se desplaza solicitado por una fuerza, varía la velocidad. El trabajo de la fuerza aplicada está relacionado con la variación de la velocidad del cuerpo. Esta relación se expresa mediante la magnitud física denominada *energía cinética* del punto material.

Para determinar la energía cinética de un punto material calculemos primero el trabajo que hay que realizar para variar la velocidad del punto material de masa m desde el valor v_1 hasta el valor v_2. Para ello apliquemos al punto material una fuerza constante f paralela al vector velocidad $\mathbf{v}_1$, fuerza que, en cierto intervalo de tiempo t, varía la velocidad desde el valor v_1 hasta el v_2. En este intervalo de tiempo t, el punto material recorre un trayecto s, y la fuerza f realiza el trabajo

$$A = fs. \qquad (1)$$

Debido a la constancia de la fuerza, el movimiento será uniformemente acelerado, y su aceleración

$$w = \frac{v_2 - v_1}{t},$$

por consiguiente, la fuerza será

$$f = mw = m\frac{v_2 - v_1}{t}. \qquad (2)$$

El trayecto recorrido por el punto material en el tiempo t lo determinamos en función de la velocidad media $\overline{v} = \frac{v_2 + v_1}{2}$, de donde obtenemos

$$s = \frac{v_2 + v_1}{2} t.$$

Colocando los valores hallados de la fuerza f y del trayecto s, según la (2) y la (3), en la fórmula (1), tenemos que

$$A = m\frac{v_2 - v_1}{t} \cdot \frac{v_2 + v_1}{2} t = m\frac{(v_2 - v_1)(v_2 + v_1)}{2},$$

de donde

$$A = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}. \qquad (4)$$

Así tenemos que *el trabajo de la fuerza f es igual al incremento de la magnitud* $\frac{mv^2}{2}$, *que se denomina energía cinética.* Designemos la energía cinética por E_c:

$$E_c = \frac{mv^2}{2}. \qquad (5)$$

Entonces, la ecuación (4) se puede escribir así:

$$A = E_{c2} - E_{c1} = \Delta E_c. \qquad (6)$$

De la ecuación (4) se deduce que, para que el cuerpo que se desplaza a la velocidad v se pare ($v_1 = v$, $v_2 = 0$), la fuerza que se le aplica debe realizar un trabajo negativo igual a la energía cinética del cuerpo $E_c = mv^2/2$; y viceversa, para comunicar a un cuerpo de masa m una velocidad v, la fuerza aplicada deberá realizar un trabajo positivo igual a $mv^2/2$.

Si en la expresión $mv^2/2$, todas las magnitudes están expresadas en unidades del sistema *CGS*, es decir, m en gramos, v en cm/s, la energía se expresará en ergios. En el sistema técnico v se expresa en m/s y m en unidades técnicas de masa (iguales a 9,81 kg), la energía resultará en kgm. En la práctica frecuentemente se emplean sistemas mixtos: la velocidad v se expresa en m/s, la masa m en kg, y la energía E_c se quiere obtener en kgm. Entonces, en la fórmu-

la (5) se debe introducir un coeficiente de proporcionalidad k, que en nuestro caso será igual a $\frac{1}{9{,}81}$, así tenemos:

$$E_c\,(\text{kgm}) = \frac{m\,(\text{kg})\,[v\,(\text{m/s})]^2}{9{,}81 \cdot 2}.$$

La ecuación (4) también se puede obtener fácilmente para el caso cuando la fuerza es variable y el movimiento curvilíneo. Supongamos que en un pequeño intervalo de tiempo cualquiera Δt el cuerpo recorre un trayecto elemental Δs (fig. 60). El trabajo ΔA realizado en este trayecto será

$$\Delta A = f \cos \alpha \cdot \Delta s, \tag{7}$$

donde α es el ángulo que forma la fuerza f con la dirección del desplazamiento Δs.

Según la segunda ley de Newton, $\mathbf{f} = m \cdot \mathbf{w}$, donde w es la aceleración ori-

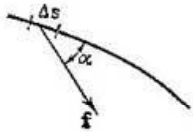


Fig. 60. Trayecto elemental Δs reccorrido en el movimiento curvilíneo.

ginada por la fuerza que estudiamos; la dirección del vector w coincide con la de la fuerza f. De aquí que la ecuación (7) la podemos escribir así:

$$\Delta A = mw \cos \alpha \cdot \Delta s. \tag{8}$$

La magnitud $w \cos \alpha$ es la proyección del vector aceleración sobre el desplazamiento elemental Δs, que coincide, en dirección, con la tangente a la trayectoria. Así, $w \cos \alpha$ es la componente tangencial de la aceleración, w_t, la cual es igual a $\Delta v/\Delta t$, donde Δv es la variación del valor de v. Colocando este valor de $w \cos \alpha$ en la (8), obtenemos que

$$\Delta A = m \frac{\Delta v}{\Delta t} \Delta s.$$

Por fin, observando que $\Delta s = v \Delta t$, hallamos que

$$\Delta A = mv \Delta v. \tag{9}$$

Para obtener el trabajo total A realizado en un trayecto finito s, hay que sumar los trabajos elementales (9):

$$A = \sum \Delta A = \sum mv \Delta v.$$

Sacando la masa m, como magnitud constante, fuera del signo de la suma, obtenemos

$$A = m \sum v \Delta v. \tag{9a}$$

Para calcular esta suma, supongamos que la variación de la velocidad es infinitamente pequeña, entonces sustituiremos la suma por la integral

$$A = m \int_{v_1}^{v_2} v\, dv,$$

tomada entre los límites de la velocidad correspondiente al comienzo del trayecto v_1 y la correspondiente al final del mismo v_2. Integrando obtenemos

$$m\int_{v_1}^{v_2} v\,dv = m\left[\frac{v^2}{2}\right]_{v_1}^{v_2} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}, \text{ de donde } A = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}.$$

Veamos unos cuantos ejemplos de determinación de la energía cinética.

Ejemplo 1. Un tren de 600 tf de peso sale de la estación y al cabo de 5 min después de la salida tiene una velocidad de 60 km/h, habiendo recorrido 2,5 km. ¿Qué potencia media ha desarrollado la locomotora, si el coeficiente de rozamiento $\varkappa$ es constante e igual a 0,005?

Solución. El trabajo realizado por la locomotora consta del efectuado para vencer la fuerza de rozamiento y del empleado para comunicar al tren la energía cinética correspondiente, de donde

$$A = f_r\, s + \frac{mv^2}{2},$$

donde $f_r = \varkappa P$ es la fuerza de rozamiento, m es la masa del tren y v la velocidad al final del trayecto s.

De aquí que la potencia buscada sea

$$W = \frac{A}{t} = \varkappa P \cdot \frac{s}{t} + \frac{mv^2}{2t},$$

o

$$W = 0{,}005\ 6\cdot 10^5 \cdot \frac{2{,}5\cdot 10^3}{300} + \frac{6\cdot 10^5\cdot (16{,}7)^2}{9{,}81\cdot 2\cdot 300} = 5{,}3\cdot 10^4 \text{ kgm/s},$$

o

$$W = \frac{5{,}3\cdot 10^4}{75}\text{ CV} \cong 700\text{ CV}.$$

Ejemplo 2. Determinar la velocidad adquirida por las bolas después de un choque central perfectamente elástico; las masas de las bolas son m_1 y m_2 y sus velocidades respectivas antes del choque, v_1 y v_2.

Solución. Designemos las velocidades de las bolas después del choque por v_1' y v_2'. El carácter perfectamente elástico del choque significa que la suma de las energías cinéticas de las bolas después del choque debe ser igual a la suma de las energías cinéticas de antes del choque:

$$\frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}. \tag{10}$$

Además, debe cumplirse la ley de la conservación de la cantidad de movimiento (véase el § 20), según da cual:

$$m_1 v_1' + m_2 v_2' = m_1 v_1 + m_2 v_2. \tag{11*}$$

---

* Hay que tener en cuenta que la igualdad (10) tiene carácter escalar; esta ecuación sería justa también en el caso de un choque no central, es decir, cuando las velocidades v_1 y v_2 de las bolas tienen diferentes direcciones. En cambio, la igualdad (11) tiene carácter vectorial; en la forma que se cita en el texto, es justa solamente para el choque central, cuando todas las velocidades, v_1, v_2, v_1' y v_2', van dirigidas según una misma recta.

Resolviendo las dos ecuaciones (10) y (11) respecto a las dos incógnitas v_1' y v_2', hallamos que

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)\, v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \qquad v_2' = \frac{(m_2 - m_1)\, v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}. \tag{12}$$

Ejemplo 3. Determinar la pérdida de energía cinética en el choque central inelástico de dos bolas. Las masas de las bolas son m_1 y m_2 y sus velocidades antes del choque, v_1 y v_2.

Solución. La energía cinética de las bolas antes del choque es:

$$E_{c1} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}.$$

Después del golpe inelástico, ambas bolas se deslizan a la misma velocidad v', que es igual (véase el § 20) a:

$$v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \tag{13}$$

La variación de la energía cinética en el golpe es igual a:

$$\Delta E = E_{c2} - E_{c1} = \frac{(m_1 + m_2)\, v'^2}{2} - \left(\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \right).$$

Sustituyendo en esta ecuación v' por su valor según la (13) hallamos que

$$\Delta E = -\frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2}{2 (m_1 + m_2)} \tag{14}$$

Por lo tanto, en el choque inelástico de las bolas se produce una disminución de la energía cinética. Esta pérdida de energía cinética se ha invertido en realizar el trabajo de deformación inelástica de las bolas durante el choque. Al fin y al cabo, este trabajo se ha transformado en calor elevando la tempera tura de las bolas.

Pasando del estudio de un punto material, al de un sistema de puntos materiales, aplicaremos la ecuación (4) a cada uno de los puntos del sistema:

$$A_i = \frac{m v_{i2}^2}{2} - \frac{m v_{i1}^2}{2} \tag{15}$$

Aquí el subíndice i denota el punto material dado, y A_i expresa el trabajo de las fuerzas aplicadas a este punto.

Energía cinética E_c del sistema se denomina la suma de energías cinéticas de todos los puntos materiales que forman el sistema:

$$E_c = \sum_i \frac{m v_i^2}{2} \tag{16}$$

Sumando los miembros de la igualdad (15) para todos los puntos materiales, tenemos:

$$E_{c2} - E_{c1} = A, \tag{17}$$

donde $A = \sum_i A_i$ es la suma de los trabajos de todas las fuerzas

aplicadas a todos los puntos materiales que forman el sistema. La ecuación (17) expresa una de las leyes fundamentales de la mecánica: *la variación de la energía cinética de un sistema es igual al trabajo de todas las fuerzas aplicadas a los puntos materiales que lo forman.*

§ 27. Energía potencial de un sistema mecánico. Supongamos que el cuerpo considerado como punto material *se desplaza de un lugar a otro* actuando sobre los cuerpos que le rodean y al mismo tiempo siendo solicitado por ellos. Por consiguiente, sobre este

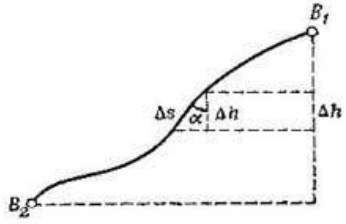


Fig. 61. Determinación del trabajo de la fuerza de la gravedad.

cuerpo actúan ciertas fuerzas. En este caso se dice que el cuerpo se desplaza *en un campo de fuerzas.* El carácter de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo que examinamos puede ser muy variado, por ejemplo, estas fuerzas pueden ser las de la gravedad, de rozamiento, eléctricas, etc.

Veamos el trabajo realizado en el movimiento del punto material por un campo homogéneo de la fuerza de la gravedad. Esta clase de campo (campo gravitatorio) lo tenemos cerca de la superficie de la Tierra, donde la gravedad prácticamente no depende de la altura sobre la superficie de la Tierra (mientras la altura h sea pequeña comparada con el radio de la esfera terrestre R). Supongamos que el punto material se desplaza según cierta curva B_1B_2 (fig. 61). Dividamos esta curva en segmentos elementales tan pequeños, que cada uno de ellos se pueda considerar rectilíneo. Entonces, el trabajo elemental ΔA realizado al desplazarse según el segmento Δs, será $\Delta A = P\Delta s \cos\alpha$, donde P es el peso del cuerpo, y α el ángulo que forma la dirección de la fuerza de la gravedad con la del desplazamiento. De la fig. 61 se ve que $\Delta s \cos\alpha = \Delta h$, donde Δh es la variación de la altura al efectuarse el desplazamiento Δs.

Todo el trabajo de desplazamiento desde el punto B_1 hasta el B_2 será:

$$A = \sum \Delta A = \sum P\Delta h = P \sum \Delta h,$$

pero $\Sigma\Delta h$ es el segmento h que indica la diferencia de altura de los puntos B_1 y B_2; por lo tanto:

$$A = Ph, \qquad (1)$$

es decir, el trabajo de la fuerza de la gravedad en el desplazamiento de un cuerpo según una curva cualquiera es igual al trabajo en el desplazamiento del cuerpo por la vertical, a una distancia h, igual a la diferencia de alturas de los puntos inicial y final del trayecto del cuerpo. *El trabajo en el campo de la fuerza de la gravedad no depende de la forma ni de la longitud del trayecto, sino solamente de la diferencia de altura entre el punto inicial y el final.*

Pero resulta que en la naturaleza existen otras fuerzas, además de las de la gravedad, que poseen también esta propiedad en que el trabajo de las fuerzas en el desplazamiento de un punto material depende solamente de las posiciones inicial y final de los puntos materiales, y no de la forma del trayecto ni de la velocidad con que se mueven. Estas fuerzas se denominan *fuerzas potenciales.* En el movimiento de un punto material en un campo de fuerzas potenciales, se puede introducir el concepto *de energía potencial*, cuya diferencia determina el trabajo de las fuerzas. Sea un punto material que se traslada desde cierto punto (*1*) del espacio a otro punto (*2*), y llamemos $A_{1,2}$ al trabajo que realizan en este desplazamiento las fuerzas que lo solicitan Según lo dicho, para las fuerzas potenciales, este trabajo se caracteriza solamente por las posiciones de los puntos inicial y final del trayecto, es decir, de las posiciones de los puntos (*1*) y (*2*). Esto significa que la posición del punto material en el campo de las fuerzas potenciales se puede caracterizar mediante una magnitud E_p tal, que el trabajo $A_{1,2}$ sea igual a la diferencia de los valores E_{p1} y E_{p2}, que toma E_p en los puntos (*1*) y (*2*):

$$E_{p1} - E_{p2} = A_{1,2} \qquad (2)$$

La magnitud E_p se denomina energía potencial.

La igualdad (2) solamente determina *la diferencia* de las energías potenciales de dos puntos; la propia energía potencial se puede determinar, si convenimos en tomar como valor cero el valor de la energía potencial de un punto cualquiera del espacio.

Como ejemplo, determinemos la energía potencial de un punto material en un campo de fuerzas de la gravedad. Según la ecuación (1), el trabajo de las fuerzas de la gravedad al desplazarse un cuerpo entre dos puntos del espacio B_1 y B_2, de los cuales el segundo se halla a una altura h por debajo del primero, es igual a $A = Ph$, o $A = mgh$, si llamamos m a la masa del cuerpo, y g a la aceleración de la gravedad. Llamemos h_1 a la altura del punto B_1, contando a partir de cierta altura cero, y h_2 a la del punto B_2. Entonces $h = h_1 - h_2$ y

$$A = mgh_1 - mgh_2.$$

Por otro lado, según la fórmula (2), tenemos que:

$$A = E_{p1} - E_{p2}$$

Si convenimos en tomar como cero el valor de la energía potencial del punto a la altura $h_2 = 0$, de la comparación de las dos últimas ecuaciones tenemos:

$$E_{ph} = mgh. \tag{3}$$

Por consiguiente, la energía potencial de un cuerpo de masa m elevado a la altura h, es igual a mgh, si hemos convenido que la energía potencial de un cuerpo que se halla en la superficie de la Tierra es igual a cero. Si el cuerpo cae desde la altura h, la fuerza de la gravedad realiza un trabajo positivo $A = Ph$. La energía potencial, en este caso, disminuye. Al elevar un cuerpo a la altura h, el trabajo de las fuerzas de la gravedad es negativo. En este caso, de la igualdad (2), obtenemos que $E_{p1} - E_{p2} < 0$, es decir, la energía potencial aumenta.

Como segundo ejemplo veamos *la energía potencial de un resorte comprimido*. En el ejemplo 2 del § 25 hemos visto que el trabajo que hay que invertir en reducir la longitud de un resorte elástico en la magnitud s, es $A = \frac{ks^2}{2}$, donde k es el coeficiente de rigidez del resorte. En esta misma magnitud aumenta la energía potencial del resorte. Si la energía potencial de un resorte no comprimido la consideramos igual a cero, la del resorte comprimido reduciendo su longitud en la magnitud s será:

$$E_p = \frac{ks^2}{2}$$

Aquí la energía potencial es proporcional al cuadrado de la reducción del resorte.

Pasemos a examinar los sistemas de puntos materiales. Primeramente supongamos que el sistema está aislado, es decir, que sus puntos actúan solamente unos sobre otros sin ser solicitados por los cuerpos exteriores al sistema. Supongamos que las fuerzas de acción mutua de los puntos materiales dependen de las distancias entre ellos, y convengamos en llamar *configuración* de un sistema la disposición determinada de sus puntos materiales. Cualquier desplazamiento de unos puntos respecto a otros, acarreará una variación de la configuración del sistema. Al pasar el sistema de una configuración cualquiera (*1*) a otra (*2*), las fuerzas que actúan sobre todos sus puntos materiales, efectuarán un trabajo que designaremos por $A_{1,2}$. Si todas las fuerzas tienen carácter potencial, el trabajo $A_{1,2}$ dependerá *solamente de cuáles sean las configuraciones inicial y final del sistema*. En este caso, el trabajo $A_{1,2}$ puede considerarse como la diferencia de energías potenciales del sistema correspondientes a las configuraciones (*1*) y (*2*):

$$A_{1\ 2} = E_{p1} - E_{p2}. \tag{4}$$

Como antes, la ecuación (4) determina solamente la diferencia de energías potenciales. Para determinar la propia energía potencial, hay que considerar igual a cero la energía de una determinada configuración del sistema.

El ejemplo arriba estudiado de energía potencial de un cuerpo en el campo de la fuerza de la gravedad de la Tierra, se puede considerar también como ejemplo de energía potencial de un sistema conjunto formado por la Tierra y el cuerpo pesado que se estudia. En el caso de caer el cuerpo pesado desde la altura h, la configuración inicial será la formada por la Tierra y el cuerpo a la altura h sobre su superficie; y la configuración final, la formada por la Tierra y el cuerpo en su superficie. El trabajo de la fuerza de la gravedad será la diferencia de las energías potenciales de estas dos configuraciones:

$$A_{1,2} = E_{ph} - E_{p0}.$$

Observemos una vez más que la ecuación (4) solamente tiene sentido si el trabajo de las fuerzas no depende de cómo se efectúa el desplazamiento de los puntos materiales al pasar el sistema de una configuración a otra. Esta condición no siempre se cumple. No todas las fuerzas que encontramos en la naturaleza son potenciales. El trabajo de las fuerzas de rozamiento, por ejemplo, depende de la longitud del trayecto recorrido. Por eso, cuando hay fuerzas de rozamiento, no se puede expresar el trabajo como la diferencia de energías potenciales.

§ 28. Leyes (principios) de la conservación y de la variación de la energía mecánica de un sistema. Supongamos que tenemos un sistema aislado de puntos materiales en que actúan solamente fuerzas potenciales. *El estado del sistema vendrá determinado por su configuración y velocidades de los puntos materiales que lo forman.* Al pasar el sistema *de un estado a otro*, las fuerzas aplicadas a sus puntos materiales realizan un trabajo que llamaremos de nuevo $A_{1,2}$, considerando que el subíndice 1 se refiere al estado inicial del sistema (*1*), y el 2, al final (*2*). En cada uno de estos estados, que se diferencian por las velocidades y disposición de sus puntos materiales, el sistema se caracterizará por las correspondientes magnitudes de la energía cinética E_{c1} y E_{c2} y de la energía potencial E_{p1} y E_{p2}. Entonces, el trabajo $A_{1,2}$ puede expresarse de dos maneras: por la diferencia de las energías cinéticas

$$A_{1,2} = E_{c2} - E_{c1}, \tag{1}$$

o por la diferencia de las energías potenciales

$$A_{1,2} = E_{p1} - E_{p2} \tag{2}$$

De estas dos igualdades tenemos

$$E_{c2} + E_{p2} = E_{c1} + E_{p1}. \tag{3}$$

La suma de las energías potencial y cinética de un sistema se denomina *energía mecánica total E del sistema*:

$$E_c + E_p = E, \tag{4}$$

lo cual permite escribir la igualdad (3) de la forma siguiente:

$$E_1 = E_2, \tag{5}$$

es decir, tenemos que *la energía total de un sistema aislado en que actúan solamente fuerzas potenciales permanece constante.* Esta conclusión se denomina ley (principio) de la conservación de la energía mecánica. Es una de las consecuencias más importantes de los principios fundamentales de la mecánica.

Al pasar de un estado a otro, pueden variar las energías cinética y potencial por separado, pero su suma seguirá siendo constante. Si, por ejemplo, ha aumentado la energía cinética en cierta magnitud ΔE_c, en la misma magnitud $\Delta E_p = \Delta E_c$ debe disminuir la energía potencial. No obstante, hay que recordar que la ley de la conservación de la energía mecánica en un sistema aislado, se cumple solamente cuando las fuerzas que actúan en el sistema son potenciales. Si hay fuerzas no potenciales, como, por ejemplo, fuerzas de rozamiento, la suma de energías cinética y potencial no permanecerá constante. La generalización de la ley de la conservación de la energía para un sistema cualquiera se expondrá en el § 68.

Veamos el caso de la caída de un cuerpo, despreciando el rozamiento.

Sea un cuerpo de masa m elevado a la altura h. Su energía potencial será

$$E_p = mgh.$$

A medida que el cuerpo vaya cayendo de la altura h, su energía potencial disminuye; pero el cuerpo adquiere velocidad y, por consiguiente, energía cinética. Al final de la caída, esta energía cinética será

$$E_c = \frac{mv^2}{2}$$

donde $v = \sqrt{2gh}$ es la velocidad con que el cuerpo llega a la Tierra. Colocando este valor de v en la ecuación de la energía cinética, hallamos que

$$E_c = \frac{m \cdot 2gh}{2} = mgh,$$

es decir, al final de la caída, en lugar de la energía potencial, tiene una cantidad de energía cinética igual a la potencial que tenía. La energía ha pasado de una forma a otra, pero la cantidad total sigue sin variar.

Para un sistema mecánico cerrado, la energía total E, igual a la suma de la energía cinética E_c y potencial E_p, se conserva constante:

$$E = E_c + E_p = \text{const.}$$

La disminución de la energía cinética lleva al aumento de la potencial, y viceversa. Como en el caso de la piedra que cae, en el caso general de un sistema mecánico cerrado, los procesos se reducen al paso de la energía cinética a la potencial y viceversa.

Supongamos que, en un sistema mecánico cerrado, primeramente todos los cuerpos están en reposo. Entonces $E_c = 0$ y la energía potencial $E_p = E$, es decir, es la reserva total de energía. Como la energía cinética E_c siempre es positiva, solamente podrá surgir a costa de la disminución de la energía potencial E_p. De esto se deduce que si en el momento inicial la energía potencial E_p tiene *el valor mínimo posible* y los cuerpos que forman el sistema mecánico se encuentran en reposo ($E_c = 0$), posteriormente *no podrán ponerse en movimiento*, ya que, sin la acción de fuerzas exteriores, no puede surgir energía cinética E_c. En otras palabras: *un sistema mecánico cerrado, cuyo valor de energía potencial es mínimo y en el cual no hay movimiento de los cuerpos, se halla en equilibrio.* Como ejemplo puede servir una esfera pesada reposando en el fondo de un hoyo: su energía potencial E_p tiene el valor mínimo, y la esfera se halla en equilibrio; sin la acción de una fuerza exterior, la esfera no podrá salir del hoyo.

Veamos algunos ejemplos particulares.

E j e m p l o 1. Una piedra de 2 kgf de peso que cae de una altura de 5 m penetra 5 cm en el suelo blando. ¿A qué es igual la fuerza media del golpe?

S o l u c i ó n. La piedra elevada a una altura h tenía una reserva de energía potencial $E_p = Ph$, donde P es el peso de la piedra. A costa de esta energía potencial se ha realizado el trabajo de penetración de la piedra en el terreno, de donde

$$\bar{f} \cdot s = Ph,$$

donde $\bar{f}$ es la fuerza media del golpe y s la profundidad de introducción en el suelo. Por lo tanto:

$$\bar{f} = P\frac{h}{s} = 2\ \frac{5}{0{,}05}\ \text{kgf} = 200\ \text{kgf}.$$

E j e m p l o 2. Para medir la velocidad de las balas se utiliza el péndulo balístico, que es un cajón con arena suspendido de una cuerda. La bala, al chocar con el cajón, se introduce en él, pero éste resulta despedido y alcanza cierta altura (fig. 62). Determinar la velocidad de la bala v sabiendo que la masa del proyectil es m_1, la del cajón, m_2 y la altura de elevación del cajón, h.

S o l u c i ó n. Cuando la bala choca con el cajón, empieza a moverse junto con él a la velocidad v' que se determina de la condición de que el choque entre la bala y el cajón es inelástico:

$$v' = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v.$$

La energía cinética del cajón con la bala es

$$E_c = \frac{(m_1 + m_2)\, v'^2}{2}.$$

Sustituyendo en esta ecuación v' por su valor, tenemos

$$E_c = \frac{m_1^2 v^2}{2\,(m_1 + m_2)}.$$

Al desplazarse el cajón y adquirir la altura h, toda esta energía cinética pasa a potencial, de donde

$$\frac{m_1^2 v^2}{2\,(m_1 + m_2)} = (m_1 + m_2)\, gh,$$

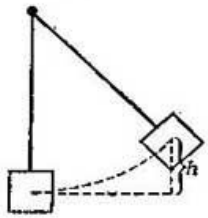


Fig. 62. Péndulo balístico.

y de aquí obtenemos que la velocidad de la bala es:

$$v = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \sqrt{2gh}.$$

Como generalmente la masa de la bala m_1 es muy pequeña en comparación con la del cajón, aproximadamente se toma

$$v = \frac{m_2}{m_1} \sqrt{2gh}.$$

Veamos ahora un sistema no aislado y supongamos que entre las fuerzas interiores hay también fuerzas de rozamiento (fuerzas no potenciales). En este caso nos limitamos a considerar solamente los fenómenos mecánicos sin tener en cuenta los caloríficos y otros no mecánicos de que se hablará más adelante (§ 68). Dividamos las fuerzas que actúan en los puntos materiales en tres grupos: 1) fuerzas potenciales interiores, 2) fuerzas de rozamiento (no potenciales interiores), y 3) fuerzas exteriores originadas por la acción de los cuerpos que no entran en el sistema que se estudia. Entonces, en la ecuación (1) dividimos el trabajo en tres partes correspondientes a estos tres grupos de fuerzas, y como resultado obtenemos que:

$$E_{c2} - E_{c1} = A_{\text{pot. inter}} + A_r + A_{\text{exter}}. \qquad (6)$$

La variación de la energía potencial estará relacionada solamente con el trabajo de las fuerzas potenciales:

$$E_{p1} - E_{p2} = A_{\text{pot. inter.}}. \qquad (7)$$

De las ecuaciones (6) y (7) obtenemos que:

$$E_{c2} + E_{p2} - (E_{c1} + E_{p1}) = A_{\text{exter.}} + A_r.$$

Pero la suma de las energías cinética y potencial $E_c + E_p$ es la energía total del sistema mecánico, E, de donde:

$$E_2 - E_1 = A_{exter.} + A_r. \quad (8)$$

De la ecuación (8) se deduce que *la variación de la energía mecánica total del sistema es igual a la suma de los trabajos de las fuerzas exteriores y de las de rozamiento*. Por consiguiente, la energía mecánica total del sistema es una magnitud física cuya variación depende de las fuerzas exteriores y de las de rozamiento. La energía de un sistema mecánico no aislado aumenta, si la suma de los trabajos de las fuerzas exteriores y de las de rozamiento es positiva, y disminuye, si esta suma es negativa. Observemos que el trabajo de las fuerzas de rozamiento siempre es negativo, ya que las fuerzas de rozamiento, para cada punto material, van en sentido contrario a la velocidad, es decir, en sentido contrario al desplazamiento. Así tenemos que la fuerza de rozamiento siempre acarrea una disminución de la energía mecánica total del sistema.

§ 29. Representación gráfica de la energía. La energía potencial de un cuerpo de peso P elevado sobre la superficie de la Tierra a la altura h, es

$$E_p = Ph = mgh, \quad (1)$$

donde m es la masa del cuerpo.

Representemos gráficamente la dependencia de E_p respecto a h tomando como abscisas los valores de h, y como ordenadas, los de

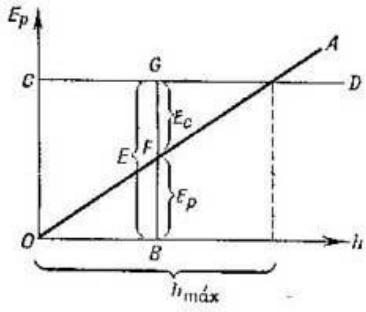


Fig. 63. La energía potencial de un cuerpo que se eleva, viene representada por la recta OA.

E_p. Entonces, según la fórmula (1), la dependencia de E_p respecto a h viene representada por la recta OA (fig. 63), que pasa por el origen de coordenadas, formando con el eje de abscisas un ángulo tanto mayor, cuanto mayor sea el peso del cuerpo P. Supongamos que el proceso que estamos examinando es el del lanzamiento vertical hacia arriba de una piedra de peso $P = mg$. Si despreciamos la resistencia del aire, se puede considerar que el movimiento de la piedra se efectúa sin la participación de trabajos exteriores. Enton-

ces, la energía total de la piedra

$$E = E_c + E_p \tag{2}$$

es constante. Gráficamente se representará por la recta CD paralela al eje de abscisas. Como la energía cinética $E_c \geqslant 0$, según la (2), el valor máximo posible de la energía potencial será $E_p = E$ (toda la energía ha pasado a ser potencial). De aquí que la máxima altura de elevación de la piedra $h_{máx}$, la determine el punto en que se cortan las rectas OA y CD. El movimiento de la piedra será posible solamente para los valores de h comprendidos entre cero y $h_{máx}$. Para un valor determinado de h comprendido en estos límites, el segmento BF representará la energía potencial de la piedra y el FG, la energía cinética. El diagrama demuestra con bastante claridad que con la elevación de la piedra (h aumenta), aumenta la energía potencial E_p y disminuye la cinética E_c; y, viceversa, con el descenso de la piedra (h disminuye), disminuye E_p y aumenta E_c. La suma de sus valores $E_p + E_c$ siempre permanece constante.

La altura máxima de elevación de la piedra, $h_{máx}$, vendrá determinada por la energía total:

$$h_{máx} = \frac{E}{mg}. \tag{3}$$

La energía cinética para una altura $h < h_{máx}$, representada por el segmento FG, será:

$$E_c = E - E_p = mgh_{máx} - mgh. \tag{4}$$

Designando por v la velocidad que la piedra tiene a la altura h, tenemos que $E_c = \frac{mv^2}{2}$; y según la (4):

$$\frac{mv^2}{2} = mgh_{máx} - mgh, \quad \text{de donde} \quad v = \sqrt{2g(h_{máx} - h)}. \tag{5}$$

Al elevar la piedra, esta velocidad va dirigida hacia arriba, al descender, irá hacia abajo.

Esta misma velocidad se puede expresar en función de la velocidad inicial de la piedra, v_0, entonces

$$E_c = E - E_p = \frac{mv_0^2}{2} - mgh, \quad \text{de donde} \quad \frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} - mgh,$$

y, por consiguiente,

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2gh}. \tag{6}$$

La misma fig. 63 representa, además, la relación entre las energías en el caso de resbalamiento sin rozamiento de un cuerpo pesado P sobre un plano inclinado. Sin embargo, en el caso del plano inclinado, como variable independiente podemos elegir no solamente h, sino también, por ejemplo, el segmento l (fig. 64) medido en la base del

plano inclinado a partir de su punto inferior. Debido a que $h = l \cdot \operatorname{tg}\alpha$, donde α es el ángulo de inclinación del plano respecto al horizonte, la energía potencial, en función de l, será:

$$E_p = mg \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot l.$$

De esta manera tenemos que, gráficamente, E_p también se representa en función de l, mediante una recta que pasa por el origen de coordenadas, pero su inclinación no será la misma que en la fig. 63

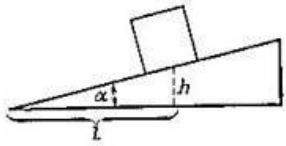


Fig. 64. Un cuerpo pesado sobre un plano inclinado.

Esta misma manera de representar la energía se puede utilizar también para el caso de resbalamiento sin rozamiento de un cuerpo sólido por una superficie de perfil arbitrario. Sea un cuerpo que resbala sin rozamiento por la montaña cuyo perfil se representa en la fig. 65, *a*. En este caso, la energía potencial E_p como función de la distancia l medida en la base de la montaña, se representará por la

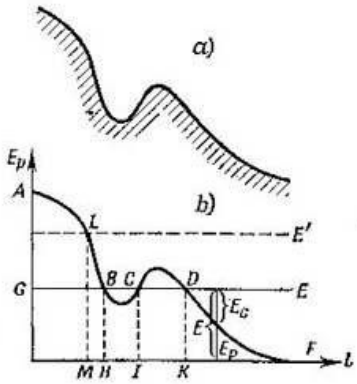


Fig. 65. La energía potencial de un cuerpo que resbala por la pendiente de una montaña, viene representada por la curva *ABCDF*.

curva *ABCDF* (fig. 65, *b*). A los lugares de subida más empinada de la montaña les corresponde una subida más empinada de la curva de la fig. 65, *b*, y al hoyo de la montaña le corresponde un «hoyo potencial» de la curva *ABCDF*. Supongamos que la energía total E del cuerpo se representa por la curva *GE*. Basándonos en la relación $E_p \leqq E$, de la fig. 65, *b* se ve claramente que, en este caso l puede tener los valores comprendidos entre los puntos H e I, o entre el punto K y el infinito. Esto significa que el cuerpo puede, con este valor de E, resbalar por la pendiente DF de la montaña, o desplazarse por el interior del hoyo BC. Si se encuentra en el hoyo, la barrera CD le impedirá salir del mismo. La condición de equilibrio del cuerpo reside en tener el mínimo (absoluto o relativo) de energía potencial.

Si el valor de la energía total es E', representado por la recta que pasa por el punto L, el cuerpo resbalará por toda la pendiente de la montaña entre los puntos L y el infinito. La energía cinética para cada valor de l la determinará el segmento comprendido entre la recta que representa la energía total, y la curva que representa la energía potencial.

Como último ejemplo veamos el movimiento de un cuerpo de masa m fijado a un resorte. Al desplazarse el cuerpo una distancia s, el resorte se comprimirá ($s < 0$) o se extenderá ($s > 0$), y como resultado, surgirá una energía potencial

$$E_p = \frac{ks^2}{2}, \qquad (7)$$

donde k es la rigidez del resorte. La energía potencial E_p como función del desplazamiento s, vendrá representada por una parábola (fig. 66). Si la energía total $E = E_p + E_c$ viene representada por la recta FG, la energía potencial

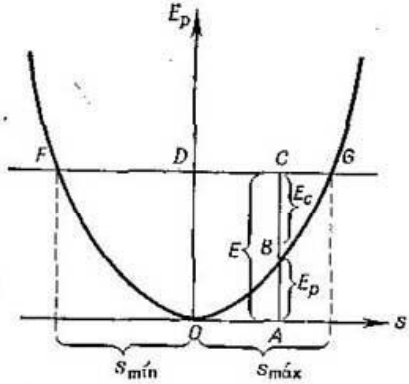


Fig. 66. La energía potencial de un resorte deformado la representa la parábola FOG.

para un valor dado de s se representará por el segmento AB, y la energía cinética del cuerpo, por el segmento BC. Los posibles valores del desplazamiento s estarán comprendidos entre $s_{máx}$ y $s_{mín}$, determinados por los segmentos DG y DF. Como la parábola es simétrica tenemos que $s_{mín} = -s_{máx}$. De aquí se deduce que el cuerpo realiza una oscilación alrededor de la posición de equilibrio, posición determinada por el valor $s = 0$. Su energía cinética y, por consiguiente, su velocidad adquieren el máximo valor al pasar por la posición de equilibrio, y el valor mínimo (igual a cero) en las desviaciones máximas. La energía cinética para cierto valor de s será

$$E_c = E - E_p = E - \frac{ks^2}{2};$$

la energía total es $E = \frac{ks_{máx}^2}{2}$, de donde

$$E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{ks_{máx}^2}{2} - \frac{ks^2}{2};$$

y de aquí obtenemos el valor de la velocidad del cuerpo en función del desplazamiento s:

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}(s_{máx}^2 - s^2)}. \qquad (8)$$

§ 30. Fórmulas de las dimensiones. El material estudiado en los párrafos anteriores nos permite plantear la cuestión *de las dimensiones de las magnitudes físicas y de las fórmulas de las dimensiones.*

Hasta ahora, la unidad de medición de cualquier magnitud física la hemos establecido fundándonos en la relación de esta magnitud con otras, para las cuales las unidades de medición eran ya conocidas, suponiendo, en la fórmula correspondiente, que el coeficiente de proporcionalidad era igual a la unidad. De esta manera se ha establecido un sistema determinado de unidades relacionado con una elección determinada *de magnitudes fundamentales* y sus unidades de medición. Así, en el sistema *CGS*, como magnitudes físicas fundamentales se han elegido la longitud, el tiempo y la masa, y como unidades de medición correspondientes a ellas, el centímetro, el segundo y el gramo respectivamente. Sobre la posibilidad de elección de otras unidades fundamentales, ya hemos hablado en el § 3.

Elegidas las magnitudes físicas fundamentales, se pueden establecer distintas unidades, y, por consiguiente, surge la pregunta de cómo se relacionan las unidades derivadas con las unidades de las magnitudes fundamentales. Detengámonos en los sistemas en donde por magnitudes fundamentales se han elegido la longitud, el tiempo y la masa, y designemos sus unidades de medición por L, T y M respectivamente.

Si la unidad derivada A varía proporcionalmente al exponente potencial p de la unidad de longitud L, al q de la unidad de masa M y al r de la unidad de tiempo T, se dice que la unidad A tiene la dimensión p respecto a la unidad de longitud, q respecto a la de masa, y r respecto a la unidad de tiempo. Esta dependencia de la unidad A respecto a la de las magnitudes fundamentales, se expresa mediante una fórmula simbólica (fórmula de dimensiones):

$$[A] = L^p \cdot M^q \cdot T^r. \qquad (1)$$

Por ejemplo, si la fórmula de las dimensiones de una unidad determinada A tiene la forma de

$$[A] = \frac{ML^2}{T^2},$$

que también se puede escribir

$$[A] = ML^2T^{-2},$$

esto significa que esta unidad derivada A cambia directamente proporcional a la unidad de masa y al cuadrado de la unidad de longitud e inversamente proporcional al cuadrado de la unidad de tiempo. Por ejemplo, si la unidad de masa la aumentamos en 1000 veces, la de longitud en 100 veces y la de tiempo en 60 veces, la unidad derivada A que examinamos aumentará en $\frac{1000 \cdot 100^2}{60^2}$ veces, es decir, en $2{,}78 \cdot 10^3$ veces.

Si la unidad derivada es independiente de alguna de las unidades fundamentales, se dice que es de dimensión cero (nula) respecto a esta unidad fundamental.

El saber las dimensiones de las magnitudes físicas es esencial, y no solamente porque permite calcular fácilmente cómo varía la unidad de medición de la magnitud dada al variar las de las magnitudes fundamentales, sino que además, al comprobar las dimensiones de las magnitudes nos permite controlar la exactitud de los cálculos. Este control se basa, ante todo, en el siguiente axioma: *sumar, restar y relacionar con el signo de igualdad, se puede hacer solamente con magnitudes de una misma dimensión.*

Efectivamente, no se puede sumar, por ejemplo, una masa con una longitud, ni afirmar que el área de una figura puede ser igual a la longitud de un segmento, etc.

Además, se puede decir que *el grado de una potencia puede ser solamente un número*, es decir, *una magnitud sin dimensiones.*

Determinemos las dimensiones de una serie de magnitudes físicas ya conocidas.

Dimensiones de la velocidad: partiendo de la relación $v = \frac{s}{t}$, vemos que la unidad de velocidad es directamente proporcional a la de longitud e inversamente proporcional a la de tiempo, de donde

$$[v] = L \cdot T^{-1}. \tag{2}$$

Dimensiones de la aceleración: partiendo de la relación $w = \frac{v}{t}$, obtenemos que

$$[w] = L \cdot T^{-2}. \tag{3}$$

Dimensiones de la fuerza: partiendo de la relación $f = mw$ y utilizando las dimensiones ya halladas de la aceleración w, obtenemos

$$[f] = MLT^{-2}. \tag{4}$$

Dimensiones del trabajo: partiendo de la relación $A = fs$, obtenemos

$$[A] = ML^2T^{-2}. \tag{5}$$

Las mismas dimensiones tiene la energía.

Dimensiones de la potencia: partiendo de la relación $W = \frac{A}{t}$, obtenemos

$$[W] = ML^2T^{-3}. \tag{6}$$

No obstante, hay magnitudes físicas cuyas unidades de medición no dependen de las unidades de longitud, tiempo ni masa. Por ejemplo, el ángulo medido mediante la relación de la longitud

del arco a la del radio, tiene dimensión cero respecto a las tres unidades fundamentales L, M y T. Para medir el ángulo, se elige por unidad el ángulo central cuya longitud de arco es igual al radio. Esta unidad de medición del ángulo se denomina *radián* (radiante o radial), y es la misma para todos los sistemas. No obstante, los ángulos se miden, además, en grados; en este caso, como unidad de medición del ángulo se ha tomado un ángulo central cuya longitud de arco es igual a $\frac{1}{360}$ parte de la longitud de la circunferencia entera. Por eso, para la univocación de valores, se puede incluir en la fórmula de las dimensiones, el símbolo de la unidad angular*). Designemos este símbolo con la letra Φ. En las fórmulas de las dimensiones de la velocidad, aceleración, fuerza, etc., arriba indicadas, no debe entrar este símbolo, ya que todas estas magnitudes son de dimensión cero respecto al ángulo. Pero si nosotros queremos escribir la dimensión de la velocidad angular $\omega = \frac{\varphi}{t}$, en ésta se puede introducir el símbolo Φ, ya que la unidad de la velocidad angular depende de la unidad en que medimos el ángulo; de esta manera tenemos que

$$]\omega] = \Phi \cdot T^{-1}.$$

Sin embargo, como se ha establecido indicar la dimensión solamente respecto a las unidades de longitud, tiempo y masa, se suele escribir:

$$[\omega] = T^{-1}. \tag{7}$$

De la misma manera obtenemos la dimensión de la aceleración angular

$$[\beta] = T^{-2}. \tag{8}$$

Del examen de las dimensiones de las diferentes magnitudes, a veces se puede indicar el carácter exacto de su comportamiento, si se conoce de antemano su forma aproximada. Por ejemplo, es natural suponer que la velocidad v adquirida por una piedra que cae libremente cerca de la superficie terrestre, deberá ser tanto mayor cuanto mayor sea la altura de la caída h y cuanto mayor sea la aceleración de la gravedad g.

De esta manera, suponiendo que v debe ser proporcional a g y a h elevados a ciertas potencias n_1 y n_2, obtenemos que

$$v = k \cdot g^{n_1} \cdot h^{n_2},$$

donde k es un coeficiente numérico. La dimensión de la velocidad es $[v] = L \cdot T^{-1}$, por consiguiente tal debe ser también la dimensión

*) Entre las magnitudes físicas de dimensión cero respecto a la longitud, tiempo y masa, se puede indicar también la temperatura.

de $g^{n1} \cdot h^{n2}$. Pero $[g] = LT^{-1}$ y $[h] = L$. De aquí que para que la dimensión del tiempo en ambas expresiones sea la misma, debe realizarse la condición de que $n_1 = \frac{1}{2}$. Pero si $n_1 = \frac{1}{2}$, n_2 también tendrá que ser igual a $\frac{1}{2}$, ya que de lo contrario, no coincidirían las dimensiones de longitud. Por consiguiente vemos que la exigencia de que sean iguales las dimensiones de las magnitudes relacionadas con el signo de igualdad, se cumplirá siendo $n_1 = n_2 = \frac{1}{2}$, es decir:

$$v = k(gh)^{1/2} = k\sqrt{gh}.$$

Efectivamente, de la fórmula del movimiento uniformemente acelerado (§ 7), tenemos que

$$v = \sqrt{2gh} \cong 1{,}41\sqrt{gh}.$$

§ 31. Límites de aplicación de la mecánica clásica. Como ya se ha indicado en el § 4, la mecánica clásica se puede aplicar solamente a los cuerpos macroscópicos, es decir, a los cuerpos que constan de gran cantidad de átomos y que se desplazan a velocidades pequeñas respecto a la de la luz. Como la velocidad de la luz es aproximadamente igual a 300 000 km/s, la mecánica clásica es aplicable a todos los cuerpos habituales que se desplazan a las velocidades que prácticamente podemos alcanzar. Sin embargo, observaciones extremadamente exactas sobre ciertos cuerpos celestes (sobre el planeta Mercurio cuya velocidad de traslación por la órbita alrededor del Sol llega a ser de 100 km/s), nos permiten observar cierta discordancia con las deducciones de la mecánica clásica. Estas divergencias se explican mediante la mecánica de la teoría de la relatividad, y se perciben claramente al observar el comportamiento de los átomos, electrones y otras partículas elementales.

La mecánica de grandes velocidades, es decir, de velocidades comparables con la de la luz, se basa en la teoría de la relatividad.

La teoría de la relatividad, como toda teoría que rompe con los viejos conceptos, ha planteado una serie de importantes cuestiones de metodología que hay que resolver. Muchos físicos y filósofos burgueses han intentado utilizar la teoría de la relatividad para fundamentar falsos conceptos idealistas, en particular del relativismo filosófico. Realmente, el contenido de la teoría de la relatividad de ninguna de las maneras nos conduce al relativismo filosófico. La teoría de la relatividad estudia principalmente los fenómenos que se revelan a las velocidades próximas a la de la luz, que existen objetivamente y, por lo tanto, independientemente de nuestra voluntad y, en este sentido, no son «relativos». Lenin, como ya hemos indicado en el § 4, señaló que la nueva física (sobreentendiendo la teoría de la relatividad) nos daba un calco de los movimientos *reales*

enormemente rápidos, mientras que la vieja mecánica clásica nos presentaba un calco de los movimientos lentos.

El contenido de la teoría de la relatividad lo analizaremos más detenidamente en el t. III, aquí solamente nos detendremos en algunas de sus consecuencias y las utilizaremos para determinar los límites de aplicación de la mecánica clásica. Empecemos con el análisis de algunas consecuencias cinemáticas de esta teoría. Sea en un sistema de referencia S (fig. 67) un cuerpo m que se desplaza a la

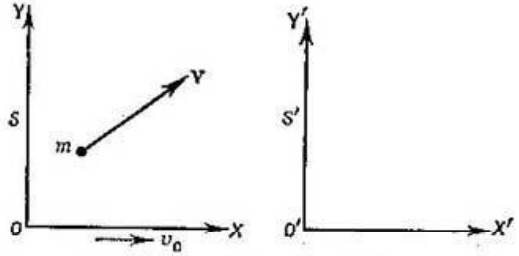


Fig. 67. El sistema S se desplaza a la velocidad v_0 respecto al sistema S'.

velocidad v respecto al sistema de coordenadas OXY, invariablemente relacionado con el sistema de referencia S. Sea un segundo sistema de referencia S' con su sistema propio de coordenadas $O'X'Y'$ relacionado invariablemente con él, cuyos ejes $O'X'$ y $O'Y'$ consideraremos paralelos a los ejes OX y OY. Supongamos que el sistema S se desplaza respecto al sistema S' en la dirección positiva del eje OX a la velocidad v_0.

En el sistema S un cuerpo m se mueve a la velocidad v, cuyas componentes según los ejes de coordenadas son v_x y v_y. En el sistema S', la velocidad del cuerpo será otra, ya que el sistema S se desplaza respecto al S' a la velocidad v_0.

Según *las concepciones clásicas*, las componentes de las velocidades del cuerpo m según los ejes $O'X'$ y $O'Y'$ del sistema S' son

$$v'_x = v_x + v_0, \quad v'_y = v_y. \tag{1}$$

Estas fórmulas representan la regla habitual de la suma de velocidades.

Según la teoría de la relatividad, la regla de la suma de velocidades es otra, a saber:

$$v'_x = \frac{v_x + v_0}{1 + \frac{v_x v_0}{c^2}}, \qquad v'_y = v_y \frac{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}{1 + \frac{v_x v_0}{c^2}}, \tag{2}$$

donde c es la velocidad de la luz. Es fácil comprobar que cuando las velocidades v_0 y v_x son pequeñas respecto a la de la luz, las fórmulas de la teoría de la relatividad (2) pasan a ser iguales a las fórmulas clásicas de la suma de velocidades (1).

Comparemos los resultados que se obtienen según las fórmulas (1) y (2) para unos cuantos casos concretos.

Supongamos que en la cabina de un avión que vuela sobre la Tierra a la velocidad $v_0 = 360$ km/h $= 100$ m/s, se efectúa un disparo según la dirección del vuelo del avión, siendo la velocidad de la bala respecto al avión $v_x = 1000$ m/s. Entonces, según la mecánica clásica, la velocidad de la bala respecto a la Tierra es de

$$v'_x = v_x + v_0 = 100 \text{ m/s} + 1000 \text{ m/s} = 1100 \text{ m/s}.$$

Según la primera fórmula (2) de la teoría de la relatividad:

$$v'_x = \frac{v_x + v_0}{1 + \frac{v_x v_0}{c^2}} = \frac{1100}{1 + \frac{1000 \cdot 100}{(3 \cdot 10^8)^2}} \text{ m/s} = \frac{1100}{1 + 1{,}1 \cdot 10^{-12}} \text{ m/s},$$

o aproximadamente

$$v'_x = 1100\,(1 - 1{,}1 \cdot 10^{-12}) \text{ m/s},$$

de donde se ve que la teoría de la relatividad, en este caso, nos da un resultado que se diferencia del de la clásica aproximadamente en una 10^{-12} parte de la velocidad total. En otras palabras, los resultados de la teoría clásica y los de la teoría de la relatividad, en este caso, prácticamente coinciden.

Si cada una de las velocidades componentes v_0 y v_x es igual a la mitad de la de la luz, c, la velocidad total, según la teoría de la relatividad, será

$$v'_x = \frac{v_x + v_0}{1 + \frac{v_x v_0}{c^2}} = \frac{\frac{1}{2}c + \frac{1}{2}c}{1 + \frac{1}{4}\frac{c^2}{c^2}} = \frac{4}{5}c,$$

en vez de c, como resulta según la fórmula clásica (1). Aquí ya se nota la diferencia de resultados entre las dos teorías. Esta diferencia es mucho mayor si, por ejemplo, cada una de las componentes de las velocidades las suponemos igual a $0{,}9\ c$.

Según la teoría de la relatividad, *la velocidad nunca puede ser mayor que la de la luz en el vacío*. Según las fórmulas (2) obtenemos una velocidad resultante que no es mayor que la velocidad de la luz incluso en el caso de que cada una de las componentes se aproxime cuanto se quiera a la de la luz.

Es importante señalar que, según las fórmulas de la teoría de la relatividad (2), en el sistema de referencia S' varía no sólo la componente v_x de la velocidad dirigida en el sentido del movimiento del

sistema S, sino que también varía la componente v_y normal a la velocidad v_0 del sistema S. Según las fórmulas clásicas, v_y es la misma para ambos sistemas. Si las velocidades v_0 y v_x son pequeñas respecto a la de la luz, c, la influencia de v_0 sobre la componente v_y es muy pequeña.

Efectivamente, designemos $\frac{v_0}{c} = \beta$ y $\frac{v_x}{c} = \beta'$; entonces las dos magnitudes β y β' son pequeñas en comparación con la unidad, y la fórmula (2) se puede escribir con valor aproximado:

$$\left.\begin{aligned} v'_x &= \frac{v_x + v_0}{1 + \beta\beta'} \cong (v_x + v_0)(1 - \beta\beta'), \\ v'_y &= v_y \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta\beta'} \cong v_y \left(1 - \beta\beta' - \frac{1}{2}\beta^2\right); \end{aligned}\right\} \qquad (2a)$$

de esta manera tenemos que el valor de v'_x se aproxima mucho al de $v_x + v_0$, y el de v'_y se diferencia del de v_y solamente en el pequeño miembro de segundo grado respecto a las magnitudes de orden β y β'.

La segunda consecuencia importante, que nosotros vamos a examinar, de la teoría de la relatividad, se reduce a que en el sistema de referencia respecto al cual el cuerpo se desplaza a la velocidad v, la masa de este cuerpo es mayor que en el sistema de referencia respecto al cual el cuerpo está en reposo, a saber:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad (3)$$

donde m es la masa del cuerpo en el sistema de referencia respecto al cual se mueve; m_0, la masa en el sistema respecto al cual está en reposo (*masa en reposo*), y la magnitud $\beta = \frac{v}{c}$.

La variación de la masa según la fórmula (3) será muy pequeña mientras la velocidad v lo sea respecto a la de la luz, pero se hace grande cuando la velocidad v es comparable con ésta. Al aproximarse la velocidad v a la c, la magnitud $\beta \to 1$, y la masa m, según

Tabla 1

La masa en función de la velocidad

β	$\frac{m}{m_0}$	β	$\frac{m}{m_0}$
0,005	1,00001	0,90	2,2941
0,010	1,00005	0,95	3,2025
0,10	1,00504	0,98	5,0252
0,50	1,1547	0,99	7,0888
0,80	1,6666	0,995	10,0125
		0,9995	31,6268

la fórmula (3), aumenta indefinidamente. De esto se deduce que si el cuerpo se desplaza con una aceleración continua bajo la acción de una fuerza, su masa aumenta, el trabajo que hay que realizar para acelerar más el cuerpo, también aumenta, y para comunicarle una velocidad igual a la de la luz, hay que realizar un trabajo infinitamente grande; de esta manera tenemos que para los cuerpos cuya masa en reposo es distinta de cero, no se puede conseguir una velocidad igual a la de la luz.

Para apreciar la influencia de la velocidad sobre la masa utilicemos la tabla I, donde se dan los valores m/m_0 para diferentes β.

De la tabla I se ve que, al principio, la masa m aumenta muy lentamente con la velocidad, y empieza a aumentar rápidamente sólo a velocidades próximas a la de la luz. Si $\beta = 0{,}01$, es decir, a la velocidad $v = 0{,}01\ c = 3\ 000$ km/s, la masa m se diferencia de la de reposo m_0 solamente en un 0,005%. A la velocidad v igual a la mitad de la de la luz, c, la masa m es mayor que la de reposo m_0 aproximadamente en un 15,5%. A la velocidad de $v = 0{,}9\ c$, la masa ya es más de dos veces mayor que la masa en reposo m_0. La medición de la masa de los electrones que se desplazan a grandes velocidades (véase el t. II) confirma con exactitud la fórmula (3).

Según la dinámica de la teoría de la relatividad, la cantidad de movimiento de un cuerpo

$$K = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{4}$$

En este caso la fuerza se determina, como antes, como una magnitud física igual a la variación del vector de la cantidad de movimiento en la unidad de tiempo. La ley de la conservación de la cantidad de movimiento se cumple exactamente si la cantidad de movimiento la expresamos según la fórmula (4).

Para velocidades v pequeñas respecto a la de la luz, c, la magnitud β es pequeña en comparación con la unidad, y la fórmula (3) se puede escribir, conservando aproximadamente su valor, así:

$$m = m_0 \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2\right). \tag{3a}$$

Multiplicando y dividiendo la ecuación de la energía cinética de un cuerpo, $E_c = \frac{m_0 v^2}{2}$, por c^2, tomará la forma:

$$E_c = \frac{1}{2} c^2 m_0 \beta^2 = c^2 \left[m_0 \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2\right) - m_0 \right],$$

de donde, según la (3a):

$$E_c = c^2 (m - m_0). \tag{5}$$

En la dinámica de la teoría de la relatividad se demuestra que esta fórmula (5), que hemos deducido como aproximada para los

valores de $v \ll c$, en realidad es exacta para velocidades cualesquiera, por mucho que se aproximen a la de la luz. La fórmula (5) se puede escribir:

$$m = m_0 + \frac{E_c}{c^2}, \tag{5a}$$

es decir, la masa m de un cuerpo en movimiento es mayor que su masa m_0 en reposo en la magnitud E_c/c^2. Esta consecuencia permite una interpretación muy importante: podemos considerar que la masa del cuerpo ha aumentado porque en él ha surgido energía cinética, que la aparición de la energía cinética E_c va acompañada de un aumento de la masa del cuerpo en la magnitud E_c/c^2. La teoría de la relatividad generaliza esta deducción afirmando que la variación de cualquier energía en la magnitud E está relacionada con la variación de la masa en la magnitud m igual a

$$m = \frac{E}{c^2}. \tag{6}$$

Y viceversa, al variar la masa del sistema en la magnitud m, surge una cantidad de energía $E = mc^2$.

Así tenemos que a cada ergio de energía le corresponde una masa $m = \frac{1}{(3 \cdot 10^{10})^2}\, g \cong 1{,}1 \cdot 10^{-21}$ g. Como se ve, esta masa es extremadamente pequeña. Una instalación de potencia igual a 2 000 000 kW (la potencia de la central hidroeléctrica de Kúibyshev) elabora en una hora aproximadamente $7{,}2 \cdot 10^{19}$ ergios de energía, que, según la fórmula (6), corresponden a una masa de $7{,}2 \cdot 10^{19} \cdot 1{,}1 \cdot 10^{-21}$ g $= 8{,}0 \cdot 10^{-2}$ g, es decir, unos 0,080 g. De aquí se ve que a las cantidades de energía que técnicamente se pueden conseguir, les corresponden masas completamente despreciables. No obstante, en los procesos relacionados con la transformación de los elementos, las variaciones de las masas debidas a los cambios de energía, son ya notables (véase el t. III).

La igualdad (6) expresa la correlación general entre la energía y la masa. El sentido de esta igualdad ha sido sometido a numerosas tergiversaciones idealistas; así, por ejemplo, se ha afirmado que de ella se deduce la posibilidad de la «transformación» de la masa en energía y viceversa, o que la ley de la conservación de la energía tiene lugar solamente para la suma de las masas y energías del sistema, y que la masa y la energía, por separado, no se conservan. Todas estas deducciones son completamente falsas y en fin de cuentas llevan al divorcio del concepto de energía respecto al concepto de la materia, es decir, al idealismo. En la realidad, las magnitudes físicas de masa y energía son unas de las características más fundamentales de las formas concretas de la materia en movimiento con que opera la física. Para un sistema completamente aislado se conserva tanto su masa como su energía. La ecuación (6) señala la profunda relación mutua entre estas dos magnitudes, indica que es imposible variar

una de ellas sin variar al mismo tiempo y en cantidad proporcional la otra.

Pasemos ahora a las restricciones de los conceptos de la mecánica clásica debidas *a las dimensiones de los cuerpos*. Como se ha indicado, para todos *los cuerpos macroscópicos*, es decir, para los cuerpos que constan de gran cantidad de átomos, la mecánica clásica es aplicable prácticamente con gran exactitud. Sin embargo, ciertas *partículas elementales* por separado, por ejemplo, electrones, revelan propiedades diferentes de las que en general se atribuyen a la «partícula», en el sentido que damos a esta palabra en mecánica. Por lo común, hablando de «partícula» sobreentendemos que respecto a ella se puede responder a dos preguntas: 1) ¿dónde se halla? y 2) ¿a qué velocidad se desplaza? Las respuestas a estas dos preguntas, es decir, las coordenadas de la partícula x, y, z y el vector velocidad $\mathbf{v}$ de la misma para cada instante determinan la trayectoria de la partícula y el carácter de su movimiento según esta trayectoria. Los experimentos, sin embargo, como veremos (véase el t. III), nos demuestran que el haz de electrones revela una propiedad particular (la difracción), característica, desde el punto de vista de los conceptos habituales, para la difusión de las ondas. Con respecto al proceso ondulatorio, no se puede formular la pregunta sobre el lugar donde se halla la onda, en el mismo sentido que se formula respecto a la partícula. Efectivamente, las ondas abarcan todo el espacio en que se difunden, por ejemplo, toda la superficie del mar; se puede hablar solamente de dónde se hallan las crestas (elevaciones) o los valles (depresiones) de las ondas, teniendo en cuenta que para las olas de la superficie del mar, serán familias de curvas y no puntos determinados con tres coordenadas. El hecho experimentalmente puesto de manifiesto de que el electrón (lo mismo que cualquiera otra partícula elemental) no es «partícula» en el sentido habitual de la palabra, nos lleva a la deducción de que los conceptos que se aplican a la partícula, no se pueden aplicar intactos a los electrones. El análisis de los datos experimentales realizado *por la mecánica cuántica* demuestra que la indicación de las coordenadas del electrón, x, y y z, (respuesta a la pregunta de dónde se halla el electrón) y al mismo tiempo de su velocidad $\mathbf{v}$ (respuesta a la pregunta de a qué velocidad y en qué sentido se desplaza éste) es cosa que no se puede hacer más que con cierto grado de aproximación. Cuanto menor sea la indeterminación Δx de la coordenada del electrón x, con mayor indeterminación Δv_x se conocerá la componente de su velocidad v_x. El grado de posible aproximación lo determina la mecánica cuántica, que es precisamente la que afirma que entre las «tolerancias» Δx y Δv_x hay la relación

$$\Delta x \cdot \Delta v_x \geqslant \frac{h}{m}, \qquad (7)$$

donde m es la masa de la partícula, y h una constante denominada *constante de Planck*, cuyo valor es:

$$h = 6{,}624 \cdot 10^{-27} \text{ ergios} \cdot \text{s}.$$

La relación (7) que, desde el punto de vista de la mecánica cuántica tiene carácter general, se denomina *principio de incertidumbre (o de indeterminación) de Heisenberg*.

El sentido físico de este principio de incertidumbre se expondrá detalladamente en el t. III. Aquí solamente señalaremos que una serie de físicos burgueses, de esta relación sacan falsas deducciones idealistas, asegurando que es imposible la descripción objetiva en el carácter de espacio-tiempo de las propiedades de los electrones. En realidad, de lo que se trata no es de la imposibilidad de describir objetivamente las propiedades de los electrones, sino de que las propiedades reales de los electrones que existen objetivamente son diferentes de las propiedades de los puntos materiales («partículas») de la mecánica clásica. El electrón (lo mismo que cualquiera otra partícula elemental) se puede considerar sólo de modo aproximado como una «partícula» de la mecánica clásica. El principio de incertidumbre indica los límites de aplicación de los conceptos de la mecánica clásica.

Debido a la pequeñez de la constante de Planck, la incertidumbre en las coordenadas y en la velocidad se refleja solamente en las partículas elementales. Empecemos por considerar una partícula de polvo de masa $m = 10^{-12}$ g y supongamos que determinamos su coordenada x con una incertidumbre del orden $\Delta x = 10^{-6}$ cm (es decir, de 0,01μ); entonces la incertidumbre en la componente de la velocidad Δv_x, según la (7), deberá ser del orden:

$$\Delta v_x \sim \frac{h}{m\Delta x} = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-27}}{10^{-12} \cdot 10^{-6}} \frac{\text{cm}}{\text{s}} \approx 10^{-8} \text{ cm/s},$$

es decir, la incertidumbre en la velocidad Δv_x es despreciable. En otras palabras, la coordenada y la velocidad de una partícula de polvo muy pequeña se puede medir prácticamente con la exactitud que se quiera; la partícula de polvo es una «partícula» en el sentido habitual de la palabra.

Veamos ahora un electrón cuya trayectoria hemos fijado de la siguiente manera: el electrón ha atravesado un diafragma por un pequeño orificio d de 0,01 cm de diámetro, y después de chocar con una pantalla fosforescente ha producido en ella un destello momentáneo (los rápidos electrones son capaces de producir esta clase de destellos, «centelleo»), cuya posición también la hemos fijado con una exactitud de 0,01 cm.

Así tenemos en este caso que, para el electrón, $\Delta x \cong 10^{-2}$ cm, de donde, según la (7), sabiendo que la masa del electrón es $m =$

$= 9 \cdot 10^{-28}$ g, obtenemos la incertidumbre en la velocidad:

$$\Delta v_x \sim \frac{h}{m\Delta x} = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-27}}{9 \cdot 10^{-28} \cdot 10^{-2}} \frac{\text{cm}}{\text{s}} \cong 7 \cdot 10^2 \text{ cm/s}.$$

Aquí, la incertidumbre en la velocidad, en valores absolutos, es sensible; sin embargo, si tenemos en cuenta que la velocidad del mismo electrón en esta clase de experimentos es muy considerable, del orden de 10^8 cm/s, vemos que la incertidumbre que se deduce de la relación (7), es aproximadamente de 0,001% de la velocidad. En otras palabras: en las condiciones indicadas, el electrón aún se puede considerar una «partícula», cuya posición y velocidad se pueden determinar simultánea y prácticamente con gran exactitud. Los experimentos de esta clase sirvieron al principio para revelar las propiedades de los electrones; por eso, al principio, se había creado la idea de los electrones como «partículas» a las cuales se les pueden aplicar los conceptos clásicos.

Veamos, por fin, el electrón moviéndose por el interior del átomo. Como las dimensiones del mismo átomo son magnitudes del orden de 10^{-8} cm, con esta exactitud por lo menos se debe fijar la posición del electrón:

$$\Delta x \cong 10^{-8} \text{ cm},$$

de donde, según la (7),

$$\Delta v_x \sim \frac{h}{m\Delta x} = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-27}}{9 \cdot 10^{-28} \cdot 10^{-8}} \frac{\text{cm}}{\text{s}} \cong 7 \cdot 10^8 \text{ cm/s}.$$

Como la misma velocidad del electrón en el átomo es una magnitud del orden de 10^8 cm/s, el resultado obtenido indica que si se ha fijado la posición del electrón en el interior del átomo, su velocidad en este caso es incierta; en otras palabras, el electrón en el interior del átomo de ninguna manera se puede considerar ya como «partícula». Efectivamente, los intentos de considerar el movimiento de los electrones en el interior de los átomos desde el punto de vista de la mecánica clásica conducen a manifiestas contradicciones. Lo mismo ocurre con otros fenómenos donde desde el punto de vista clásico habría que determinar la posición del electrón con una «precisión atómica». Todos estos fenómenos los describe exactamente la mecánica cuántica.

CAPITULO IV

Fuerzas de gravitación

§ 32. Fuerzas de gravitación. Todos los cuerpos se atraen mutuamente. Los fenómenos como la caída de los cuerpos sobre la Tierra, el movimiento de la Luna según una órbita alrededor de la Tierra, de los planetas alrededor del Sol, etc., se producen merced a las

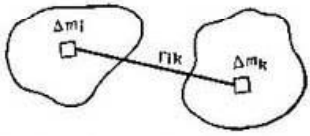


Fig. 68. Volúmenes elementales de los cuerpos que se atraen.

fuerzas gravitacionales. La ley que rige las fuerzas gravitacionales la formuló Newton en 1687. *Según la ley de la gravitación universal de Newton: dos cuerpos cualesquiera se atraen mutuamente con una fuerza directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos.* Designando las masas de los cuerpos que se atraen por m_1 y m_2, y la distancia entre ellos por r, la fuerza de atracción será:

$$f = k\frac{m_1 m_2}{r^2}, \qquad (1)$$

donde k es una constante determinada denominada *constante de gravitación*; su valor depende de las unidades de medición de la fuerza f, de la masa m y de la distancia r.

La ley de Newton, según la definición dada, es justa solamente si las dimensiones de los cuerpos son muy pequeñas respecto a las distancias entre ellos r.

En caso de que las dimensiones de los cuerpos sean comparables con la distancia que los separa, se debe dividir cada cuerpo en elementos (fig. 68); para cada par de elementos es justa la ley de la gravitación de Newton, de modo que la fuerza de atracción entre el elemento i del primer cuerpo y del elemento k del segundo será

$$\Delta f_{ik} = k\frac{\Delta m_i \cdot \Delta m_k}{r_{ik}^2}.$$

La fuerza total de acción mutua se expresa como la suma vectorial de todas las fuerzas elementales $\Delta \mathbf{f}_{ik}$:

$$\mathbf{f} = \sum_{i,\ k} \Delta \mathbf{f}_{ik}{}^{*}).$$

El resultado de este cálculo es muy diferente para los cuerpos de distintas formas; es muy sencillo para el caso de atracción de esferas homogéneas: dos esferas homogéneas se atraen con una fuerza $f = k \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$, donde m_1 y m_2 son las masas de las esferas y r *la distancia entre sus centros*. Esta expresión que coincide con la fórmula (1), es justa para cualquiera que sea la distancia entre las esferas.

En los siglos XVIII y XIX muchos físicos mantenían la falsa concepción idealista de la gravitación como cierta «acción a distancia» sin ninguna función del espacio intermedio.

En realidad, cualquier cuerpo origina en el espacio de alrededor cambios, formando *un campo gravitatorio*, que representa en sí un aspecto particular de la materia (compárese con lo que se dice en el t. II sobre el campo electromagnético). La atracción mutua de los cuerpos es originada por la acción recíproca con sus campos gravitatorios.

De la ley de la gravitación universal se deduce, que en la superficie de la Tierra, todos los cuerpos deben caer con la misma aceleración. Efectivamente, la aceleración adquirida por un cuerpo de masa m es:

$$w = \frac{f}{m},$$

donde f es la fuerza con que el cuerpo es atraído por la Tierra.

Según la ley de Newton:

$$f = k \frac{mM_T}{R_T^2},$$

donde M_T es la masa de la Tierra y R_T el radio del globo terrestre, de donde

$$w = k \frac{mM_T}{R_T^2} \frac{1}{m} = k' \frac{M_T}{R_T^2},$$

pero, como la masa de la Tierra y su radio son magnitudes constantes, obtenemos que todos los cuerpos de la superficie de la Tierra, independientemente de sus masas, caen con la misma aceleración

$$g_0 = k \frac{M_T}{R_T^2}. \qquad (2)$$

*) Como los elementos en que se dividen los cuerpos deben ser infinitamente pequeños, en la realidad, el problema se reduce a una integración.

Aquí se trata de la caída libre de los cuerpos sin que actúen las fuerzas de resistencia, y entre ellas la resistencia del aire. Tampoco se tiene en cuenta que la fuerza de la gravedad depende de la latitud del lugar (véase el § 23).

La fuerza con que cualquier cuerpo de masa m es atraído hacia la Tierra, depende de la altura h en que el cuerpo se halla sobre la superficie de la misma. Según la ley de la gravitación de Newton, el cuerpo es atraído hacia la Tierra con la fuerza:

$$f = k\frac{mM_T}{R_2},$$

donde R es la distancia desde el centro de la Tierra hasta el cuerpo. Como $R = R_T + h$, tenemos que

$$f = k\frac{m \cdot M_T}{(R_T + h)^2}.$$

La fuerza f es el peso P_h del cuerpo a la altura h. Designando el peso del cuerpo en la misma superficie de la Tierra por P_0 tenemos

$$P_0 = k\frac{m \cdot M_T}{R_T^2}, \quad \text{de donde} \quad \frac{P_h}{P_0} = \frac{R_T^2}{(R_T + h)^2};$$

como prácticamente la altura h siempre es muy pequeña en comparación con el radio de la Tierra R_T, aproximadamente se considera que

$$\frac{P_h}{P_0} = \frac{1}{1 + 2\frac{h}{R_T}} = 1 - 2\frac{h}{R_T}.$$

El radio del globo terrestre es $R_T = 6370$ km, de donde para una montaña de 6,4 km de altura, tenemos que

$$\frac{P_h}{P_0} = 1 - \frac{2}{1000} = 1 - 0{,}002,$$

es decir, el peso del cuerpo en esta montaña se diferenciará solamente en un 0,2% de su peso al nivel del mar. Aunque la variación de las fuerzas de la gravedad con la distancia puede ser notada observando el peso del cuerpo en la superficie de la Tierra, no sirve, por su pequeñez, para la comprobación exacta de la ley de la proporcionalidad inversa de las fuerzas de la gravedad al cuadrado de la distancia entre los cuerpos. Newton estableció esta proporcionalidad observando el movimiento de la Luna. Razonaba de la siguiente manera: si la ley de la gravitación es justa en la forma en que se da en la fórmula (1), la fuerza con que la Tierra atrae a la Luna será:

$$f = k\frac{M_L M_T}{R^2},$$

donde M_L es la masa de la Luna y R su distancia hasta la Tierra. De aquí que la aceleración de la Luna en dirección a la Tierra sea

$$w_n = \frac{f}{M_L} = k\frac{M_T}{R^2}.$$

Introduciendo aquí la expresión para g_0 según la (2), obtenemos

$$w_n = g_0 \frac{R_T^2}{R^2}.$$

Esta sería la aceleración centrípeta de la Luna, si se moviera alrededor de la Tierra según una órbita circular. De las observaciones astronómicas se sabe que la distancia de la Tierra a la Luna es 60 veces mayor que el radio de la Tierra, de donde

$$w_n = \frac{g_0}{60^2} = \frac{981}{3600} \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} = 0{,}27 \text{ cm/s}^2.$$

Por otro lado, esta misma aceleración centrípeta se puede calcular cinemáticamente:

$$w_n = \frac{v^2}{R} = \frac{4\pi^2 R^2}{RT^2} = \frac{4\pi^2 R}{T^2},$$

donde v es la velocidad lineal de la Luna en su órbita; T, el período de giro alrededor de la Tierra igual a 27 días 7 horas y 43 minutos, lo cual suma 2 360 580 s. Con estos datos y sabiendo que $R = 60 \cdot R_T = 60 \cdot 6370$ km, obtenemos

$$w_n = \frac{4\pi^2 \cdot 60 \cdot 6370 \cdot 10^5}{(2\,360\,580)^2} \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} = 0{,}27 \text{ cm/s}^2.$$

De esta manera, ambos métodos de cálculo de la aceleración centrípeta de la Luna dan resultados que coinciden, lo cual sirve para confirmar la veracidad de la fórmula (1).

El primero en medir el valor de la constante de gravitación k fue Cavendish en 1798 mediante una balanza de torsión. El aparato

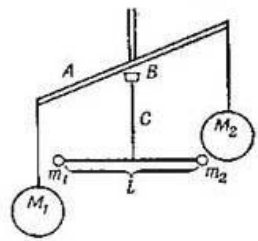


Fig. 69. Esquema del experimento de Cavendish.

que utilizó Cavendish viene representado esquemáticamente en la fig. 69. Del brazo horizontal (fleje) A iban fijas en dos varillas, dos bolas de plomo M_1 y M_2 de 158 kg de masa cada una. Debajo del fleje, en el cabezal fijo B iba sujeto un delgado hilo C del que colgaba una ligera varilla l en cuyos extremos llevaba colgadas dos esferitas de plomo m_1 y m_2. En los experimentos de Cavendish, las masas de estas esferitas eran de 730 g cada una. Al girar el fleje A, las bolas grandes se acercaban a las pequeñas y las atraían. Esta atracción se podía observar por el giro de la varilla l que llevaba las esferitas m_1 y m_2. Conociendo las propiedades elásticas del hilo C, se podía medir la fuerza de atracción y con ello determinar el valor de la

constante de gravitación k. Ulteriormente se repitieron varias veces los experimentos de Cavendish. En la actualidad, para la constante k se toma el valor:

$$k = 6{,}685 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^3/\text{g} \cdot \text{s}^2;$$

de aquí se deduce, según la fórmula (1), que dos bolitas de 1 g de masa cada una y dispuestas de manera que la distancia de sus centros igual a 1 cm, se atraen con una fuerza de $6{,}685 \cdot 10^{-8}$ dinas.

La constante k no es simplemente un número, sino que tiene dimensiones; estas dimensiones de k las determinamos de la relación:

$$k = \frac{f \cdot r^2}{m_1 \cdot m_2}.$$

de donde

$$[k] = \frac{[f] \cdot [r^2]}{[m^2]} = \frac{MLT^{-2} \cdot L^2}{M^2} = L^3 M^{-1} T^{-2},$$

de aquí que en el sistema *CGS*, k se mida en $\text{cm}^3/\text{g} \cdot \text{s}^2$.

Estas dimensiones de la constante k las hemos obtenido estableciendo de antemano la unidad de fuerza y sus dimensiones mediante la segunda ley de Newton: $f = mw$. No obstante, se puede hacer al revés: suponer en la fórmula (1) de la ley de la gravitación universal, que la constante $k = 1$, y considerarla como magnitud sin dimensiones, pero introduciendo una nueva constante k' en la segunda ley de Newton y escribir su fórmula de la siguiente manera:

$$f = k\, mw. \tag{3}$$

Entonces, utilizando el sistema *CGS*, tomamos por unidad de fuerza la fuerza con que se atraen dos bolitas de 1 g de masa cada una cuando la distancia entre sus centros es igual a 1 cm. Esta unidad de fuerza es igual a $6{,}685 \cdot 10^{-8}$ dinas.

Las dimensiones de la fuerza, en este caso, se expresan así:

$$[f] = \frac{[m] \cdot [m]}{[r^2]} = M^2 L^{-2},$$

en lugar de las dimensiones habituales $[f] = MLT^{-2}$. La constante k' en la segunda ley de Newton (que se puede denominar «constante dinámica») tendrá las dimensiones:

$$[k'] = \frac{[f]}{[m] \cdot [w]} = \frac{M^2 L^{-2}}{MLT^{-2}} = L^{-3} M T^2,$$

y su valor numérico resultará igual a:

$$k' = \frac{1}{6{,}685 \cdot 10^{-8}} \frac{\text{g} \cdot \text{s}^2}{\text{cm}^3} = 1{,}496 \cdot 10^7 \text{ g} \cdot \text{s}^2/\text{cm}^3.$$

De esta manera, partiendo de distintas leyes podemos obtener diferentes sistemas *CGS* de unidades. Las dimensiones de unas mismas magnitudes físicas, pueden resultar diferentes en distintos sistemas. El sistema *CGS* corriente se puede denominar «dinámico», y el sistema de unidades *CGS* en que la unidad de fuerza y sus dimensiones se establecen basándose en la ley de la gravitación, se puede denominar «*gravitacional*» («*gravitatorio*»). En ambos sistemas, las unidades de medición de la velocidad, aceleración y de otras magnitudes cine-

máticas, son iguales; pero las unidades de medición de la fuerza, de la energía, del trabajo, de la potencia, del momento de fuerzas, etc., son distintas. En mecánica se usa solamente uno de los sistemas, el «dinámico», sin embargo, en el estudio de la electricidad y del magnetismo, como veremos en el t. II, se emplean dos sistemas *CGS* diferentes, los denominados «electrostático» y «electromagnético».

Conociendo la constante k de gravitación podemos determinar la masa y la densidad de la Tierra y las de otros cuerpos celestes.

Utilizando la fórmula (2), tenemos

$$M_T = \frac{g_0 R_T^2}{k},$$

de donde, conociendo los valores numéricos de la aceleración de la gravedad g_0, del radio de la Tierra R_T y de la constante de gravitación k, determinamos directamente la masa de la Tierra, para la cual obtenemos el valor de $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{27}$ g.

La densidad media de la esfera terrestre la hallamos de la ecuación

$$\bar{d} = \frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3},$$

de donde calculamos el valor de $\bar{d} = 5{,}5$ g/cm³.

La masa de un astro central a cuyo alrededor gira un satélite, puede determinarse de la siguiente manera. Sea M_c la masa del astro central, M_i la del satélite y R_i la distancia entre ellos. La fuerza de atracción f crea la aceleración centrípeta del satélite y es

$$f = M_i w_n,$$

de donde

$$k \cdot \frac{M_i M_c}{R_i^2} = M_i \frac{4\pi^2 R_i}{T_i^2}, \qquad (4)$$

donde T_i es el período de traslación del satélite. De aquí tenemos que

$$M_c = \frac{4\pi^2}{k} \cdot \frac{R_i^3}{T_i^2},$$

es decir, sabiendo el radio de la órbita del satélite y el período de traslación, podemos determinar la masa del astro central. Así, sabiendo el radio de la órbita terrestre y la duración del año, encontramos la masa del Sol $M_S = 1{,}98 \cdot 10^{33}$ g.

De la fórmula (4) también se deduce que:

$$\frac{R_i^3}{T_i^2} = \frac{kM_S}{4\pi^2};$$

la magnitud de la derecha tiene valor constante para todos los satélites que giran alrededor del astro central dado. De aquí que: los cuadrados de los tiempos de traslación de los satélites (planetas) alrededor del astro central (Sol) son proporcionales a los cubos de sus distancias al astro central (Sol). Esta ley respecto a los planetas fue establecida por Kepler y se denomina *tercera ley de Kepler*.

§ 33. Masa de inercia y masa de gravitación. Trabajo de la fuerza de la gravedad. La magnitud física de masa entra en dos leyes

fundamentales e independientes una de la otra: en la segunda ley de Newton, $f = mw$, y en la ley de la gravitación universal,

$$f = k\frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

En la segunda ley de Newton, la masa caracteriza las propiedades de inercia de los cuerpos. En la ley de la gravitación universal, la masa caracteriza la capacidad de los cuerpos de crear campos de gravitación y de estar sometidos a la acción de estos campos.

Se puede plantear la pregunta de si las masas que figuran en ambas leyes son una misma magnitud o dos magnitudes diferentes de algún modo relacionadas entre sí. De esta manera precisamente han surgido en el transcurso de la historia los conceptos de la masa *de inercia*, que figura en la segunda ley de Newton, y de la masa *de gravitación*, que figura en la ley de la gravitación universal. La experiencia nos demuestra que ambas masas, si es que en general hay algún sentido en distinguirlas, son proporcionales.

Ante todo, esto se deduce del hecho de que la aceleración g_0 del cuerpo que cae libremente, es igual para todos los cuerpos. La medición exacta de la aceleración g_0 de un cuerpo que cae libremente, es difícil de realizar en la realidad; pero la observación de las oscilaciones de los péndulos permite medir g_0 con gran exactitud. Ya el mismo Newton indicó que la proporcionalidad entre las masas de inercia y de gravitación se cumplía con una exactitud de $\frac{1}{1000}$. Bessel realizó experimentos con péndulos de los materiales más diferentes y llegó a la misma conclusión con una exactitud de $\frac{1}{60\,000}$. Ulteriormente se ha demostrado que la misma proporcionalidad se cumple para las sustancias radiactivas.

Con gran exactitud, la proporcionalidad entre las masas de gravitación y de inercia la demostró Eötvös en 1894 con una balanza de torsión. La idea de los experimentos de Eötvös está en lo siguiente: en la superficie de la esfera terrestre, la dirección de la fuerza de la gravedad P_φ se determina como la fuerza resultante de la atracción del cuerpo hacia el centro de la Tierra y de la fuerza de inercia centrífuga (véase el § 23). La primera fuerza se debe a la masa de gravitación del cuerpo, la segunda a su masa de inercia. Si estas dos masas no son proporcionales, la dirección de la fuerza de la gravedad P_φ deberá divergir en los distintos cuerpos. Eötvös fijó en un extremo del fleje de la balanza de torsión una masa determinada de platino, y en el otro, el cuerpo a experimentar. El instrumento se orientaba de manera que el fleje tuviese una dirección determinada, por ejemplo, la de oriente hacia occidente. Después se hacía girar el instrumento en 180°.

Al girarlo, en el caso de que las masas de inercia y de gravitación no fuesen proporcionales, debería surgir un par de fuerzas y el fleje

debería girar un poco. En la realidad no se observó ninguna desviación que pasara de $6 \cdot 10^{-4}$ segundos de arco; las pequeñísimas desviaciones observadas tenían carácter casual. La proporcionalidad de ambas masas se observó con una exactitud de 1/200 000 000.

De esta manera, de todos los experimentos se deduce *la imposibilidad de diferenciar las masas de gravitación y de inercia: los experimentos demuestran que operamos con diferentes manifestaciones de una misma magnitud física, a saber, de la masa.* La teoría de la gravitación de Einstein ha confirmado este punto de vista. De esta manera, en la actualidad, la cuestión de la existencia de dos magnitudes físicas supuestamente diferentes: de la masa de inercia y de la masa de gravitación, solamente es de interés histórico.

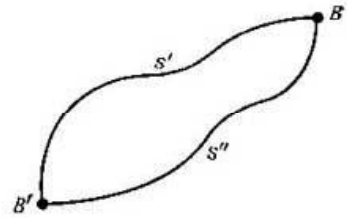


Fig. 70. El trabajo de las fuerzas de la gravedad no depende de la forma de los trayectos s' y s''.

Como se ha indicado en el § 32, cualquier cuerpo origina un campo de gravitación en el espacio que lo rodea. En particular, uno de estos campos lo crea la esfera terrestre. Como las fuerzas de gravitación originadas por la esfera terrestre se denominan fuerzas de la gravedad, el campo que circunda a la Tierra, se puede llamar también *campo (de las fuerzas) de la gravedad.* Cerca de la superficie de la Tierra prácticamente la fuerza de la gravedad es constante; en este caso se dice que el campo de la gravedad es homogéneo.

Como se ha indicado en el § 27, *el trabajo en el campo de la gravedad no depende de la forma ni de la longitud del trayecto, sino solamente de la diferencia de alturas entre el punto inicial y el final del movimiento.*

Si del punto B pasamos al B' primeramente siguiendo el trayecto s' y, después, el s'' (fig. 70), los trabajos A' y A'' realizados en estos dos casos, según lo dicho, deben ser iguales: $A' = A''$; al desplazarse desde el punto B' al B siguiendo el trayecto s'' se efectuará un trabajo $A''' = -A''$. Por consiguiente, si recorremos el trayecto cerrado pasando primeramente del punto B al B' por el trayecto s' y después volvemos del punto B' al B por el trayecto s'', en total se realizará el trabajo:

$$A_{BB'B} = A' + A''' = A' - A'' = 0.$$

El mismo resultado se obtiene si examinamos la variación de la energía potencial, que tampoco varía en el movimiento de ida y

vuelta. Por lo tanto, *al realizar un movimiento por el campo de la gravedad según un trayecto cerrado, el trabajo total es igual a cero.*

La deducción sacada de que el trabajo depende solamente de la posición de los puntos inicial y final del trayecto y no depende de la forma de éste, es justa también para un campo heterogéneo de la gravedad.

Examinando dos cuerpos de masa m_1 y m_2 que se atraen según la ley de la gravitación universal:

$$f = k\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

se puede demostrar que la energía potencial de un cuerpo respecto al otro será

$$E_p = -k\frac{m_1 m_2}{r}. \qquad (1)$$

El signo menos es debido a que la energía potencial de dos cuerpos distanciados infinitamente uno del otro ($r = \infty$) se ha convenido en considerarla igual a cero; pero en este caso la energía potencial tiene el valor máximo, ya que para separar los cuerpos hay que realizar un trabajo positivo con fuerzas exteriores, y al acercarse los cuerpos su energía potencial disminuye, por lo tanto, adquiere valores menores de cero, es decir, negativos.

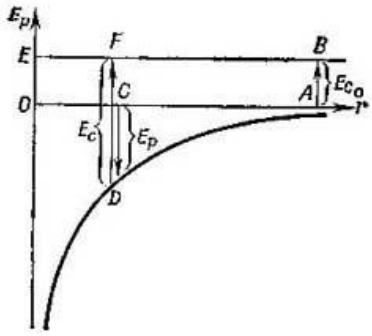


Fig. 71. La energía potencial de dos cuerpos que se atraen según la ley de Newton, viene representada por una hipérbola.

Gráficamente, la energía potencial de los cuerpos gravitatorios, expresada según la fórmula (1), se representa por la curva de la fig. 71. Esta curva es una rama de hipérbola.

Supongamos que dos cuerpos *1* y *2* se atraen. Examinaremos el movimiento del cuerpo *2* respecto al cuerpo *1*. Si la energía total de los cuerpos es igual a E (fig. 71), significa que el cuerpo *2*, cuando se hallaba a una distancia infinitamente grande del cuerpo *1*, se desplazaba a la velocidad v_0 determinada por la igualdad:

$$E_{c_0} = \frac{m_2 v_0^2}{2} = E, \quad \text{de donde } v_0 = \sqrt{\frac{2E}{m_2}}.$$

La energía cinética E_{c_0} viene representada por el segmento AB. Al disminuir r (el cuerpo *2* se acerca al *1*), la energía potencial empieza a disminuir y adquiere valor negativo; la energía cinética aumenta y al mismo tiempo aumenta la velocidad del cuerpo *2*. Para una distancia determinada r representada por el segmento OC, la energía cinética viene representada por el segmento DF; este segmento va dirigido desde abajo hacia arriba, lo cual corresponde al signo positivo de la energía cinética. La energía potencial la representa el segmento CD. Este segmento va dirigido hacia abajo, lo cual corresponde al valor negativo de la energía potencial.

La suma de las energías cinética y potencial $E_c + E_p$ durante todo el tiempo permanece constante e igual a la energía total E:

$$E_c + E_p = E. \tag{2}$$

Considerando el cuerpo *1* inmóvil, obtenemos que

$$E_c = \frac{m_2 v^2}{2},$$

donde v es la velocidad del segundo cuerpo respecto al primero cuando la distancia entre ellos es igual a r. Utilizando esta expresión de E_c y de las ecuaciones (1) y (2), obtenemos:

$$\frac{m_2 v^2}{2} - k\frac{m_1 m_2}{r} = E,$$

de donde

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m_2} + k\frac{2m_1}{r}} = \sqrt{v_0^2 + k\frac{2m_1}{r}}. \tag{3}$$

Si el cuerpo *2*, hallándose a una distancia infinita del cuerpo *1*, tuviese la velocidad $v_0 = 0$, tendríamos que

$$v = \sqrt{k\frac{2m_1}{r}}. \tag{3a}$$

Veamos el caso de un cuerpo sólido de masa m que cae desde el infinito a la Tierra con una velocidad inicial $v_0 = 0$. Entonces, según la fórmula (3a), al alcanzar la superficie de la Tierra, tendrá la velocidad

$$v = \sqrt{k\frac{2M_T}{R_T}},$$

donde M_T es la masa de la Tierra y R_T su radio. Colocando aquí $k = 6{,}685 \times \times 10^{-8}$ cm/g·s², $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{27}$ g, y $R_T = 6{,}37 \cdot 10^8$ cm, obtenemos:

$$v = \sqrt{6{,}685 \cdot 10^{-8} \frac{2 \cdot 5{,}98 \cdot 10^{27}}{6{,}37 \cdot 10^8}} \frac{\text{cm}}{s} = 11{,}2 \cdot 10^5 \frac{\text{cm}}{\text{s}}.$$

Así tenemos que un cuerpo que cae sobre la superficie de la Tiera desde el infinito, debido a la atracción de la Tierra, alcanza la velocidad de 11,2 km/s. Y viceversa, para que un cuerpo lanzado desde la superficie de la Tierra verticalmente hacia arriba no caiga otra vez a la Tierra (despreciando la resistencia del aire), sino que se aleje al infinito, hay que comunicarle una velocidad de 11,2 km/s. Esta velocidad se denomina *velocidad de escape o velocidad de liberación.*

CAPITULO V

Movimiento del sólido

§ 34. Movimiento del sólido. El movimiento de un cuerpo sólido viene determinado por las fuerzas *exteriores* aplicadas al mismo. En el cuerpo sólido son muy característicos sobre todo los movimientos de traslación y de rotación (véase el § 12). En el movimiento de traslación, todos los puntos del sólido se desplazan a igual velocidad v y con igual aceleración w. Si mentalmente dividimos el sólido en elementos de masa Δm_i, para cada uno de estos elementos, según la segunda ley de Newton, tendremos la relación:

$$\Delta m_i \cdot \mathbf{w} = \mathbf{f}_i + \mathbf{F}_i, \qquad (1)$$

donde $\mathbf{f}_i$ es una fuerza interna (es decir, procedente de otros elementos del mismo cuerpo sólido), y $\mathbf{F}_i$ es la fuerza exterior que actúa sobre el elemento dado. Según la tercera ley de Newton, la suma de todas las fuerzas internas es igual a cero; por consiguiente, sumando las ecuaciones (1) establecidas para todos los elementos, obtenemos

$$\sum \Delta m_i \cdot \mathbf{w} = \sum \mathbf{F}_i, \quad \text{o} \quad M \cdot \mathbf{w} = \mathbf{F}, \qquad (2)$$

donde $M = \Sigma \Delta m_i$ es la masa de todo el cuerpo, y $\mathbf{F} = \Sigma \mathbf{F}_i$ es la suma vectorial de todas las fuerzas exteriores. El vector F se denomina *vector resultante (principal) de las fuerzas exteriores.*

La ecuación (2) permite determinar la aceleración del movimiento de traslación del sólido conociendo la masa M del mismo y el vector principal F de las fuerzas exteriores. De esta manera tenemos que *el estudio del movimiento de traslación de un sólido se puede sustituir por el estudio del movimiento de un punto material de masa igual a la del sólido y solicitado por una fuerza igual al vector resultante de las fuerzas exteriores.*

En movimientos más complicados (no de traslación simple) los distintos puntos del sólido tienen diferentes velocidades $\mathbf{v}_i$ y aceleraciones $\mathbf{w}_i$. Sin embargo, mentalmente se puede dividir el sólido en elementos tan pequeños, que en los límites de cada uno de ellos, la velocidad y la aceleración permanezcan constantes. Entonces, para cada elemento tendremos que

$$\Delta m_i \cdot \mathbf{w}_i = \mathbf{f}_i + \mathbf{F}_i.$$

Sumando estas igualdades establecidas para todos los elementos del sólido y observando que tenemos de nuevo $\Sigma \mathbf{f}_i = 0$, obtenemos

$$\sum \Delta m_i \cdot \mathbf{w}_i = \sum \mathbf{F}_i = \mathbf{F}, \qquad (3)$$

donde F, como antes, es el vector resultante de las fuerzas exteriores. Pero la ecuación (3) no se puede equiparar con la (2), ya que, en el

caso de la (3), las aceleraciones $\mathbf{w}_i$ son distintas para los diferentes elementos.

Introduzcamos cierta aceleración $\mathbf{w}_C$ determinada por la igualdad

$$\mathbf{w}_C = \frac{\sum \Delta m_i \cdot \mathbf{w}_i}{M}, \tag{4}$$

donde M es la masa de todo el sólido. Entonces, multiplicando ambos miembros de la ecuación (4) por M y utilizando la ecuación (3), obtenemos que

$$M \cdot \mathbf{w}_C = \mathbf{F}. \tag{5}$$

Se puede demostrar (véase lo escrito con letra menuda) que $\mathbf{w}_C$ es la aceleración de cierto punto C, cuyas coordenadas x_C, y_C y z_C se determinan mediante las coordenadas de los elementos independientes del sólido x_i, y_i y z_i de las relaciones:

$$x_C = \frac{\sum x_i \Delta m_i}{M}; \quad y_C = \frac{\sum y_i \Delta m_i}{M}; \quad z_C = \frac{\sum z_i \Delta m_i}{M}. \tag{6}$$

El punto C se denomina *centro de masas* (o centro de inercia). El centro de masas coincide con el centro de aplicación de la resultante de las fuerzas de la gravedad (centro de gravedad). De la ecuación (5) se deduce que *el centro de masas de un sólido se desplaza como un punto material de masa igual a la del sólido, solicitado por una fuerza igual a la del vector resultante de las fuerzas exteriores.* Si este vector resultante es igual a cero, el centro de masas está en reposo o se desplaza con movimiento rectilíneo y uniforme. Las fuerzas internas no pueden variar la velocidad del centro de masas.

Demostremos que, en realidad, el centro de masas cuyas coordenadas vienen determinadas por las ecuaciones (6), se desplaza con una aceleración que se determina de la ecuación (4). Para ello utilicemos las relaciones que indican que las proyecciones de la aceleración sobre los ejes de coordenadas vienen expresadas por las derivadas segundas respecto al tiempo de las coordenadas del punto cuya aceleración estudiamos.

Tomando las derivadas segundas de x_C, y_C y z_C, obtenemos que las proyecciones de la aceleración del centro de masas sobre los ejes de coordenadas son:

$$\left.\begin{aligned} w_{Cx} &= \frac{d^2x_C}{dt^2} = \frac{\sum \Delta m_i \frac{d^2x_i}{dt^2}}{M} = \frac{\sum \Delta m_i \cdot w_{xi}}{M}; \\ w_{Cy} &= \frac{d^2y_C}{dt^2} = \frac{\sum \Delta m_i \frac{d^2y_i}{dt^2}}{M} = \frac{\sum \Delta m_i \cdot w_{yi}}{M}; \\ w_{Cz} &= \frac{d^2z_C}{dt^2} = \frac{\sum \Delta m_i \frac{d^2z_i}{dt^2}}{M} = \frac{\sum \Delta m_i \cdot w_{zi}}{M}, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

donde w_{xi}, w_{yi} y w_{zi} son las proyecciones de la aceleración del elemento i sobre los ejes de coordenadas. Como la misma aceleración w_C es la suma geométrica de sus componentes según los ejes, de la ecuación (7) se deduce que w_C coincide con la fórmula (4).

§ 35. Rotación del sólido. Momento de fuerza y momento de inercia. Al estudiar la rotación de un sólido desde el punto de vista dinámico, junto al concepto de fuerza se introduce *el concepto de momento de fuerza* y junto al concepto de masa, *el concepto de momento de inercia*. Para aclarar el sentido del concepto de momento de una

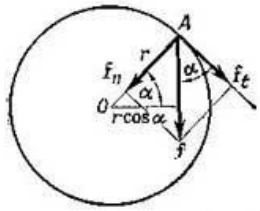


Fig. 72. Rotación del punto A según una circunferencia.

fuerza y momento de inercia examinemos primeramente el movimiento de un punto material A de masa m mantenido en una circunferencia de radio r mediante un enlace o ligadura cualquiera (fig. 72). Supongamos que sobre el punto A actúa una fuerza $\mathbf{f}$ de magnitud constante. Entonces el punto A adquiere una aceleración tangencial constante w_t determinada por la componente tangencial f_t:

$$f_t = f \cos \alpha = m w_t. \tag{1}$$

La componente normal de la fuerza $\mathbf{f}$ junto con la reacción de la ligadura crea una aceleración normal.

Introduciendo la aceleración angular $\beta = \frac{w_t}{r}$, la ecuación (1) se transforma en

$$f \cos \alpha = mr \cdot \beta;$$

multiplicando los dos miembros por r, obtenemos:

$$fr \cos \alpha = mr^2 \cdot \beta. \tag{2}$$

El producto $r \cos \alpha$, brazo de la fuerza o brazo de palanca, es igual a la longitud de la perpendicular a la dirección de la fuerza trazada desde el punto O (fig. 72). La magnitud

$$M = fr \cos \alpha, \tag{3}$$

que es igual al producto de la intensidad de la fuerza f por la distancia del punto O (centro de momentos o de rotación) en la dirección de la fuerza se denomina *momento central de la fuerza (momento de la fuerza respecto al punto O).*

La magnitud

$$I = mr^2, \tag{4}$$

que es igual al producto de la masa m del punto A por el cuadrado de su distancia al punto O (centro de momentos o de rotación), se denomina *momento de inercia del punto A respecto al punto O (o momento central de inercia)*.

Utilizando los conceptos de momento de la fuerza M y de momento de inercia I podemos escribir la ecuación (2) de la siguiente manera:

$$M = I\beta. \tag{5}$$

Comparando las ecuaciones (1) y (5) vemos que la aceleración angular β está relacionada con el momento de la fuerza M y con el momento de inercia I, de la misma manera que la aceleración

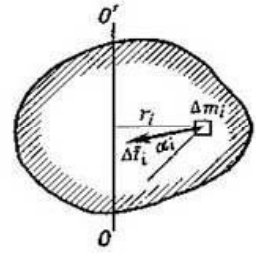


Fig. 73. Descomposición de un sólido que gira, en partes elementales.

lineal w_t está relacionada con la fuerza f_t y con la masa m del punto A. En la descripción del movimiento de rotación por medio de la aceleración angular β, el papel de fuerza lo desempeña el momento de la fuerza M, y el papel de masa m, el momento de inercia I. El punto A, solicitado por fuerzas de momentos iguales, adquiere iguales aceleraciones angulares β. Por consiguiente, *diferentes fuerzas f son equivalentes, en el sentido de la rotación que originan, si son iguales sus momentos.* Diferentes puntos materiales solicitados por iguales momentos de fuerza, adquieren iguales aceleraciones angulares, si son iguales sus momentos de inercia. De esta manera tenemos que *los puntos materiales con diferentes masas m, son equivalentes, en el sentido de la aceleración angular adquirida, si son iguales sus momentos de inercia.*

Pasemos ahora al estudio del sólido que gira alrededor de un eje fijo OO' (fig. 73).

Para caracterizar la capacidad de una fuerza de originar una rotación alrededor de un eje dado se introduce el concepto *de momento de una fuerza respecto a un eje (momento axil, axial o áxico)*. Está claro que la fuerza que actúa según una dirección que corta al eje, no puede originar ninguna rotación alrededor del mismo. También es evidente que una fuerza paralela a un eje no origina ninguna rotación alrededor del mismo. El *momento de una fuerza respecto a un eje lo origina sólo la componente de la fuerza que está en un plano perpendicular al eje.* Por eso, al elegir en el sólido un elemento pe-

queño de masa Δm_i, consideraremos sólo la componente de la fuerza que actúa sobre este elemento y que está en el plano perpendicular al eje de rotación OO'. Designemos esta componente por Δf_i.

Supongamos que la fuerza Δf_i forma un ángulo α_i con la tangente a la trayectoria de la masa Δm_i. Consideremos que el ángulo α_i es agudo. Entonces, para este elemento se puede escribir la ecuación (2):

$$\Delta f_i r_i \cos \alpha_i = \Delta m_i r_i^2 \beta.$$

donde β es la aceleración angular del elemento.

Las mismas ecuaciones se pueden escribir para todos los demás elementos, y después sumarlos:

$$\sum_i \Delta f_i r_i \cos \alpha_i = \sum_i \Delta m_i r_i^2 \cdot \beta;$$

la aceleración angular β es constante para todos los elementos, por lo tanto se puede sacar fuera del signo de la suma:

$$\sum_i \Delta f_i r_i \cos \alpha_i = \beta \sum_i \Delta m_i r_i^2. \qquad (6)$$

La magnitud $M = \sum_i \Delta f_i r_i \cos \alpha_i$ es la suma de los momentos de las fuerzas que actúan en todos los elementos del sólido, es decir, es el momento total M de las fuerzas que actúan en el sólido respecto al eje de rotación OO'. Hay que tener en cuenta que el producto $\Delta f_i r_i \cos \alpha_i$ se ha de tomar con el signo más, si el punto de aplicación de la fuerza Δf_i gira alrededor del eje en la dirección en que actúa la fuerza Δf_i, y con signo menos, en el caso contrario. La magnitud

$$I = \sum_i \Delta m_i r_i^2 \qquad (7)$$

igual a la suma de los momentos de inercia de los elementos en que hemos dividido el cuerpo, se denomina *momento de inercia de un sólido respecto a un eje dado* OO'.*) Teniendo en cuenta este momento

*) En la realidad, los elementos de las masas deben tomarse infinitamente pequeños y entonces, la suma se sustituye por una integración, y para los momentos de inercia obtenemos la ecuación:

$$I = \int r^2 \, dm.$$

Introduciendo la densidad del cuerpo ρ y teniendo en cuenta que $dm = \rho \, dV$, donde dV es el volumen elemental, tenemos que:

$$I = \int \rho r^2 dV; \qquad (7a)$$

la integración debe abarcar todo el volumen V del sólido.

total de las fuerzas M y el momento de inercia I, escribiremos la ecuación (6) de la siguiente manera:

$$M = I\beta, \tag{6a}$$

es decir, para un cuerpo sólido que gira alrededor de un eje, llegamos a la misma ecuación que para un punto material que gira alrededor de un centro [ecuación (5)].

La aceleración angular β adquirida por un sólido es:

$$\beta = \frac{M}{I},$$

es decir, es directamente proporcional al momento de fuerzas M aplicado e inversamente proporcional al momento de inercia I. Comparando la ecuación (6a) con la (1), que expresa la segunda ley de Newton, vemos que en la rotación de un sólido alrededor de un eje fijo, tiene lugar una relación análoga a la expresada por aquella ley, con la diferencia de que en vez de aceleración lineal, tenemos aceleración angular, en vez de una fuerza, el momento de una fuerza, y en vez de masa, el momento de inercia.

De la ecuación (6a) se deduce que si el momento de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo, es igual a cero, la aceleración angular β también será igual a cero, es decir, el sólido girará a constante velocidad angular ω, si su momento de inercia I permanece constante*). En el caso particular de $\omega = 0$, el cuerpo estará en reposo.

Como hemos visto (§ 13), la velocidad angular ω y la aceleración angular β pueden considerarse vectores. El momento de una fuerza f respecto a un punto puede considerarse también como un vector, y a la ecuación (6a) se le puede dar un carácter vectorial.

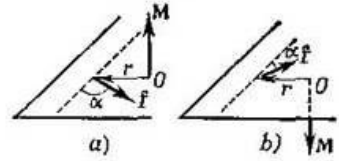


Fig. 74. El momento de la fuerza f respecto al punto O lo define el vector M.

Veamos la fuerza f (fig. 74, *a*), cuyo momento respecto al punto O queremos determinar. Está claro que la característica completa del momento la componen 1) el valor numérico del momento, que es igual a $fr \cos \alpha$; 2) el plano en que están la fuerza f y el punto O; 3) la dirección en que la fuerza actúa. Todas estas tres características se pueden expresar mediante *un vector* M, si:

*) El momento de inercia de un sólido que gira alrededor de un eje fijo puede cambiar solamente en el caso de que las distintas partes del sólido no estén ligadas rígidamente unas con otras. Para este caso, la fórmula (6a) no es valedera, ya que se ha deducido suponiendo que las componentes de las fuerzas, dirigidas según las ligaduras, se compensan con las reacciones de las ligaduras, y no originan desplazamiento de unas partes del cuerpo respecto a las otras, como tendría lugar en el caso de ligaduras no rígidas.

1) la intensidad del vector M la hacemos igual a $fr \cos \alpha$, 2) lo trazamos perpendicularmente al plano en que están la fuerza f y el punto O, y 3) lo dirigimos de manera que su sentido esté relacionado unívocamente con el de la fuerza. Para ello utilizaremos otra vez la regla del sacacorchos (véase el § 13 y la fig. 28): el sentido del vector M se determina según el movimiento de traslación (avance) del sacacorchos situado en el punto O, si el sentido de rotación de su manilla coincide con el de la fuerza que actúa. Entonces, para el caso representado en la fig. 74, *a*, el vector M estará dirigido hacia arriba, y en el caso representado en la fig. 74, *b*, hacia abajo. El vector M es el vector del momento de la fuerza.

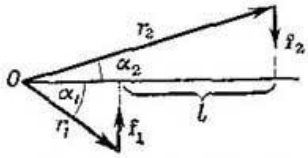


Fig. 75. El momento del par no depende de la posición del punto O respecto al cual se toma.

Considerando el ángulo $\angle$ r, f entre los vectores r y f, tenemos que $\alpha = \angle$ r, f $- \frac{\pi}{2}$, de donde la intensidad del momento de la fuerza f será:

$$M = f \cdot r \cdot \operatorname{sen} (\angle \mathbf{r}, \mathbf{f}).$$

Por consiguiente, considerando lo dicho en el § 13 sobre el producto vectorial, tenemos que el momento de la fuerza f se expresa por un producto vectorial:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{f}, \tag{3a}$$

donde r es el radio vector trazado desde el punto O, con respecto al cual se toma el momento, hasta el punto de aplicación de la fuerza f.

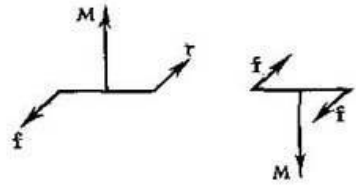


Fig. 76. El momento del par viene determinado por el vector M.

Veamos además, el momento denominado *par de fuerzas* (o simplemente *momento de un par*). Se denomina par de fuerzas a dos fuerzas iguales y de sentido contrario que no actúan según una misma recta (fig. 75). Tomaremos el momento del par respecto a un punto del plano en que están las fuerzas. *El momento de un par no depende de la posición del punto O respecto al cual se toma.* Tomemos un punto arbitrario O (fig. 75). El momento de la fuerza $\mathbf{f}_1$ respecto al punto O será igual a $f_1 r_1 \cos \alpha_1$ y estará dirigido perpendicularmente al plano del dibujo hacia nosotros. El momento de la fuerza $\mathbf{f}_2$ será igual a $f_2 r_2 \cos \alpha_2$ y estará dirigido perpendicularmente al plano del dibujo por detrás del plano del dibujo. Por lo tanto, los momentos $f_1 r_1 \cos \alpha_1$ y $f_2 r_2 \cos \alpha_2$ van en sentido opuesto y, por consiguiente, el momento resultante de las dos fuerzas que forman el par, es igual a

$$M = f_2 r_2 \cos \alpha_2 - f_1 r_1 \cos \alpha_1.$$

Las fuerzas $\mathbf{f}_1$ y $\mathbf{f}_2$ son de igual intensidad. Designemos su valor común por f, y la diferencia $r_2 \cos \alpha_2 - r_1 \cos \alpha_1$ por l (l se denomina *brazo del par o brazo de palanca* y es la distancia entre las rectas según las cuales actúan las fuerzas), entonces

$$M = fl. \tag{8}$$

La intensidad del momento de un par M es igual al producto de la intensidad de una de las fuerzas f por *el brazo del par* l. La dirección del vector del momento del par está relacionada con la de las fuerzas que forman el par según la regla del sacacorchos (fig. 76).

Utilizando el vector del momento de fuerzas, se puede escribir la ecuación (6a) en forma vectorial:

$$\mathbf{M} = I \cdot \boldsymbol{\beta}. \qquad (9)$$

Si $\mathbf{M} = 0$, es decir, si no hay momento de fuerzas que actúe sobre el sólido, $\beta = 0$, lo cual significa que el vector de la velocidad angular ω es constante, es decir, que el sólido no sólo gira a velocidad constante, según su intensidad, sino que incluso la dirección del eje de rotación permanece constante.

§ 36. Momentos de inercia de algunos cuerpos. Veamos los momentos de inercia de algunos cuerpos respecto a ejes determinados. Como

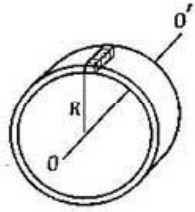


Fig. 77. Determinación del momento de inercia de un cilindro hueco de paredes delgadas.

ejemplo simple veamos el momento de inercia *de un cilindro hueco de paredes delgadas* (anillo) (fig. 77) de masa m y radio R respecto a su eje de simetría OO'. Dividamos el cilindro en elementos en

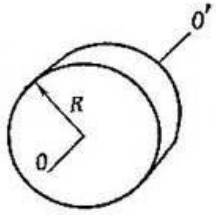


Fig. 78. El momento de inercia de un cilindro macizo respecto al eje OO' es igual a $\frac{1}{2} mR^2$.

forma de franjas limitadas por las generatrices del cilindro (una de estas franjas viene rayada en la fig. 77). Debido al pequeño espesor de las paredes del cilindro, se puede considerar que todas las partes de una misma franja se hallan a la misma distancia R del eje OO'. Por lo tanto, el momento de inercia de una franja es $\Delta I = \Delta m_i R^2$, donde Δm_i es la masa de la franja. El momento de inercia de todo el cilindro será:

$$I = \sum_i \Delta m_i R^2 = R^2 \sum_i \Delta m_i,$$

pero $\sum \Delta m_i$ es la masa m de todo el cilindro de donde

$$I = mR^2.$$

Respecto a cualquier otro eje, el momento de inercia del mismo cilindro será diferente.

A continuación se dan los momentos de inercia de algunos cuerpos sin explicar el cálculo, ya que este cálculo se basa en la integración.

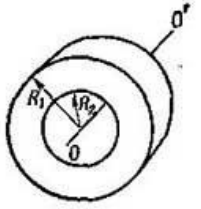


Fig. 79. El momento de inercia de un cilindro hueco de paredes gruesas respecto al eje OO' es igual a $\frac{1}{2} m (R_1^2 + R_2^2)$.

El momento de inercia *de un cilindro macizo* (disco) respecto a su eje (fig. 78) es:

$$I = \frac{1}{2} mR^2. \tag{2}$$

El momento de inercia *de un cilindro hueco de paredes gruesas* respecto a su eje (fig. 79) es:

$$I = \frac{1}{2} m (R_1^2 + R_2^2), \tag{3}$$

donde R_1 y R_2 son sus radios interior y exterior.

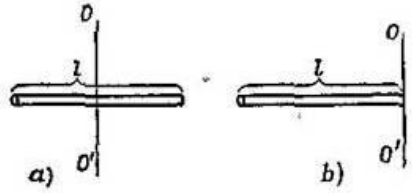


Fig. 80. El momento de inercia de una barra respecto al eje OO' perpendicular a su longitud y que pasa por su centro, es igual a $\frac{1}{12} ml^2$, y el momento respecto al eje perpendicular que pasa por uno de los extremos, es igual a $\frac{1}{3} ml^2$.

El momento de inercia *de una barra de longitud l respecto al eje que pasa por el centro de la barra* perpendicularmente a la longitud (fig. 80, *a*), es:

$$I = \frac{1}{12} ml^2. \tag{4}$$

El momento de inercia *de una barra de longitud l respecto al eje que pasa por un extremo de la barra* perpendicularmente a su longitud (fig. 80, *b*) es:

$$I = \frac{1}{3} ml^2. \tag{5}$$

El momento de inercia *de una esfera respecto a un eje que pasa por su centro es:*

$$I = \frac{2}{5} mR^2. \quad (6)$$

Las dimensiones del momento de inercia se determinan de la relación

$$I = mr^2,$$

de donde

$$[I] = [m] \times [r^2] = ML^2.$$

Así tenemos que en el sistema *CGS*, el momento de inercia se mide en $g \cdot cm^2$, en el sistema técnico, en (unidades técn. de masa) $\cdot m^2$.

En el sistema de unidades *MKS*, el momento de inercia se expresa en $kg \cdot m^2$, ya que en este sistema se toma el kilogramo por unidad de masa, y el metro por unidad de longitud.

Veamos un ejemplo de determinación de la aceleración angular dados el momento de fuerzas y el momento de inercia.

Ejemplo. A una rueda de radio $R = 0{,}5$ m con un momento de inercia $I = 20$ kg·m², se le aplica un momento de fuerzas constante $M = 5$ kgm. Hallar: 1) la aceleración angular y 2) la velocidad lineal de los puntos de la llanta al cabo de 10 segundos (la velocidad inicial se considera igual a cero).

Solución. La aceleración angular de la rueda es

$$\beta = \frac{M}{I}.$$

Para el cálculo utilizaremos el sistema técnico de unidades, entonces $I = \frac{20}{9{,}8}$ unid. técn., de donde

$$\beta = \frac{5 \cdot 9{,}8}{20} s^{-2} = 2{,}45\ s^{-2}.$$

La velocidad angular al cabo del tiempo t contando a partir del principio del movimiento será

$$\omega = \beta t,$$

y la velocidad lineal de los puntos de la llanta

$$v = \omega R = 2{,}45 \cdot 0{,}5 \cdot 10 \text{ m/s} = 12{,}25 \text{ m/s}.$$

Si para un cuerpo cualquiera se conoce su momento de inercia respecto a un eje que pase por el centro de gravedad, se puede hallar fácilmente el momento de inercia respecto a cualquier eje paralelo al primero.

Este paso de un momento de inercia a otro se realiza según el siguiente teorema: *el momento de inercia respecto a cualquier eje de rotación es igual al momento de inercia respecto a un eje paralelo al primero y que pase por el centro de gravedad, más el producto de la masa del cuerpo por el cuadrado de la distancia del centro de gravedad al eje de rotación.*

Como ejemplo, determinemos el momento de inercia de una esfera respecto a una de sus tangentes.

Según el teorema anterior:

$$I_t = I_C + ma^2,$$

donde I_t es el momento de inercia respecto a una tangente; I_C, el momento de inercia respecto a un eje que pase por el centro de gravedad; m, la masa de la esfera y a, la distancia desde la tangente hasta el centro de la esfera. Como para la esfera $a = R$, o $I_C = \frac{2}{5} mR^2$, tenemos que

$$I_t = \frac{2}{5} mR^2 + mR^2 = \frac{7}{5} mR^2.$$

§ 37. Momento de la cantidad de movimiento (momento cinético). Veamos primeramente un punto material de masa m que gira según una circunferencia de radio r (fig. 72). Para este punto se cumple la ecuación:

$$f \cos \alpha = mw_t, \tag{1}$$

donde f es la fuerza aplicada al punto, y w_t la componente tangencial de la aceleración. Supongamos que la fuerza f es de intensidad constante y forma un mismo ángulo α con la tangente a la circunferencia en todos los puntos del trayecto.

Entonces, $w_t = \Delta v/\Delta t$, y la ecuación (1) se transforma en:

$$f \cos \alpha \cdot \Delta t = m\Delta v.$$

Multiplicando por r los dos miembros de esta ecuación, obtenemos

$$fr \cos \alpha \cdot \Delta t = rm\Delta v. \tag{2}$$

La magnitud $fr \cos \alpha$ es el momento M de la fuerza f respecto al centro de rotación O; además, debido a la constancia de la masa m y del radio r, el término $rm\Delta v$ se puede escribir $\Delta (rmv)$.

Entonces la ecuación (2) toma la forma:

$$M\Delta t = \Delta (rmv). \tag{3}$$

Si el momento M no es constante, la ecuación (3) hay que tomarla en un intervalo de tiempo Δt tan pequeño, que en el transcurso del mismo se pueda considerar que lo es. Para un intervalo finito de tiempo, se puede operar con la intensidad media del momento de fuerzas $\overline{M}$, entonces

$$\overline{M}\Delta t = \Delta (rmv). \tag{3a}$$

La magnitud $p = rmv$ se denomina *momento de la cantidad de movimiento* (*momento cinético o momento dinámico*) de un punto material que gira según una circunferencia, y $\overline{M}\Delta t$ momento (impulsión o impulso) angular, que a veces también se llama *impulsión* (*impulso*) *del momento de la fuerza*. La ecuación (3) dice que *la variación del momento de la cantidad de movimiento numéricamente es igual al momento angular aplicado*. Esta ecuación es análoga a la (4) del § 17, que expresa la relación entre la variación de la cantidad de movimiento y el impulso de una fuerza.

El concepto de momento de cantidad de movimiento p de un punto material lo hemos utilizado para el caso particular del movimiento de un punto material según una circunferencia cuando su velocidad es todo el tiempo perpendicular al radio r. En el caso general del movimiento de un punto material, su momento de cantidad de movimiento respecto a un centro O es una magnitud numéricamente igual al producto de la cantidad de movimiento del punto mv por la distancia del centro O en la dirección de la velocidad v del punto (el vector v se traza desde el lugar en que en el instante dado se encuentra el punto material). El momento de la cantidad de movimiento es un vector, cuya dirección y sentido vienen determinados por la regla del sacacorchos: el vector p es perpendicular al plano en que están el vector velocidad v y el centro O, y va dirigido en el sentido del movimiento de avance del sacacorchos, cuando la manilla de éste gira en el sentido desde el vector r (radio vector del punto) hacia el vector v. De esta manera tenemos que el vector del momento de la cantidad de movimiento viene determinado por el producto vectorial $\mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$, y la ecuación (3), en el caso general, se debe escribir también en forma vectorial:

$$\mathbf{M}\Delta t = \Delta \mathbf{p},$$

donde $\Delta \mathbf{p}$ es la diferencia vectorial de los momentos de cantidad de movimiento $\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$.

La ecuación (3) se puede generalizar también para el caso de un cuerpo sólido que gira alrededor de un eje fijo. Para ello dividimos el cuerpo en elementos de masa Δm_i, como lo hemos hecho en el § 35.

Para cada elemento se cumplirá la igualdad:

$$\Delta f_i \cdot r_i \cos \alpha_i \Delta t = r_i \Delta m_i \Delta v_i,$$

o, como $\Delta v_i = \Delta \omega \cdot r_i$,

$$\Delta f_i \cdot r_i \cos \alpha_i \Delta t = \Delta m_i r_i^2 \cdot \Delta \omega.$$

Sumando estas expresiones para todos los elementos del sólido, obtenemos:

$$\sum_i \Delta f_i \cdot r_i \cos \alpha_i \Delta t = \sum \Delta m_i r_i^2 \cdot \Delta \omega,$$

o, como $\sum_i \Delta f_i r_i \cos \alpha_i = M$ es el momento de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, y $\sum_i \Delta m_i r_i^2 = I$ es el momento de inercia del mismo

$$M \Delta t = I \Delta \omega.$$

Si el momento de fuerzas M no es constante, conviene tomar su valor medio en el intervalo de tiempo Δt; entonces.

$$\overline{M} \Delta t = I \Delta \omega.$$

Como el momento de inercia de un sólido respecto a un eje dado es una magnitud constante, la última ecuación se puede escribir de la siguiente manera:

$$\overline{M} \Delta t = \Delta (I\omega), \qquad (4)$$

donde en el segundo miembro tenemos la magnitud $I\omega$. La magnitud $M\Delta t$ se denomina *momento (impulso o impulsión) angular de las fuerzas aplicadas al sólido*, y la magnitud $I\omega$ *es el momento de la cantidad de movimiento del sólido que gira alrededor de un eje fijo*. Según la ecuación (4), *la variación del momento de la cantidad de movimiento de un sólido, es igual numéricamente al momento angular de las fuerzas que tiene aplicadas.*

Hemos deducido la ecuación (4) suponiendo constante el momento de inercia, pero esta ecuación es justa también cuando el momento de inercia varía durante el movimiento. En este caso, la variación del momento de la cantidad de movimiento $\Delta(I\omega)$ se determina por el momento angular de las fuerzas aplicadas.

De las fórmulas (3) y (4) se deduce que *si no hay momento de fuerzas* ($M = 0$), *el momento de la cantidad de movimiento es constante.* Esta consecuencia se conoce *por principio (ley) de la conservación del momento de la cantidad de movimiento (o principio de la conservación del momento cinético).*

En el caso particular del movimiento del punto material según una circunferencia, siendo $M = 0$, de la (3) resulta que:

$$mvr = \text{const.} \tag{5}$$

En el caso general del movimiento de un punto material, si $M = 0$

$$\mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \text{const.} \tag{6}$$

Para un sólido, siendo $M = 0$, de la (4) se deduce que:

$$I \cdot \omega = \text{const.} \tag{7}$$

En el caso de un momento de inercia invariable, no habiendo fuerzas exteriores, la velocidad angular del sólido que gira permanece constante; este resultado ya lo hemos obtenido directamente de la fórmula (6a) del § 35.

Si el momento de inercia varía sin intervención de fuerzas exteriores, también empezará a variar la velocidad angular ω de tal manera, que el producto $I\omega$ sea constante: si el momento de inercia I aumenta, la velocidad angular ω disminuye, y viceversa.

La conservación del momento de la cantidad de movimiento puede demostrarse con un hombre de pie en un taburete que pueda girar sin rozamiento alrededor de su eje vertical («taburete de Zhukovski»). Supongamos que a un hombre con los brazos extendidos y sujetando en las manos unas pesas (fig. 81), se le comunica junto con el taburete un movimiento de rotación con una velocidad angular ω. En este caso el hombre tiene determinado momento de cantidad de movimiento $I\omega$, que, siendo cero el momento de las fuerzas exteriores, debe conservarse. Si el hombre baja los brazos, su momento de inercia disminuye y, por consiguiente, aumenta la veloci-

dad angular. Si el hombre levanta de nuevo los brazos, la velocidad angular ω recobra su valor primitivo.

El momento de la cantidad de movimiento $\mathbf{P} = I\boldsymbol{\omega}$ es una magnitud *vectorial* que tiene la misma dirección que el vector velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$. Por lo tanto, la ecuación (4) también tendrá carácter vectorial:

$$\mathbf{M}\Delta t = \Delta \mathbf{P}, \qquad (8)$$

donde $\Delta \mathbf{P} = I\boldsymbol{\omega}_2 - I\boldsymbol{\omega}_1$ es *una diferencia vectorial* de momentos de cantidad de movimiento $I\boldsymbol{\omega}$. En esta forma, la ecuación es completamente análoga a la (4) del § 17,

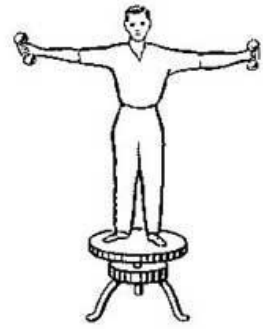


Fig. 81. Al bajar los brazos con las pesas, el hombre empieza a girar con más rapidez.

que para el punto material expresa la relación entre la variación del vector cantidad de movimiento y el vector impulso de las fuerzas. La ecuación (8) se puede aplicar, no sólo al caso de rotación de un sólido alrededor de un eje fijo, sino al caso general de movimiento arbitrario del sólido, si generalizamos como corresponde el concepto de momento de la cantidad de movimiento. La ecuación (8) se puede también aplicar a un sistema de cuerpos, pero en este caso hay que entender por $\mathbf{P}$ el vector resultante de los momentos de cantidad de movimiento y por $\mathbf{M}$ el vector resultante del impulso de las fuerzas.

El principio de la conservación del momento de la cantidad de movimiento para un sistema de dos cuerpos, se puede demostrar poniendo en manos del hombre que está en el taburete giratorio, una rueda de llanta maciza (fig. 82). Si el hombre del taburete primeramente estaba en reposo y, después, manteniendo el eje de la rueda verticalmente hace girar la rueda, él mismo, junto con el taburete, empezará a girar hacia el lado opuesto. Esto es debido a que la fuerza que el hombre aplica a la rueda, es interna y, por lo tanto, el momento total de la

Fig. 82. Al hacer girar la rueda, el hombre empieza a girar en sentido contrario.

cantidad de movimiento, que al principio era igual a cero, sigue siendo cero. Este experimento es análogo al experimento del hombre que corre sobre una carretilla (§ 18), el cual demuestra la conservación de la cantidad de movimiento del sistema.

De la ecuación (8) se deduce que si no hay fuerzas exteriores ($M = 0$), el momento de la cantidad de movimiento P se conserva, y no sólo en intensidad, sino también en dirección. Esto último se puede demostrar recurriendo de nuevo al hombre del taburete que tiene en las manos una rueda que gira: cualquier cambio de dirección del eje de la rueda (por ejemplo en 90° ó 180°) siendo constante el número de vueltas de la rueda, acarreará una variación de la velocidad angular del mismo hombre en el taburete.

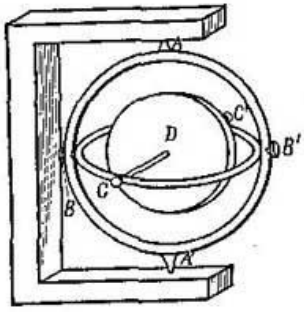


Fig. 83. El giroscopio en una suspensión cardán.

§ 38. Giroscopios (giróstatos). La propiedad del sólido que gira de conservar la dirección del eje de rotación y el carácter de las fuerzas que actúan de parte del eje en los apoyos bajo influencia exterior, se utiliza para distintos fines técnicos. Los cuerpos macizos y simétricos que giran a gran velocidad angular, empleados en la técnica, se denominan *giroscopios* (*peonzas*). La propiedad del giroscopio de conservar invariable el eje de rotación, siendo cero el momento de las fuerzas exteriores, se puede demostrar con ayuda *de la suspensión cardán.*

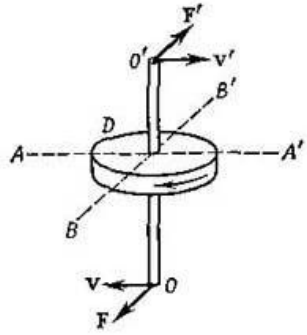


Fig. 84. Si hay un par de fuerzas F y F' que tienden a hacer girar el giroscopio alrededor del eje AA', el giroscopio realizará un movimiento de rotación alrededor del eje BB' perpendicular al AA'.

La suspensión cardán (fig. 83) consta de dos anillos, de los cuales el exterior gira libremente alrededor del eje que pasa por los pivotes AA', y el interior, alrededor del eje perpendicular al anterior y que pasa por los pivotes BB'. El eje CC' del giroscopio D se apoya en el anillo interior de la suspensión cardán, lo cual le asegura la posibilidad de girar libremente en el espacio en cualquier dirección. Si se hace girar rápidamente el giroscopio, el eje de rotación conservará invariable su dirección sea cual fuere el giro o la posición del soporte.

Si a un giroscopio en rotación se le aplica un par de fuerzas que tiendan a hacerlo girar alrededor del eje perpendicular a su eje de rotación, el giroscopio empezará a girar alrededor del tercer eje perpendicular a los dos primeros. Sea, por ejemplo, el giroscopio D, girando alrededor del eje OO' en el sentido que indica la flecha (fig. 84). Supongamos que se aplica al giroscopio un par de fuerzas F y F' perpendiculares al plano del dibujo y que tienden a hacer girar el giroscopio alrededor del eje AA'; en este caso, el extremo superior del eje del giroscopio O' se inclinará hacia la derecha, y el inferior, hacia la izquierda (según indican

las flechas v' y v), es decir, el giroscopio girará alrededor del eje BB', que es perpendicular al plano del dibujo.

De la fig. 84 se ve que, *debido al efecto giroscópico, el giroscopio tiende a orientar su eje de giro de manera que forme un ángulo mínimo con el eje de rotación forzosa AA' y que ambos giros se realicen en una misma dirección.*

Estas propiedades, a primera vista paradójicas, del giroscopio son fácilmente comprensibles basándose en el siguiente razonamiento:

Sea un giroscopio que gira según se indica en la fig. 85, y sobre el cual actúa un par de fuerzas F y F' del mismo sentido que las fuerzas aplicadas al giroscopio de la fig. 84. Entonces, el vector de velocidad angular ω estará dirigido hacia abajo, y el momento M del par de fuerzas F y F' (que están en el plano perpendicular al del dibujo) estará dirigido según la recta AA' hacia la izquierda. Según lo indicado en la pág. 140, entre el momento del par de fuerzas M y la aceleración angular β considerada como vector, existe la siguiente relación:

$$\beta = \frac{M}{I},$$

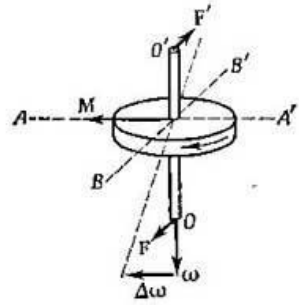


Fig. 85. Esquema para explicar el efecto giroscópico.

donde I es el momento de inercia del cuerpo a que se aplica el par de fuerzas con el momento M; por lo tanto, la aceleración β tiene la misma dirección y sentido que M. De aquí que en un pequeño intervalo de tiempo Δt, la variación de la velocidad angular vendrá representada por el vector $\Delta\omega$, paralelo al vector M, es decir, situado en el plano del dibujo y dirigido hacia la izquierda. Esto significa que el eje de rotación del giroscopio virará alrededor del eje BB' en el sentido de las agujas del reloj.

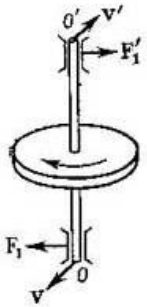


Fig. 86. Las fuerzas giroscópicas F_1 y F_1', están aplicadas a las ligaduras que mantienen el eje de rotación del giroscopio.

Las fuerzas aplicadas a las ligaduras que mantienen el eje, son iguales a F y F', pero van dirigidas en sentido contrario y se denominan *fuerzas giroscópicas*. Por ejemplo, si el extremo O' del giroscopio que gira según indica la flecha de la fig. 86, se desplaza hacia atrás por el otro lado del plano del dibujo, y el extremo O hacia delante, el eje ejercerá sobre los cojinetes una presión en el sentido indicado por las flechas F_1 y F'. Se puede demostrar que el momento de las fuerzas F_1 y F_1' se expresa por el producto vectorial del momento de la cantidad de movimiento del giroscopio $I\omega$ por el vector de la velocidad angular de inclinación de su eje ω':

$$M = I\omega \times \omega'. \qquad (1)$$

Las fuerzas giroscópicas surgen en el movimiento del trompo (peón) corriente. En la posición inclinada del trompo que gira, la componente P_2 de la fuerza

de la gravedad (fig. 87) tiende a inclinar más el eje del trompo; pero gracias al efecto giroscópico, el eje OO' se inclina en dirección perpendicular (indicada por la flecha v) y empieza a desplazarse (movimiento de precesión) de manera que su eje su mueve engendrando una superficie cónica. Debido a la precesión, el trompo no se cae. La acción de las fuerzas giroscópicas se puede demostrar también con ayuda del llamado giroscopio de palanca (de Fessell). La varilla B (fig. 88) puede girar respecto al soporte A en dirección vertical y horizontal. En un extremo de la varilla se fija el giroscopio D. Si el giroscopio está equilibrado por el peso P, este equilibrio se conserva al girar el giroscopio. Si P es más pesado que el giroscopio, no origina una inclinación hacia abajo de la varilla B, sino que la hace girar en el plano horizontal.

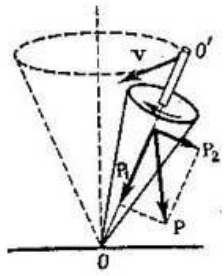


Fig. 87. Precesión de la peonza.

Los giroscopios encuentran diferentes aplicaciones en la física y en la técnica. En 1852, Foucault intentó utilizar el giroscopio para demostrar la rotación de la Tierra. El efecto giroscópico se aplica ampliamente en los cañones rayados. El rayado helicoidal del cañón de una pieza de artillería comunica al proyectil un rápido movimiento de rotación alrededor de su eje y lo transforma en un giroscopio con un gran momento propio de cantidad de movimiento. Gracias a ello, el momento de las fuerzas que surge debido a la resistencia del aire,

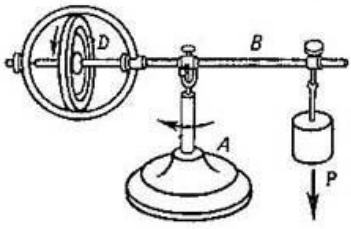


Fig. 88. Giroscopio de palanca.

no causa desviación del proyectil, sino solamente origina una precesión alrededor de la tangente a la trayectoria. Los giroscopios se utilizan también para regular el movimiento de los torpedos. El giroscopio se puede utilizar como brújula (aguja giroscópica).

La aguja giroscópica (brújula giroscópica o compás giroscópico) es un trompo que gira rápidamente (hasta 30 000 r.p.m.) flotando en un recipiente con mercurio. Gracias a la rotación de la Tierra, el eje del giroscopio tiende a colocarse paralelamente al eje de rotación de la Tierra, es decir, en el plano del meridiano. En la actualidad, los giroscopios se utilizan en diferentes instrumentos de navegación aérea (por ejemplo, en el «horizonte artificial»): Grandes giroscopios se utilizan para disminuir el balanceo de las naves.

Los efectos giroscópicos también pueden influir perniciosamente en los mecanismos que tienen piezas macizas que giran a gran velocidad, por ejemplo, la turbina de un barco. Al virar éste, se origina una presión complementaria en los cojinetes debida a las fuerzas giroscópicas que surgen en este caso.

El vector de la velocidad angular del viraje del barco ω' en este caso es perpendicular al vector de la velocidad angular de la propia turbina ω; por

lo tanto, la intensidad del momento girostático M', según la fórmula (1), es:

$$M' = I\omega\omega'.$$

Si la distancia entre los cojinetes es l, el momento será $M' = F_1 l$, donde F_1 es la fuerza de la presión complementaria sobre los cojinetes. De aquí que

$$F_1 = \frac{I\omega\omega'}{l}.$$

Si el momento de la cantidad de movimiento de la turbina es grande ($I\omega$ es grande) y si el barco vira con gran rapidez (es decir, ω' es grande), las fuerzas F_1 pueden alcanzar valores suficientes para destruir los cojinetes.

§ 39. Energía cinética de un sólido que gira. Determinemos el trabajo que realiza el momento M de las fuerzas al girar el sólido un determinado ángulo φ alrededor de un eje fijo OO' (fig. 89). Sea la fuerza f, aplicada al sólido, tangente a la trayectoria del punto de aplicación, y de momento respecto al eje OO' igual a $M = fr$. Al girar el sólido un ángulo $\Delta\varphi$, el punto A de aplicación de la fuerza se traslada recorriendo un arco de longitud Δs, de donde el trabajo realizado por la fuerza f será:

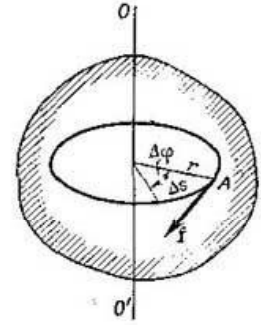


Fig. 89. Trabajo de las fuerzas que causan una rotación.

$$\Delta A = f \cdot \Delta s,$$

pero $\Delta s = r\Delta\varphi$, donde $\Delta\varphi$ es el ángulo de giro del sólido; por consiguiente:

$$\Delta A = fr \cdot \Delta\varphi$$

o, como $fr = M$ es el momento de la fuerza f

$$\Delta A = M \cdot \Delta\varphi; \qquad (1)$$

de esta manera tenemos que el trabajo realizado al girar el sólido un ángulo $\Delta\varphi$, es igual al producto del momento de la fuerza por el ángulo de giro.

En el caso de que el momento M sea constante, el trabajo realizado al girar el cuerpo un ángulo finito φ, será:

$$A = M \cdot \varphi. \qquad (2)$$

Si el momento M de la fuerza es variable, hay que determinar, según la fórmula (1), el trabajo elemental ΔA, y obtener el trabajo total A sumando los elementales.

Veamos ahora un sólido que gira a una velocidad angular dada ω alrededor de un eje fijo. La energía cinética del elemento i del sólido será:

$$\Delta E_{ci} = \frac{\Delta m_i \cdot v_i^2}{2},$$

donde Δm_i es la masa de este elemento y v_i es su velocidad lineal.

Como $v_i = r_i\omega$, tenemos que

$$\Delta E_{ci} = \frac{\Delta m_i \cdot r_i^2 \omega^2}{2}.$$

La energía cinética de rotación de todo el sólido será igual a la suma de las energías cinéticas de los distintos elementos:

$$E_c = \sum \frac{\Delta m_i r_i^2 \omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum \Delta m_i r_i^2,$$

pero según la fórmula (7) del § 35, $\sum \Delta m_i r_i^2 = I$ es el momento de inercia del sólido (respecto al eje de rotación), por lo tanto

$$E_c = \frac{I\omega^2}{2}. \tag{3}$$

Así tenemos que la energía cinética de rotación de un sólido alrededor de un eje fijo se expresa por una fórmula análoga a la que determina la energía cinética de un punto material, sólo que la función de la masa m la desempeña el momento de inercia I, y la de la velocidad lineal, la velocidad angular ω.

Hemos estudiado el caso de rotación de un sólido alrededor de un eje fijo OO'. Examinemos ahora el caso particular del movimiento de un sólido cuando el eje de rotación pasa por el centro de masas y se desplaza paralelamente a sí mismo. Sea $\mathbf{v}_i$ la velocidad lineal de un elemento del cuerpo de masa Δm_i y $\mathbf{v}_C$ la velocidad lineal del centro de masas del sólido respecto al mismo sistema de coordenadas. Sea, además, la velocidad $\mathbf{v}'_i$ del volumen elemental del sólido respecto al centro de masas; entonces tenemos que

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i + \mathbf{v}_C. \tag{4}$$

La energía cinética del volumen elemental ΔE_{ci} será

$$\Delta E_{ci} = \frac{\Delta m_i v_i^2}{2} = \frac{\Delta m_i (v_{ix}^2 + v_{iy}^2 + v_{iz}^2)}{2},$$

o, según la (4)

$$\Delta E_{ci} = \frac{\Delta m_i v_C^2}{2} + \frac{\Delta m_i v_i'^2}{2} + \Delta m_i (v_{Cx}v'_{ix} + v_{Cy}v'_{iy} + v_{Cz}v'_{iz}).$$

Obtenemos la energía cinética de todo el sólido sumando las energías cinéticas de todos sus elementos:

$$E_c = \sum \frac{\Delta m_i v_C^2}{2} + \sum \frac{\Delta m_i v_i'^2}{2} + \sum \Delta m_i (v_{Cx}v'_{ix} + v_{Cy}v'_{iy} + v_{Cz}v'_{iz}). \tag{5}$$

El primer término del segundo miembro de esta ecuación es, como fácilmente se ve, la energía cinética de la masa m, igual a la masa de todo el sólido que se mueve junto con el centro de las masas: $\frac{mv_C^2}{2}$. Razonando análogamente a como se ha hecho anteriormente, vemos que el segundo término es igual a la energía cinética de rotación de un sólido respecto a un eje de rotación que pase por su centro de masas $\frac{I\omega^2}{2}$. El tercer término, como se puede demostrar, es igual a cero. Efectivamente, examinemos el producto $\Delta m_i v_{Cx} v'_{ix}$. Observando que, según la (4), $v'_{ix} = v_{ix} - v_{Cx}$, lo descomponemos de la forma siguiente

$$\Delta m_i v_{Cx} v'_{ix} = \Delta m_i v_{ix} v_{Cx} - \Delta m_i v_{Cx}^2. \quad (6)$$

Llamando las coordenadas del centro de masas x_C, y_C, z_C y las del elemento i del sólido x_i, y_i, z_i: tendremos que $v_{Cx} = \dot{x}_C$ y $v_{ix} = \dot{x}_i$ (los puntos sobre las letras designan la primera derivada respecto al tiempo). Utilizando estas ecuaciones en la (6) obtenemos:

$$\Delta m_i v_{Cx} v'_{ix} = \Delta m_i \dot{x}_C \dot{x}_i - \Delta m_i \dot{x}_C^2. \quad (7)$$

Sumando la (7) para todos los elementos del sólido, obtenemos

$$\sum \Delta m_i v_{Cx} v'_{ix} = \dot{x}_C \sum \Delta m_i \dot{x}_i - m\dot{x}_C^2.$$

Pero según la fórmula (6) del § 34, $\sum \Delta m_i \dot{x}_i = m\dot{x}_C$, de donde hallamos que

$$\sum \Delta m_i v_{Cx} v'_{ix} = 0.$$

Lo mismo obtenemos para las otras dos componentes de las velocidades según los respectivos ejes, por lo tanto:

$$\sum \Delta m_i (v_{Cx} v'_{ix} + v_{Cy} v'_{iy} + v_{Cz} v'_{iz}) = 0.$$

Después de esto, la ecuación (5) se transforma en:

$$E_c = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}.$$

es decir, *la energía cinética total de un sólido es igual a la suma de la energía cinética de la masa m de todo el sólido concentrada en el centro de masas, y de la energía cinética de su rotación respecto al eje que pasa por este centro.*

Veamos unos cuantos ejemplos de determinación de la energía cinética de un cuerpo sólido en rotación.

Ejemplo 1. Un volante que junto con el árbol tiene un momento de inercia de 200 kgm², gira haciendo 180 r.p.m. Dos minutos después de que ha dejado de actuar sobre el volante el momento de rotación, el volante se para frenado por las fuerzas de rozamiento de los cojinetes. Considerando constante el rozamiento de los cojinetes, determinar el momento de las fuerzas de rozamiento.

Solución. El trabajo de las fuerzas de rozamiento de los cojinetes se efectúa a costa de la energía cinética del volante:

$$\frac{I\omega_0^2}{2} = M\varphi,$$

donde ω_0 es la velocidad angular inicial del volante; I, su momento de inercia; φ, el ángulo que gira el volante hasta pararse, y M, el momento buscado de

las fuerzas de rozamiento de los cojinetes. Considerando el movimiento de rotación del volante uniformemente retardado, tenemos que $\varphi = \frac{\omega_0}{2} t$, donde t es el tiempo que tarda en pararse el volante. Por lo tanto:

$$M = \frac{I\omega_0}{t}.$$

La velocidad angular es $\omega_0 = 2\pi n_0$, donde $n_0 = 180$ r.p.m. $= 3$ revoluciones por segundo, de donde

$$M = \frac{200 \cdot 2\pi \cdot 3}{9{,}8 \cdot 120} \text{ kgm} = 3{,}2 \text{ kgm}.$$

Ejemplo 2. ¿Qué parte de la energía cinética total representa la energía cinética de rotación de los siguientes cuerpos que se desplazan rodando: a) un aro, b) un cilindro macizo, y c) una esfera?

Solución. En la rodadura sin resbalamiento, la velocidad lineal de la llanta del sólido respecto a su centro es igual a su velocidad de traslación v. Por lo tanto, para *el aro*, que tiene $I = mR^2$ y $v = \omega R$, obtenemos que la energía cinética de su rotación en la rodadura E_{rot} será

$$E_{rot} = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{mv^2}{2}.$$

La energía cinética total E_c es la suma de la energía cinética de rotación E_{rot} y de la energía cinética del movimiento de traslación $\frac{mv^2}{2}$, por lo tanto:

$$E_c = \frac{mv^2}{2} + E_{rot} = mv^2, \text{ de donde } E_{rot} = \frac{1}{2} E_c. \tag{8}$$

Para *el cilindro macizo*:

$$I = \frac{1}{2} mR^2, \text{ de donde } E_{rot} = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{mv^2}{4};$$

la energía total:

$$E_c = \frac{mv^2}{2} + E_{rot} = \frac{3}{4} mv^2, \text{ de donde } E_{rot} = \frac{1}{3} E_c. \tag{9}$$

Para *la esfera:*

$$I = \frac{2}{5} mR^2, \text{ de donde } E_{rot} = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{1}{5} mv^2;$$

la energía total:

$$E_c = \frac{mv^2}{2} + \frac{1}{5} mv^2 = \frac{7}{10} mv^2, \quad E_{rot} = \frac{2}{7} E_c. \tag{10}$$

Ejemplo 3. Por un plano inclinado de altura h ruedan: a) un aro, b) un cilindro macizo, y c) una esfera. Hallar las velocidades que adquieren al final del plano inclinado. Comparar estas velocidades con las velocidades que adquiriría el sólido de desplazarse por el plano sin rozamiento.

Solución. La energía cinética total del cuerpo que rueda es:

$$E_c = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = \frac{1}{2} \left(m + \frac{I}{R^2} \right) v^2.$$

Como la energía cinética surge a costa de la energía potencial $E_p = mgh$, tenemos que

$$\frac{1}{2}\left(m+\frac{1}{R^2}\right)v^2 = mgh, \text{ de donde } v = \sqrt{\frac{2mgh}{m+\frac{1}{R^2}}},$$

o

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1+\frac{I}{mR^2}}}, \tag{11}$$

Como la velocidad del sólido que resbala sin rozamiento por un plano inclinado de altura h es

$$v = \sqrt{2gh},$$

se ve que para el sólido que rueda sin rozamiento, esta velocidad es $\sqrt{1+\frac{I}{mR^2}}$ veces menor. (Aquí I es el momento de inercia del sólido, m, su masa y R, su radio).

Para *el aro*, en el que $I = mR^2$, tenemos

$$v = \sqrt{gh},$$

es decir, la velocidad que adquiere rodando por un plano inclinado es $\sqrt{2} = 1{,}41$ veces menor que la del sólido que resbala sin rozamiento.

Para *el cilindro macizo*, $I = \frac{1}{2}mR^2$, de donde

$$v = 2\sqrt{\frac{gh}{3}},$$

es decir, $\sqrt{\frac{3}{2}} = 1{,}23$ veces menor que la del sólido que resbala sin rozamiento.

Para *la esfera* $I = \frac{2}{5}mR^2$, de donde

$$v = \sqrt{\frac{10gh}{7}},$$

es decir, $\sqrt{\frac{7}{5}} = 1{,}18$ veces menor que la del cuerpo que resbala sin rozamiento.

CAPITULO VI

Movimiento de los líquidos

§ 40. Movimiento del líquido perfecto. Líneas y tubos de corriente. Hasta ahora hemos estúdiado el movimiento de los cuerpos reducido al desplazamiento de unos respecto a otros y, en el caso de un sólido, también hemos visto la rotación alrededor de un eje determinado. Sin embargo, hay movimientos que se reducen al desplazamiento de unas partes del mismo cuerpo respecto a otras; y en este caso, si el cuerpo se puede considerar como un medio continuo e infinitamente grande, se denomina *medio continuo*. El medio continuo puede ser un cuerpo sólido elástico y en este caso, en el mismo pueden tener lugar desplazamientos de unas partes respecto a otras y oscilaciones (ondas). El medio continuo puede ser un líquido incompresible, en el cual puede haber corriente. Por fin, el medio continuo puede ser un líquido o un gas compresible en los cuales puede haber corrientes y oscilaciones. La parte de la mecánica, que estudia el movimiento de los líquidos se denomina *hidrodinámica*.

Al estudiar el movimiento de un líquido, en la mayoría de los casos con un grado bastante elevado de exactitud, se puede considerar el líquido absolutamente incompresible y suponer que el desplazamiento de unas capas respecto a otras del líquido no está relacionado con la aparición de fuerzas de rozamiento (no hay rozamiento interno o viscosidad). Este líquido *absolutamente incompresible y absolutamente no viscoso* se denomina *ideal o perfecto*. «El líquido perfecto» es solamente una mejor o peor aproximación de los líquidos reales.

Determinemos el movimiento de las partículas de un líquido respecto a determinado sistema de referencia. En este caso, a cada partícula le corresponderá un vector velocidad. Todo el líquido representa lo que se ha convenido en denominar *un campo del vector velocidad*. En el campo del vector velocidad podemos trazar líneas cuyas tangentes en cada uno de sus puntos coinciden con la dirección de la velocidad de las partículas del líquido en el punto dado (fig. 90). Estas líneas se denominan *líneas de corriente*. Se representan en general las líneas de corriente de modo que estén más próximas unas de otras donde sea mayor la velocidad de la corriente del líquido, y más alejadas donde el líquido se desplace con más lentitud. En el caso del régimen estacionario o laminar, la velocidad del líquido en cada punto permanece constante respecto al tiempo. En este

caso, las líneas de corriente también permanecen invariables y coinciden con las trayectorias de las partículas del líquido. Las líneas de corriente del líquido se pueden hacer visibles introduciendo en él un chorro de tinta o partículas en suspensión que sean visibles.

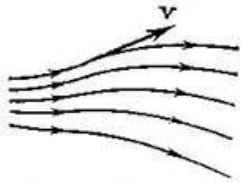


Fig. 90. Líneas de corriente de un líquido.

En la fig. 91, *a*, *b* y *c* vienen representadas las líneas de corriente obtenidas al intercalar en la corriente del líquido un cilindro, un plano perpendicular a la corriente y un cuerpo fuselado.

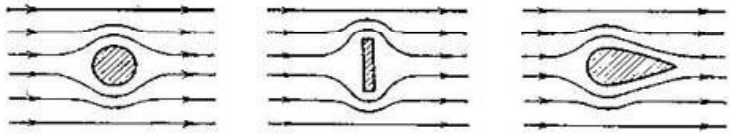


Fig. 91. Líneas de corriente de un líquido.

La parte del líquido limitada por un determinado haz de líneas de corriente se llama *tubo de corriente*. Todas las partículas que se hallan en una sección del tubo de corriente, al desplazarse continúan moviéndose por su interior sin salirse del mismo. De la misma manera,

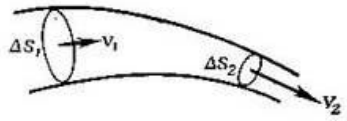


Fig. 92. Tubo de corriente de un líquido.

ninguna partícula del exterior se introduce en el tubo. Sea un tubo de corriente. Elijamos dos secciones normales cualesquiera ΔS_1 y ΔS_2 (fig. 92). En una unidad de tiempo, por la sección ΔS_1 pasará un volumen de líquido (gasto) igual a $\Delta S_1 v_1$, donde v_1 es la velocidad de la corriente del líquido en el lugar donde se ha tomado la sección ΔS_1. A través de la sección ΔS_2, en esta unidad de tiempo pasará un volumen de líquido igual a $\Delta S_2 v_2$, donde v_2 es la velocidad de la corriente del líquido por la sección ΔS_2. Para el líquido incompresible, por la sección ΔS_2 pasará el mismo volumen que ha pasado por la sección ΔS_1; por consiguiente

$$\Delta S_1 \cdot v_1 = \Delta S_2 \cdot v_2.$$

Como esta relación es justa para dos secciones cualesquiera del tubo de corriente, podemos en general decir que para el tubo de corriente

$$\Delta S \cdot v = \text{const},$$

es decir, que el producto de la velocidad de la corriente de un líquido no compresible y no viscoso por la sección transversal del tubo de corriente es una magnitud constante para el tubo de corriente dado. Esta relación se conoce con el nombre de *principio o ecuación de continuidad.*

En el régimen estacionario de un líquido no viscoso e incompresible por un tubo real cualquiera, el tubo de corriente coincidirá con el tubo real. Por eso, según el principio de continuidad, en los lugares donde el tubo es de mayor diámetro, el líquido se desplazará con más lentitud, y en los lugares de menor diámetro, con más rapidez.

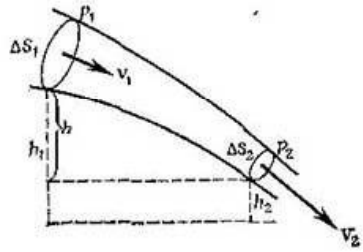


Fig. 93. Tubo de corriente de un líquido.

Supongamos un tubo de corriente que vaya disminuyendo de sección según la dirección de la corriente. Al pasar el líquido por la parte más estrecha, empezará a fluir con más rapidez, es decir, adquirirá aceleración. Por consiguiente, sobre el líquido que pasa por la sección más estrecha del tubo, actúa cierta fuerza de parte del líquido que aún se halla en las secciones más anchas. Esta fuerza que surge en el interior del líquido, puede ser debida solamente a la diferencia de presiones en las distintas partes del mismo. Como la fuerza va dirigida hacia la parte estrecha del tubo, la presión en las partes más anchas debe ser mayor que en las estrechas. En los estrechamientos del tubo, la presión es más baja.

Recordemos que se denomina presión p una magnitud igual a la fuerza f que actúa perpendicularmente sobre cierta superficie, dividida por el área de ésta ΔS.

Tomemos del filete de la corriente una masa determinada Δm de líquido que pasa primero por la sección ΔS_1 del tubo de corriente, y después por la sección ΔS_2 (fig. 93). La velocidad del líquido en la sección ΔS_1 la denominamos v_1 y la presión p_1, y la velocidad y la presión en la sección ΔS_2, respectivamente v_2 y p_2. Supongamos, además, que el tubo de corriente va con cierta inclinación. Llamemos h_1 la altura a que se halla la sección ΔS_1, y h_2 la de la sección ΔS_2. Al desplazarse la masa Δm de líquido se realiza un trabajo

determinado, ya que sobre esta masa de líquido actúa una fuerza originada por la presión p que hay en el líquido.

Sea E_1 la energía total de la masa de líquido Δm en el lugar donde pasa por la sección ΔS_1, y E_2 la correspondiente al pasar por la sección ΔS_2. Según la ley de la conservación de la energía, la variación de esta energía $E_2 - E_1$ será igual al trabajo de las fuerzas exteriores que trasladan la masa Δm desde la sección ΔS_1 a la sección ΔS_2:

$$E_2 - E_1 = A. \tag{1}$$

Las energías E_1 y E_2 constan de las energías cinética y potencial de la masa de líquido Δm:

$$E_1 = \frac{\Delta m \cdot v_1^2}{2} + \Delta m \cdot g h_1; \quad E_2 = \frac{\Delta m \cdot v_2^2}{2} + \Delta m \cdot g h_2.$$

No es difícil convencerse de que el trabajo A coincide con el realizado por todo el filete del líquido comprendido entre las secciones ΔS_1 y ΔS_2 durante el tiempo Δt en que por estas secciones se desplaza la masa de líquido Δm. Para hacer pasar la masa Δm por el lugar de la primera sección, el líquido deberá recorrer un trayecto $\Delta l_1 = v_1 \Delta t$, y por el lugar de la segunda sección, el trayecto $\Delta l_2 = v_2 \Delta t$. Las fuerzas que actúan en ambos extremos del segmento de líquido tomado serán respectivamente $f_1 = p_1 \Delta S_1$ y $f_2 = -p_2 \Delta S_2$. La primera fuerza es positiva porque tiene el mismo sentido que la corriente del líquido; la segunda es negativa porque actúa (en el espacio que hemos tomado), del lado del líquido que se halla a la derecha de la sección y, por consiguiente, va dirigida en sentido contrario al de la corriente del líquido. En definitiva hallamos que

$$A = f_1 \Delta l_1 + f_2 \Delta l_2 = p_1 \Delta S_1 v_1 \Delta t - p_2 \Delta S_2 v_2 \Delta t.$$

Sustituyendo los valores encontrados de E_1, E_2 y A en la (1), obtenemos

$$\frac{\Delta m \cdot v_2^2}{2} + \Delta m \cdot g h_2 - \frac{\Delta m \cdot v_1^2}{2} - \Delta m \cdot g h_1 = p_1 \Delta S_1 v_1 \Delta t - p_2 \Delta S_2 v_2 \Delta t,,$$

o

$$\frac{\Delta m \cdot v_1^2}{2} + \Delta m \cdot g h_1 + p_1 \Delta S_1 v_1 \Delta t = \frac{\Delta m \cdot v_2^2}{2} + \Delta m \cdot g h_2 + p_2 \Delta S_2 v_2 \Delta t. \tag{2}$$

Según el principio de continuidad, el volumen ocupado por la masa de líquido Δm, es constante:

$$\Delta V = \Delta S_1 v_1 \Delta t = \Delta S_2 v_2 \Delta t.$$

Dividiendo los dos miembros de la ecuación (2) por este volumen ΔV y observando que $\Delta m / \Delta V$ es la densidad del líquido ρ, obtenemos

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2. \tag{3}$$

El primero que dedujo esta ecuación fue el eminente físico y matemático Daniel Bernoulli (1700—1782), académico de la Imperial de Petersburgo, durante su trabajo en Rusia. Esta ecuación se denomina *ecuación o teorema de Bernoulli*.

Para el tubo de corriente dispuesto horizontalmente ($h_1 = h_2$), la ecuación de Bernoulli nos da:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + p_2. \qquad (3a)$$

De la fórmula (3a) y del principio de continuidad se ve que en la corriente de un líquido por un tubo horizontal de diferentes sec-

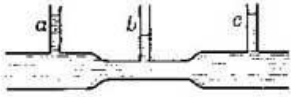
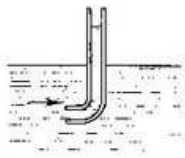


Fig. 94. La presión varía con el diámetro del tubo.

ciones, la velocidad es mayor en las secciones más estrechas, y la presión, en las secciones mayores. Esto último se puede demostrar instalando a lo largo del tubo una serie de tubos manométricos *a*, *b*, *c* (fig. 94). La altura del nivel del líquido en estos tubos representará la presión p en las correspondientes secciones del tubo. En

Fig. 95. Tubo de Pitot.



correspondencia con el teorema de Bernoulli, la experiencia demuestra que en el tubo manométrico *b* instalado en la parte de sección estrecha, el nivel del líquido es menor que en los instalados en las partes de mayor sección del tubo.

Si en la corriente del líquido colocamos un tubo manométrico inmóvil con el extremo inferior doblado y dirigido contra la corriente («tubo de Pitot», fig. 95), las líneas de corriente variarán en las proximidades del tubo. La velocidad del líquido delante del orificio del tubo será igual a cero. Aplicando a este caso la fórmula (3a) y suponiendo $v_2 = 0$, obtenemos

$$p_2 = p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2}.$$

El tubo manométrico con el orificio dirigido al encuentro de la corriente medirá la presión p_2, que, como se ve, es mayor que la presión p_1 en la magnitud $\frac{\rho v_1^2}{2}$. (La presión p_1 la mediría un manómetro que se desplazase junto con el líquido). Conociendo p_1, después

de medir la p_2 se puede hallar la velocidad de la corriente v_1. La magnitud $\frac{\rho v_1^2}{2}$ a veces se denomina «presión dinámica».

En las partes estrechas del tubo, si la velocidad de la corriente es grande, la presión p puede ser negativa. En este caso, el líquido que pasa por las secciones estrechas del tubo, se encuentra sometido a tracción en todas direcciones. Si la presión en la parte ancha del tubo es la atmosférica, la de la parte estrecha será inferior a la atmosférica. En este caso el filete producirá una aspiración. En esta aspiración del filete en la sección estrecha se basa el funcionamiento de una serie de instrumentos, por ejemplo, el del pulverizador y el de la trompa de agua o hidroeyector. El esquema de la trompa de agua viene representado en la fig. 96. El agua que

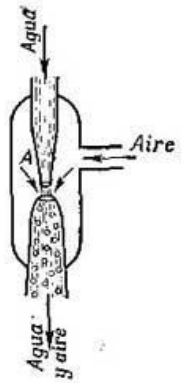


Fig. 96. Trompa de agua.

sale a gran velocidad del extremo estrecho del tubo A, aspira burbujas de aire y las arrastra consigo.

Mediante la ecuación de Bernoulli se puede hallar la velocidad de salida de un líquido por un orificio. Si el recipiente es ancho y el

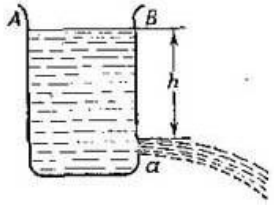


Fig. 97. Salida de un chorro por un orificio lateral.

orificio pequeño (fig. 97), la velocidad del líquido en el recipiente es pequeña y toda la corriente se puede considerar como un tubo de corriente. La presión, tanto en la sección superior (superficie AB), como en la inferior (junto al orificio a), es igual a la atmosférica p_0. Por eso, la ecuación de Bernoulli (3) toma la forma de:

$$\frac{v_1^2}{2} + g(h_1 - h_2) = \frac{v_2^2}{2}. \qquad (3b)$$

Si examinamos el caso de salida del chorro a la velocidad $v_1 = 0$ y suponiendo $h_1 - h_2 = h$ (fig. 97), obtenemos:

$$v_2 = \sqrt{2gh},$$

es decir, la velocidad adquirida por el chorro partiendo de la altura h es igual a la velocidad adquirida por un cuerpo que cae libremente desde la misma altura.

§ 41. Aplicación de la ley de la conservación de la cantidad de movimiento a un fluido. A cualquier volumen de líquido que fluye, lo mismo que a cualquier cuerpo que se mueve, se puede aplicar la ley de la conservación de la cantidad de movimiento (§ 20). Si la cantidad de movimiento del volumen del líquido varía en la magnitud $\Delta K = m\Delta v$, otro volumen de líquido o el sólido con que el líquido está en contacto deberá experimentar simultáneamente

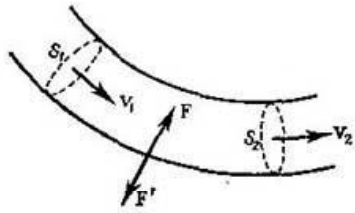


Fig. 98. El líquido que fluye por un tubo curvilíneo, actúa sobre éste con una fuerza de reacción F'.

una variación de signo contrario en su cantidad de movimiento: $\Delta K' = -\Delta K$. Al movimiento de los líquidos se puede aplicar también la ley de la conservación del momento de la cantidad de movimiento (§ 37).

La aplicación de estas leyes permite resolver una serie de problemas, por ejemplo el de la reacción del líquido que fluye sobre las paredes del recipiente.

Si el chorro del líquido sale del orificio a del recipiente (fig. 97), su velocidad aumentará y adquirirá cierta cantidad de movimiento. Si no actúan fuerzas exteriores, la cantidad de movimiento total del sistema recipiente-líquido permanecerá constante. Por eso, el recipiente adquirirá una cantidad de movimiento igual a la adquirida por el chorro. El recipiente se desplazará en sentido contrario al del movimiento del líquido. Efectivamente, si colocamos el recipiente en una carretilla de manera que pueda moverse libremente, al salir el líquido del recipiente la carretilla empezará a desplazarse en sentido contrario al de salida del líquido.

La reacción del chorro que sale se utiliza como fuerza motriz en los proyectiles-cohetes y en los motores de retropropulsión.

En la ley de la conservación de la cantidad de movimiento se basa también la acción de las hélices (marinas o aéreas). La hélice de un barco origina un movimiento hacia atrás, además, toda la masa de agua que lanza hacia atrás la hélice, adquiere cierta cantidad de movimiento. Según la ley de la conservación de la cantidad de movimiento, el barco adquirirá la misma cantidad de movimiento. Basándose en el mismo principio funciona la hélice de un avión, que lanza hacia atrás una masa de aire; en este caso, el aire, desde el punto

de vista mecánico, se puede considerar como un líquido (compresible).

La cantidad de movimiento es una magnitud vectorial, por eso, la variación de la cantidad de movimiento de cierto volumen de un líquido, tiene lugar no sólo cuando la velocidad cambia de valor numérico, sino también cuando cambia de dirección.

Al fluir un líquido por un tubo curvilíneo (fig. 98) con una velocidad de magnitud constante v, la cantidad de movimiento de cualquier volumen del líquido varía constantemente debido a la desviación (viraje) del tubo de corriente del líquido. En el intervalo de tiempo Δt, a través de cierta sección S_1 del tubo pasa una masa de líquido $m = \rho S_1 v_1 \Delta t$, donde ρ es la densidad del líquido, y v_1, la magnitud de la velocidad del mismo.

La cantidad de movimiento de esta masa de líquido será

$$\mathbf{K}_1 = \rho S_1 v_1 \cdot \mathbf{v}_1 \Delta t;$$

aquí $\mathbf{v}_1$ es el vector velocidad del líquido que pasa por la sección S_1. En la segunda sección del tubo S_2, la cantidad de movimiento de la misma masa de líquido será

$$\mathbf{K}_2 = \rho S_2 v_2 \cdot \mathbf{v}_2 \Delta t.$$

Supongamos que la sección del tubo es constante: $S_1 = S_2 = S$, entonces $v_1 = v_2 = v$ y para la variación de la cantidad de movimiento obtenemos que

$$\Delta \mathbf{K} = \mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_1 = \rho S v (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \Delta t. \qquad (1)$$

Esta variación de la cantidad de movimiento debe ser igual al impulso de las fuerzas que actúan sobre el líquido de parte de las paredes del tubo. Llamando $\mathbf{F}$ la fuerza resultante que actúa sobre el líquido, tenemos, según la (1)

$$\mathbf{F} \cdot \Delta t = \Delta \mathbf{K} = \rho S v (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \Delta t,$$

de donde

$$\mathbf{F} = \rho S v (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1). \qquad (2)$$

Según la tercera ley de Newton, la fuerza $\mathbf{F}'$, de magnitud igual a la $\mathbf{F}$, pero de sentido opuesto, actuará de parte del líquido sobre las paredes del tubo.

De esta manera tenemos que el líquido que pasa por un tubo curvilíneo actúa sobre el tubo con una fuerza de reacción $\mathbf{F}'$ (fig. 98) dirigida en sentido contrario al de la curvatura del tubo.

La reacción del líquido que fluye sobre las paredes de un tubo curvilíneo se utiliza en las turbinas de vapor y de agua. Los chorros de líquido o de vapor, al pasar por los canales curvilíneos de la rueda de la turbina, crean una fuerza de reacción cuyo momento origina la rotación de la rueda de la turbina.

En máquinas de otros tipos, la corriente de líquido o de vapor sale de un tubo inmóvil y choca contra las paletas de la rueda de la turbina. Las paletas desvían la corriente del líquido o del vapor y, como consecuencia de ello, la corriente experimenta una variación de su cantidad de movimiento. La fuerza de la reacción que actúa sobre las paletas origina la rotación de la rueda de la turbina. El momento de las fuerzas será máximo cuando lo sea la variación de la cantidad de movimiento de la corriente del líquido o del vapor. Por eso, a las paletas de la rueda de la turbina se les da tal forma, que la corriente, al pasar junto a las paletas (sin choque), pierda la mayor cantidad posible de su velocidad.

La reacción de la corriente que sale se utiliza como fuerza motriz en el movimiento reactivo, por ejemplo, en los cohetes o en los

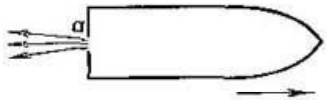


Fig. 99. Proyectil reactivo.

proyectiles-cohetes. En la cámara del cohete se produce la combustión de la mezcla explosiva. Los gases producidos en la combustión salen a través de una tobera especial *a* situada en la parte posterior del proyectil (fig. 99). Gracias a la gran velocidad de salida de los gases, la cantidad de movimiento adquirida por los mismos es muy grande. Una cantidad de movimiento igual, pero de sentido contrario, adquirirá el cohete, lo cual origina su movimiento de avance.

Para comunicar velocidad a un cohete, no es necesario que haya acción mutua con otros cuerpos o con el medio ambiente. Por eso, el cohete puede desplazarse en el vacío.

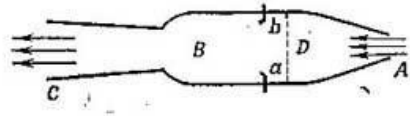
El pionero de la aplicación del movimiento reactivo fue el eminente inventor soviético Constantín Tsiolkovski (1857—1935) que no sólo estableció los fundamentos del cálculo del movimiento a reacción, sino también proyectos de cohetes para investigar las altas capas de la atmósfera y del espacio cósmico.

Los satélites artificiales (spútniks) de la Tierra y los cohetes cósmicos se ponen en órbita con ayuda de cohetes de varias etapas, ya que en el caso de los cohetes de una sola etapa, sería demasiado grande la masa a la cual habría que comunicar la velocidad orbital. Tsiolkovski fue el primero en plantear el principio de los cohetes de varias etapas o múltiple. El cohete utiliza un combustible químico, y cada trámo del cohete tiene sus depósitos para el combustible y para el comburente. Veamos el esquema de movimiento de un cohete de tres etapas. Se empieza por quemar el combustible del motor de la primera etapa poniendo en movimiento a todo el cohete como una unidad. Cuando el combustible de la primera etapa se ha agotado, ésta se separa y el vuelo ulterior del cohete continúa con ayuda del motor de la segunda etapa. Al terminar de funcionar ésta, la segunda etapa,

a su vez, se separa y continúa el vuelo la tercera etapa, cuya masa es mucho menor que la de todo el cohete. Debido a esto, con la misma fuerza de la reacción, la aceleración de la última etapa, es mucho mayor y puede alcanzar grandes velocidades.

Junto con el principio indicado del cohete, en la actualidad se utiliza otro principio de movimiento a reacción, usado en los llamados motores pulsorreactores. El esquema de un motor pulsorreactor viene representado en la fig. 100. En la parte anterior del motor va un difusor A para aspirar el aire. El aire que entra por el difusor,

Fig. 100. Motor pulsorreactor.



pasa a través de un sistema de válvulas D y va a la cámara de combustión B. El combustible se inyecta pulverizado por los inyectores a y b, cerrándose las válvulas al comenzar la combustión. Al arder, el combustible calienta el aire, y la mezcla de este aire con los gases de la combustión sale a través de la tobera del motor C a gran velocidad. La cantidad de movimiento total de los chorros que salen del motor y entran en él aumenta. Según la ley de la conservación de la cantidad de movimiento, el propio motor adquirirá una cantidad de movimiento dirigida hacia adelante e igual al aumento de la cantidad de movimiento de los chorros.

En los modernos motores de aviación a reacción, el aire que mantiene la combustión, se inyecta mediante bombas especiales. La bomba es accionada por una turbina movida por el chorro de gas que sale de la cámara de combustión. La acción reactiva del chorro crea la tracción útil del motor. Los motores de esta clase se denominan turborreactivos. El motor turborreactivo de aviación se diferencia del simple motor a reacción utilizado en el cohete, en que en él, para la combustión del combustible se utiliza el oxígeno del aire atmosférico y no un comburente que, además del combustible, lleva en sus depósitos el cohete. Gracias a ello, la masa total de combustible para un motor turborreactivo es mucho menor que para un motor reactivo. Esta ventaja del motor turborreactivo lo hace más útil para los aviones que el simple motor a reacción. Sin embargo, el motor turborreactivo no puede funcionar a alturas muy grandes donde la densidad del aire atmosférico es muy pequeña, y no sirve para los vuelos fuera de los límites de la atmósfera terrestre.

Gran valor práctico para el cálculo del movimiento de los cohetes tienen los trabajos de I. V. Meschersk i (1859-1935), que fue el primero en elaborar la teoría del movimiento de los cuerpos cuya masa varía con el tiempo por adherirse al cuerpo o separarse de él determinadas masas. I. V. Meschersk i demostró

que para el cuerpo de masa variable m, que se desplaza en movimiento de traslación, tiene lugar la siguiente ecuación de movimiento:

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F} + \frac{dm_1}{dt}\cdot \mathbf{v}_1 - \frac{dm_2}{dt}\cdot \mathbf{v}_2, \qquad (3)$$

donde v es la velocidad del cuerpo; F, el vector resultante de las fuerzas exteriores; m_1, la masa que se adhiere al cuerpo; m_2, la masa que se separa del mismo, y $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ las velocidades de estas masas. En el caso de que $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ sean iguales a cero, esta ecuación se transforma en la siguiente:

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F},$$

que es equivalente al sistema de ecuaciones (8a) del § 20.

Al estudiar el movimiento reactivo (cuando solamente hay masas que se separan), es cómodo transformar la ecuación (3) y darle la siguiente forma:

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F} + \frac{dm_2}{dt}\cdot(\mathbf{v} - \mathbf{v}_2),$$

donde w es la aceleración del cuerpo.

Esta última ecuación demuestra que un cuerpo de masa variable satisface la ecuación general del movimiento, si se añade al vector resultante de las uerzas exteriores el término $\frac{dm_2}{dt}\cdot(\mathbf{v} - \mathbf{v}_2)$, que es igual al producto de la velocidad relativa del cuerpo y de la masa despedida $\mathbf{v} - \mathbf{v}_2$ por la derivada de la masa despedida respecto al tiempo.

§ 42. Movimiento del líquido viscoso. En todos los líquidos reales, al desplazarse unas capas respecto a otras, surgen fuerzas más o menos importantes de rozamiento. De parte de la capa que

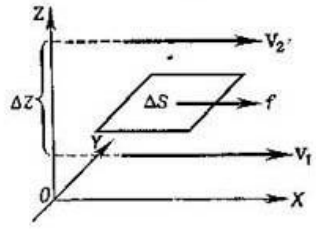


Fig. 101. Origen de las fuerzas de rozamiento interno.

se desplaza más rápidamente actúa una fuerza aceleradora sobre la que se desplaza más despacio. Y viceversa, del lado de la capa que se desplaza más despacio actúa una fuerza de retención sobre la que se desplaza con más rapidez. Estas fuerzas, que se denominan *fuerzas de rozamiento interno*, van dirigidas tangencialmente a la superficie de las capas. La magnitud de la fuerza de rozamiento interno f será tanto mayor cuanto mayor sea el área del elemento superficial ΔS de la capa que examinamos, y depende de la rapidez con que varíe la velocidad de la corriente del líquido v al pasar de una capa a la otra. Sean dos capas (fig. 101) que se hallan a la distancia Δz una

de la otra y que se desplazan respectivamente a las velocidades v_1 y v_2. Pongamos que $v_1 - v_2 = \Delta v$. La distancia Δz entre las capas se mide según la dirección perpendicular a las velocidades de las corrientes de las capas. La magnitud $\Delta v/\Delta z$, que representa la rapidez con que varía la velocidad al pasar de una capa a otra, se denomina *gradiente de velocidad*. La fuerza de rozamiento interno f es proporcional al gradiente de velocidad, de manera que

$$f = \eta \frac{\Delta v}{\Delta z} \Delta S. \qquad (1)$$

La magnitud η, que depende de la naturaleza del líquido, se denomina *coeficiente de viscosidad*. Cuanto mayor sea el coeficiente de viscosidad, tanto mayor se diferenciará este líquido del líquido perfecto, y tanto mayores serán las fuerzas de rozamiento interno que surjan en él.

La dimensión del coeficiente de viscosidad, como es fácil de ver, es de $L^{-1}MT^{-1}$. Así pues, en el sistema *CGS*, la viscosidad se mide en $cm^{-1}\ g\ s^{-1}$. Esta unidad de viscosidad se denomina *poise* en honor del científico francés Poiseuille.

La viscosidad de un líquido depende en alto grado de la temperatura, disminuyendo aquélla con la elevación de ésta. Así tenemos que la viscosidad del agua a 0° C es de $\eta_0 = 0{,}01775\ cm^{-1}\ g\ s^{-1}$, y a 90° C es $\eta_{90} = 0{,}00320\ cm^{-1}\ g\ s^{-1}$. Una gran dependencia de la temperatura se observa en la viscosidad de los aceites; por ejemplo, la del aceite de ricino, al elevarse la temperatura desde los 18° C hasta los 40° C, se hace cerca de cuatro veces menor. Abajo se dan los valores de los coeficientes de viscosidad de ciertos líquidos:

Líquido	Coeficiente de viscosidad η en poises		
	$T = 0°$ C	$T = 15°$ C	$T = 99°$ C
Agua . . .	$1{,}8 \cdot 10^{-2}$	$1{,}1 \cdot 10^{-2}$	$0{,}29 \cdot 10^{-2}$
Mercurio . .	$1{,}7 \cdot 10^{-2}$	$1{,}6 \cdot 10^{-2}$	$1{,}2 \cdot 10^{-2}$
Eter	$0{,}29 \cdot 10^{-2}$	$0{,}25 \cdot 10^{-2}$	—
Glicerina	46	15	—

La corriente de los gases se puede considerar también como una corriente de líquidos, pero hay que tener en cuenta primeramente que el coeficiente de viscosidad de los gases es mucho menor que el de los líquidos y, en segundo lugar, la compresibilidad de los gases. Con el aumento de la temperatura, la viscosidad de los gases no disminuye, como en los líquidos, sino que aumenta un poco, como se ve en la siguiente tabla:

Gas	Coeficiente de viscosidad η en poises		
	$T = 0°$ C	$T = 15°$ C	$T = 99°$ C
Hidrógeno	$86 \cdot 10^{-6}$	$89 \cdot 10^{-6}$	$106 \cdot 10^{-6}$
Vapor de agua . . .	$90 \cdot 10^{-6}$	$97 \cdot 10^{-6}$	$131 \cdot 10^{-6}$
Aire	$171 \cdot 10^{-6}$	$181 \cdot 10^{-6}$	$220 \cdot 10^{-6}$
Argón . . .	$210 \cdot 10^{-6}$	$221 \cdot 10^{-6}$	—

P. L. Kapitsa descubrió que el helio líquido, a la temperatura de unos —271° C, adquiere un estado particular de «superfluidez», en el cual la viscosidad prácticamente es igual a cero. Las observaciones sobre el movimiento del helio en estado de superfluidez a través de finos capilares y grietas han demostrado que su viscosidad es menor de 10^{-11} poises o quiza menos. El helio líquido, que ha pasado al estado de superfluidez se denomina «helio II». El paso del helio corriente («helio I») al helio II constituye la llamada transición de fase de segunda especie (transición a lo largo de la línea λ) cuando ciertas propiedades (por ejemplo, la viscosidad) varían a saltos, y otras (por ejemplo, la elasticidad del vapor), varían gradualmente. Al estado de superfluidez pasa solamente el isótopo principal del helio He^4.

La superfluidez conduce a la aparición de otros fenómenos específicos: habiendo gradientes térmicos en el helio líquido, surgen corrientes muy intensas. A la temperatura de 2,19° K, se presenta una mezcla de helio superfluido y helio normal que pueden fluir uno al encuentro del otro.

Con el fenómeno de la superfluidez está relacionado el llamado *efecto termomecánico*, que consiste en que el descenso de temperatura que surge a lo largo de una estrecha grieta o capilar fino, causa la aparición de una diferencia de presiones complementaria. Así tenemos que si introducimos un capilar en el helio II y calentamos su extremo superior, del capilar empieza a brotar una fuente de helio.

La teoría hidrodinámica de la superfluidez la ha desarrollado muy detalladamente el físico soviético L. D. Landau. En esta teoría al volumen elemental se le aplican dos vectores velocidad contrapuestos: el del movimiento superfluido y el normal. De esta manera se supone que el helio, a temperaturas muy bajas, es una mezcla de dos líquidos que pueden desplazarse independientemente uno del otro. Uno de estos líquidos (el superfluido) no ofrece rozamiento y puede introducirse en los intersticios más estrechos y fluir por los capilares más finos. P. L. Kapitsa observó una rápida fluencia del helio superfluido entre dos placas planas paralelas que formaban un intersticio de $5 \cdot 10^{-5}$ cm. El otro componente del helio es un líquido

normal de viscosidad sensible y que no puede fluir por los capilares y grietas finos.

La teoría de Landau predijo otro nuevo fenómeno: el de propagación de las ondas de temperatura. Este fenómeno lo observó experimentalmente y lo estudió V. P. Peshkov y recibió el nombre de segundo sonido en el helio II.

La corriente del líquido que hemos examinado se denomina *laminar* (del latín «lamina»), ya que las capas del líquido parece que resbalan unas sobre otras. Al desplazarse un líquido por un tubo, con el aumento de la velocidad la corriente va perdiendo el carácter laminar y se hace desordenada. Aparecen componentes de la velocidad perpendiculares al eje del tubo. En cada punto del líquido se producen desviaciones desordenadas del vector velocidad respecto a su valor medio. Este movimiento (régimen) se denomina *turbulento*.

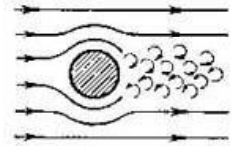


Fig. 102. Formación de torbellinos.

El paso del régimen laminar al turbulento en los tubos o canales acarrea un aumento brusco de la resistencia.

Al pasar un líquido viscoso por un cuerpo, con el aumento de la velocidad cambia el carácter del régimen y se transforma en *turbulento*. La corriente del líquido que se separa de la superficie de contacto del cuerpo, se descompone en distintos *torbellinos*. Los torbellinos que se forman por detrás del cuerpo (fig. 102) son arrastrados por la corriente y se extinguen gradualmente.

La ecuación de Bernoulli, hablando rigurosamente, no es aplicable a los líquidos viscosos ya que parte de la energía, en el interior del tubo de corriente, se transforma en calor debido al trabajo de las fuerzas de rozamiento. Sin embargo, prácticamente, la ecuación de Bernoulli sólo es inaplicable a los líquidos muy viscosos. Para un líquido como el agua, la ecuación de Bernoulli se cumple prácticamente con bastante exactitud.

El rozamiento lo caracteriza una magnitud sin dimensiones denominada *número de Reynolds R*:

$$R = \frac{\rho v l}{\eta},$$

donde l es una dimensión lineal característica para la corriente de líquido que examinamos. En el caso de fluir el líquido por un tubo, l es el radio del tubo, v, la velocidad media del líquido. La relación η/ρ se denomina *coeficiente (módulo) cinemático de viscosidad* (*coeficiente de viscosidad cinética* o simplemente *viscosidad cinética*).

Para aclarar la función que desempeña el número de Reynolds, examinemos un volumen (cubo) elemental de líquido, de longitud de arista l. La energía cinética de este volumen es

$$E_c = \frac{\rho v^2}{2} l^3.$$

La fuerza de rozamiento que actúa sobre el volumen elemental del líquido es proporcional a su superficie l^2, al coeficiente de viscosidad η y al gradiente de velocidad. Suponiendo que la velocidad disminuye hasta cero a una distancia de orden igual a la magnitud l (en el caso de fluir por un tubo, va dirigida según el radio), el gradiente de velocidad es igual a v/l. De esta manera tenemos que la fuerza de rozamiento:

$$f = \eta l^2 \frac{v}{l} = \eta v l.$$

El trabajo de esta fuerza en el trayecto l es:

$$A = fl = \eta v l^2.$$

La función desempeñada por el rozamiento al fluir el líquido es pequeña, si el trabajo A es pequeño respecto a la energía cinética del volumen del líquido E_c, es decir, si se cumple la desigualdad:

$$\eta v l^2 \ll \frac{\rho v^2}{2} l^3$$

o

$$\frac{\rho v l}{\eta} \gg 1,$$

pero $\frac{\rho v l}{\eta} = R$ es el número de Reynolds. De esta manera tenemos que la función de la fuerza de rozamiento al fluir un líquido es pequeña, si el número de Reynolds es grande.

Al fluir un líquilo por un tubo, el paso del régimen laminar al turbulento se produce a un valor del número de Reynolds denominado crítico. Para el flujo del agua por un tubo, $R_{cr} \approx 1200$.

Examinemos el fenómeno que surge al desplazarse un sólido por un líquido. En lugar de considerar el sólido en movimiento y el líquido en reposo, se puede suponer lo contrario: considerar el sólido fijo y sometido a la acción de una corriente uniforme de líquido. Primeramente consideraremos que el líquido es perfecto, es decir, no viscoso. Supongamos que el sólido es un cilindro circular infinito de eje perpendicular a las líneas de corriente no perturbadas (fig. 103). Las líneas de corriente pasarán simétricamente por ambos lados del cilindro. En los puntos A y D la velocidad del líquido es igual a cero. En los puntos B y C las líneas de corriente se estrechan y aquí la velocidad del líquido es mayor que en la corriente no perturbada. Por eso, la presión en los puntos A y D será mayor que la presión estática del líquido p, y en los puntos B y C, la presión será menor. Si v es la velocidad en el flujo no perturbado, según la ecuación de Bernoulli [fórmula (3a) del § 40], la presión en el punto A será

$$p_A = p + \frac{\rho v^2}{2},$$

ya que la velocidad del líquido junto a la superficie del cuerpo en el punto A la consideramos igual a cero ($v_A = 0$). Así tenemos que la presión en el punto A es mayor que la estática p. Este aumento de presión tendrá lugar también en el punto D. A primera vista puede parecer que en el punto D la presión debería de ser menor que p, pero no es así. Efectivamente, cerca del punto A, en el flujo, la velocidad de las partículas del líquido disminuye, por consiguiente, sobre las partículas del líquido actúa una fuerza dirigida hacia

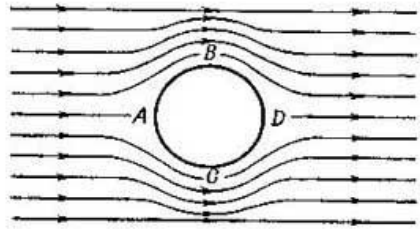


Fig. 103. Sólido fijo sometido a la acción de una corriente uniforme de líquido no viscoso.

la izquierda, y sobre el cuerpo según la tercera ley de Newton en el punto A actuará una fuerza dirigida hacia la derecha. Cerca del punto D, la velocidad de las partículas del líquido aumenta, por consiguiente, sobre éstas actúa una fuerza dirigida hacia la derecha, y sobre el punto D una dirigida hacia la izquierda.

Examinemos ahora la presión que actúa sobre el cuerpo en el punto B. Para determinarla hay que conocer la velocidad del líquido junto a la superficie del cuerpo en este punto. Considerando que a una distancia aproximadamente igual al radio del cilindro, el flujo queda no perturbado, obtenemos que la velocidad $v_B = 2v$, por lo tanto, según la ecuación de Bernoulli:

$$p_B + \frac{4\rho v^2}{2} = p + \frac{\rho v^2}{2} \text{ de donde hallamos que } p_B = p - \frac{3\rho v^2}{2}.$$

La presión en el punto B resulta menor que la estática p. Esta misma presión habrá en el punto C. Como se ve, la disminución de la presión en los puntos B y C es mayor que el aumento de la presión en los puntos A y D. Debido a la simetría del sistema, la suma de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo de parte del líquido circundante, será igual a cero: $\Sigma f_i = 0$. De esto se deduce que *al desplazarse el cuerpo en el seno de un líquido no viscoso no debe experimentar ninguna resistencia.*

Al desplazarse un cuerpo por un fluido viscoso, aparece cierta resistencia. Su origen es debido a dos causas. A pequeñas velocidades y en un cuerpo currentilíneo, cuando no se forman torbellinos, la fuerza de resistencia es debida solamente a la viscosidad del líquido. La capa de líquido que está en contacto directo con el cuerpo, se pega

a la superficie de éste y es arrastrada completamente por él. La siguiente capa del líquido ya es arrastrada con menos velocidad. Por consiguiente, entre las capas surge una fuerza de rozamiento.

En este caso, *la fuerza de resistencia, según la ley establecida por Stokes, es directamente proporcional a la velocidad, al coeficiente de viscosidad y a las dimensiones del cuerpo.*

Para las esferas que se desplazan por un líquido viscoso, según la ley de Stokes, la fuerza de resistencia es:

$$f = 6\pi\eta r v, \tag{2}$$

donde η es el coeficiente de viscosidad del líquido; r, el radio de la esfera y v, su velocidad.

Por la fórmula de Stokes (2) se puede determinar la velocidad uniforme de caída de una esfera en el seno de un líquido viscoso. Una esfera pesada, en un líquido viscoso, solamente en el primer momento empieza a caer con movimiento acelerado; pero a medida que aumenta la velocidad de caída, aumenta la fuerza de rozamiento f, la cual empieza a equilibrar la fuerza de la gravedad P que actúa sobre la esfera. Cuando se ha conseguido este equilibrio de fuerzas, la esfera cae con movimiento uniforme a la velocidad constante v determinada, según la fórmula (2), por la condición:

$$P = 6\pi\eta r v. \tag{3}$$

La fuerza P, que actúa sobre la esfera sumergida en el líquido, según el principio de Arquímedes, es $P_0 - P_1$, donde P_0, es el peso real de la esfera, y P_1, el peso de un volumen del líquido igual al de la esfera; por lo tanto $P = P_0 - P_1 = (\rho - \rho')\, g \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$, donde ρ es la densidad de la esfera y ρ', la densidad del líquido. Colocando este valor de P en la (3) hallamos que

$$v = \frac{2(\rho - \rho')\, g r^2}{9\eta}, \tag{4}$$

De la fórmula (4) se ve que la velocidad de caída de una esfera en el seno de un líquido viscoso es proporcional al cuadrado de su radio r. Cuanto menor sea la esfera, tanto más despacio caerá en el seno del líquido dado. La fórmula de Stokes se puede aplicar no sólo a la caída de esferas en el seno de líquido, sino también a la caída de esferitas pequeñas en el seno de un gas, que en este caso se puede considerar como líquido viscoso. Por ejemplo, la velocidad de caída de las pequeñas gotas de la niebla en el aire se determina muy bien por la fórmula (4).

Al caracterizar el movimiento de una esfera en un líquido viscoso con ayuda del número de Reynolds, por v se sobreentiende la velocidad relativa del flujo alejado infinitamente de la esfera, y por l, el diámetro de la esfera. La ley de Stokes se cumple para valores pequeños del número de Reynolds.

Para la similitud dinámica de diferentes cuerpos que se desplazan por el interior de un líquido, es necesario que los números de Reynolds sean iguales. Al modelar el movimiento de los buques, aviones, etc., siendo menores las dimensiones de los modelos ($l_2 < l_1$), si el coeficiente de viscosidad del fluido para el modelo y para el objeto natural es el mismo, la velocidad de la corriente para el modelo deberá ser mayor: $v_2 > v_1$. Para no recurrir a muy grandes velocidades al experimentar el modelo, se debe tomar un fluido de menor módulo cinemático de viscosidad.

La segunda clase de fuerzas de resistencia en un fluido viscoso, de la cual ya se ha hablado antes, está relacionada con la formación de torbellinos. Parte del trabajo realizado al desplazarse un cuerpo por un fluido se invierte en la formación de torbellinos. La energía de los torbellinos, debido al rozamiento interno del fluido, al fin

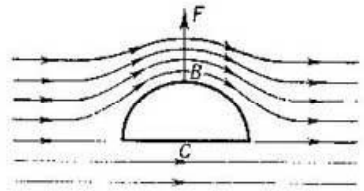


Fig. 104. Sólido asimétrico en una corriente de líquido no viscoso. La suma de las fuerzas aplicadas al cuerpo de parte del líquido no es igual a cero.

y al cabo se transforma en calor. A pequeñas velocidades, no se forman torbellinos, y la resistencia que sufre el cuerpo es relativamente pequeña. Al aumentar la velocidad, empiezan a aparecer torbellinos y la fuerza de resistencia aumenta bruscamente. Al construir barcos y aviones es muy importante el que tengan una forma currentilínea de modo que, a ser posible, no se formen torbellinos. La fuerza de resistencia debida a la formación de torbellinos a pequeñas velocidades es proporcional al cuadrado de la velocidad. A velocidades próximas a la del sonido en el medio dado, la resistencia es proporcional al cubo de la velocidad, y a velocidades supersónicas de nuevo se hace proporcional al cuadrado de la misma.

En el caso de un líquido no viscoso que circunda un cuerpo asimétrico, la suma de las fuerzas aplicadas al cuerpo de parte del líquido, no es igual a cero. Para simplificar, examinemos un cuerpo de forma de semicilindro de longitud infinita (fig. 104). En este caso, las líneas de corriente son paralelas a la superficie plana C, y la presión ejercida sobre esta superficie es p. La presión en el punto B, según lo dicho anteriormente, será menor: $p_B < p$. Por consiguiente surge una fuerza resultante $F = \Sigma f_i \neq 0$; esta fuerza es perpendicular a las líneas de corriente en el flujo no perturbado. No arrastra al cuerpo en dirección de la corriente (en el líquido perfecto), sino que tiende a desplazarlo.

Si un líquido viscoso circunda un cuerpo asimétrico, la fuerza resultante F que actúa sobre el cuerpo de parte del líquido, no es

perpendicular a las líneas de corriente. En este caso se puede descomponer en dos fuerzas: F_{res} dirigida según la corriente, y F_{sust} dirigida perpendicularmente a la corriente.

En estas fuerzas se basa la acción del ala del avión. La fuerza F_{res} determina la resistencia al avance (resistencia frontal), y la fuerza F_{sust} la sustentación (fig. 105).

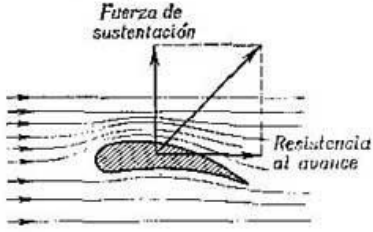
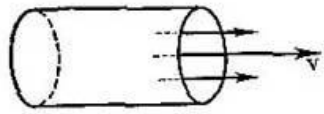


Fig. 105. Origen de la fuerza de sustentación del ala del avión.

El primero que desarrolló la teoría de la sustentación del ala del avión fue N. E. Zhukovski (Joukowsky) (1847—1921), fundador de la aerodinámica teórica, técnica y experimental, «padre de la aviación rusa» como le llamó V. I. Lenin.

Veamos, además, el régimen laminar de un líquido viscoso que fluye por un tubo. En este caso, debido a las fuerzas de rozamiento interno, la velocidad de la corriente del líquido será mayor en el centro del tubo (fig. 106). Junto a las paredes y en contacto con ellas, la velocidad será igual a cero. Estudiemos un

Fig. 106. En un líquido viscoso que fluye por un tubo, la velocidad máxima v corresponderá a las partículas, cuya trayectoria coincida con el eje del tubo.



trozo de tubo de radio R y de longitud l. Supongamos que el líquido fluye de izquierda a derecha debido a la diferencia de presiones $p_1 - p_2$.

Separemos mentalmente una capa cilíndrica de líquido (fig. 107) de radio

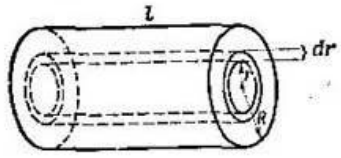


Fig. 107. En una capa cilíndrica de radio r, el líquido fluye a la misma velocidad

interno r y de espesor dr. Desde la parte interior actúa sobre esta capa una fuerza de rozamiento interno:

$$f = \eta \frac{dv}{dr} S;$$

donde S es el área lateral de la capa cilíndrica, que es igual a $2\pi rl$, de donde

$$f = 2\pi rl\eta \frac{dv}{dr}. \qquad (5)$$

Por la parte exterior, sobre la capa actúa la fuerza $f_1 = f + df$ dirigida en sentido contrario al de la fuerza f (la fuerza f acelera el movimiento de la capa, y la fuerza f_1 lo frena).

Su suma será

$$-f_1 + f = -(f + df) + f = -df.$$

Poniendo en lugar de f su valor según la (5), tenemos que

$$-df = -2\pi l \eta d \left(r \frac{dv}{dr} \right).$$

Como la velocidad del líquido en el centro del tubo es la máxima, el valor dv/dr será negativo, y la fuerza $-df$ positiva. Esta fuerza, en régimen estacionario, debe ser igual a la fuerza que actúa sobre la capa debido a la diferencia de presiones $p_1 - p_2$; y como esta última fuerza es proporcional al área de la sección transversal de la capa $S' = 2\pi r\, dr$, tenemos que

$$-2\pi l \eta d \left(r \frac{dv}{dr} \right) = 2\pi r\, dr\, (p_1 - p_2), \text{ de donde } d\left(r \frac{dv}{dr} \right) = -\frac{p_1 - p_2}{l\eta} r\, dr.$$

Integrando esta ecuación tenemos

$$r \frac{dv}{dr} = -\frac{p_1 - p_2}{2l\eta} r^2 + C \text{ o } \frac{dv}{dr} = -\frac{p_1 - p_2}{2l\eta} r + \frac{C}{r}.$$

Suponiendo que $r = 0$ y observando que en el eje del tubo, donde la velocidad v es máxima, dv/dr también es igual a cero, obtenemos que la constante de integración $C = 0$. De aquí obtenemos la ecuación diferencial que determina la velocidad de la corriente del líquido v en función de la distancia al eje del tubo r:

$$dv = -\frac{p_1 - p_2}{2l\eta} r\, dr.$$

Integrando esta expresión obtenemos que

$$v = -\frac{p_1 - p_2}{2l\eta} \int r\, dr = -\frac{p_1 - p_2}{4l\eta} r^2 + C'.$$

El valor de la constante C' lo obtenemos suponiendo $r = R$, de donde $v = 0$, y

$$C' = \frac{p_1 - p_2}{4l\eta} R^2,$$

con lo cual obtenemos para v el valor

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4l\eta} (R^2 - r^2). \tag{6}$$

Esta fórmula nos da la velocidad de la corriente del líquido en función de la distancia al eje del tubo.

Ahora determinemos el volumen V de líquido que sale del tubo en un tiempo determinado t. De la capa cilíndrica de radio r y espesor dr (fig. 107), en el tiempo t sale un volumen de líquido

$$dV = vt \cdot 2\pi r\, dr.$$

Sustituyendo v por su valor, según la (6), obtenemos

$$dV = \frac{\pi (p_1 - p_2)\, t}{2l\pi} (R^2 r - r^3)\, dr.$$

Integrando esta expresión entre los límites 0 y R, obtenemos el volumen V de líquido que sale por la sección transversal del tubo

$$V = \frac{\pi (p_1 - p_2)\, t}{2l\eta} \int_0^R (R^2 r - r^3)\, dr, \text{ de donde}$$

$$V = \frac{\pi (p_1 - p_2)\, t}{2l\eta} \left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right), \text{ y } V = \frac{1}{\eta} \frac{\pi R^4}{8l} (p_1 - p_2)\, t. \qquad (7)$$

La fórmula (7) se denomina *fórmula de Poiseuille*, y señala la gran influencia que tiene el radio del tubo sobre la cantidad de líquido que pasa por él (es proporcional a R^4). La fórmula de Poiseuille no sirve para el régimen turbulento.

Sabiendo el volumen de líquido que pasa por un tubo de longitud l y radio R dados, mediante la fórmula de Poiseuille se puede determinar la viscosidad η. Los aparatos destinados a determinar la viscosidad, se denominan *viscosímetros*.

SEGUNDA PARTE

FISICA MOLECULAR

CAPITULO VII

Gases

§ 43. Teoría atómico-molecular de la constitución de la materia. La idea de que la materia está compuesta de diminutos elementos indivisibles o «átomos» fue expresada ya por los antiguos griegos. Pero fue M. V. Lomonósov el primero que en sus trabajos desarrolló ampliamente la hipótesis atómica. Lomonósov intentó fundamentar la Física sobre la idea de que todos los cuerpos químicos simples están formados por un gran número de partículas indivisibles, completamente iguales o átomos. En los cuerpos químicos compuestos el papel de partículas elementales lo desempeñan las moléculas. Apoyándose en su ley general de la conservación de la materia y del movimiento, Lomonósov demostró por primera vez la justeza de la idea del movimiento (agitación) térmico continuo de los átomos y de las moléculas.

Una vez que la teoría atómica hizo su aparición en la Química, fue posible determinar, basándose en la ley de las proporciones simples y múltiples, los pesos relativos (o mejor dicho, las masas) de los átomos, es decir, los números que indican cuántas veces la masa de un átomo dado es mayor o menor que la de otro átomo cualquiera. En la actualidad existen también procedimientos físicos (véase el t. II) para la comparación de las masas (pesos) de determinados átomos o moléculas. *Los pesos relativos de los átomos* se llaman

pesos atómicos A. Como unidad de peso atómico se toma $^1/_{16}$ *del peso del átomo de oxígeno**). Por consiguiente, de acuerdo con esta definición, el peso atómico del oxígeno es igual a 16,0000. El peso atómico del más ligero de los elementos, es decir, del hidrógeno, es igual a 1,0078, lo cual quiere decir, que el átomo del hidrógeno tiene una masa $\frac{16,0000}{1,0078} = 15,8762$ veces menor que la del átomo de oxígeno. De igual forma, el peso atómico del mercurio, igual a 200,61, indica que la masa del átomo de mercurio es $\frac{200,61}{16,0000} = 12,538$ veces mayor que la masa del átomo de oxígeno y $\frac{200,61}{1,0078} = 199,06$ veces mayor que la del átomo de hidrógeno**).

El peso relativo de las moléculas, referido a esta misma unidad, es igual a $^1/_{16}$ *del peso del átomo de oxígeno y se denomina peso molecular* μ.

Tomemos una masa determinada, por ejemplo, m gramos de hidrógeno, cuyo peso atómico designamos con la letra A. Estos m gramos de hidrógeno contendrán un número determinado n de átomos. Tomemos asimismo una determinada cantidad de otro elemento, cuyo peso atómico sea A', de forma que contenga también n átomos. La masa de los n átomos de este segundo elemento será, evidentemente, $\frac{A'}{A}$ veces mayor que la masa de los átomos de hidrógeno. Por consiguiente, la masa de esta cantidad del elemento en cuestión será igual a $m' = m\frac{A'}{A}$. De aquí se deduce que podemos decir también: que si entre las masas de los diversos elementos que se toman existe la misma relación que entre sus pesos atómicos, estas masas contienen igual número de átomos.

Se llama átomo-gramo, de cualquier elemento, la cantidad de dicho elemento cuya masa, expresada en gramos, sea numéricamente igual a su peso atómico. En este caso, basándonos en lo antedicho, tendremos, que: *un átomo-gramo de cualquier elemento contiene siempre el mismo número de átomos.* Este número se designa con la letra N y se conoce con el nombre de *número de Avogadro.*

---

*) En la actualidad, se ha adoptado una nueva escala de pesos atómicos basada en la unidad de carbono y definida como el 1/12 de la masa de carbono ^{12}C (es decir, $^{12}C = 12,00000$).

En la presente obra todos los cálculos se basan en la unidad de oxígeno. (*N. de la Edit.*)

**) En la actualidad, sabemos que casi todos los elementos tienen varias clases de átomos, que sólo se diferencian entre sí por su masa (peso atómico). Estos átomos se denominan *isótopos* del mismo elemento (véase el t. II). Los métodos químicos para determinar los pesos atómicos proporcionan el peso atómico medio de la mezcla natural de los isótopos.

Se llama molécula-gramo, de cualquier substancia, la cantidad de dicha substancia cuya masa, expresada en gramos, es numéricamente igual a su peso molecular. Como quiera que los pesos moleculares se determinan con relación a la misma unidad (1/16 del peso del átomo de oxígeno) que los pesos atómicos, la molécula-gramo de cualquier substancia contiene tantas moléculas como átomos contiene el átomo-gramo. De donde, *la molécula-gramo de cualquier substancia contiene siempre un mismo número de moléculas, el cual es igual al número de Avogadro.*

La molécula-gramo se denomina frecuentemente *mol*. El mol es una unidad de masa que tiene un valor especial para cada cuerpo químico. Por ejemplo, para el hidrógeno molecular el mol es una unidad de masa igual a 2 g, mientras que para el oxígeno molecular es igual a 32 g.

Actualmente existen muchos procedimientos para determinar el número de Avogadro; más adelante tendremos ocasión de conocer algunos de ellos (§ 52), pero ahora nos limitaremos a dar su valor numérico:

$$N = 6{,}023 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}.$$

El número de Avogadro representa la cantidad de partículas que contiene una masa determinada de la substancia de que se trate, es decir, un mol, y, por lo tanto, tiene una magnitud $[N] = M^{-1}$, la cual se mide en unidades que se designan por $\frac{1}{\text{mol}}$ ó mol^{-1}.

El valor del número de Avogadro nos da una idea del tamaño del «micromundo», es decir, del mundo de los átomos y de las moléculas, y nos permite comprender hasta qué punto es diminuta la estructura granular de la substancia establecida por la teoría atómico-molecular. Conociendo el número de Avogadro podemos calcular las dimensiones de las moléculas y sus masas absolutas. Tomemos, por ejemplo, 1 cm^3 de agua; su masa será igual a 1 g, lo que equivale a $\frac{1}{18}$ de mol de agua; por consiguiente, 1 cm^3 de agua contiene $\frac{6{,}02}{18} \cdot 10^{23} = 3{,}34 \cdot 10^{22}$ moléculas de agua. Por lo tanto, el volumen de una molécula de agua líquida será igual a $\frac{1}{3{,}34 \cdot 10^{22}}$ $\text{cm}^3 \cong$ $\cong 3 \cdot 10^{-23}$ cm^3. Teniendo en cuenta que las moléculas de los líquidos se encuentran muy próximas entre sí, hallaremos, que las dimensiones lineales de las moléculas de agua representan de por sí una magnitud del orden de $r = \sqrt[3]{3 \cdot 10^{-23}}$ cm $\cong 3 \cdot 10^{-8}$ cm. Las dimensiones lineales de otros átomos y moléculas también son magnitudes del orden de 10^{-8} cm. Para formarnos una idea más concreta de las dimensiones de los átomos y de las moléculas, examinaremos los dos ejemplos siguientes: 1) si todos los átomos, que integran un centímetro

cúbico de cobre, se colocaran unos detrás de otros, formarían una cadena de cerca de 14 000 millones de kilómetros de longitud, es decir, una distancia casi 90 veces mayor que la que hay entre la Tierra y el Sol; 2) el microscopio electrónico permite observar microcristales cuyas dimensiones lineales son de centésimas de micra. Cada uno de estos microcristales contiene varios centenares de millares de átomos.

A pesar de que las dimensiones de los átomos son tan diminutas, la Física moderna cuenta con procedimientos para demostrar directamente que la estructura de la materia es discontinua (o como suele decirse, *discreta*) y con métodos para observar directamente átomos aislados; esto último es sólo posible en aquellos casos en que los átomos tienen una cantidad de energía suficientemente grande, es decir, cuando se mueven a grandes velocidades.

La masa m de una molécula (o de un átomo) puede hallarse partiendo de la relación:

$$m = \frac{\mu}{N}, \qquad (1)$$

donde μ es el peso molecular (cuando se trata de elementos es el peso atómico) y N, el número de Avogadro.

La relación (1) nos da, para el átomo de hidrógeno, una masa $m_H = 1{,}675 \cdot 10^{-24}$ g. De donde hallamos, que la unidad de peso atómico, es decir, 1/16 de la masa del átomo de oxígeno, es igual a $1{,}662 \cdot 10^{-24}$ g. De esta forma, la masa absoluta de cualquier átomo será:

$$m = 1{,}662 \cdot 10^{-24} \cdot A \text{ g}, \qquad (2)$$

donde A es el peso atómico del átomo cuya masa se determina.

Substituyendo en la fórmula (2) el peso atómico A por el peso molecular μ, podemos obtener la masa absoluta de cualquier molécula.

Toda una serie de observaciones nos llevan a la convicción de que en toda substancia *existe un movimiento interno continuo. Este movimiento interno representa de por sí el movimiento de las moléculas que componen la substancia en cuestión, el cual es desordenado, no se interrumpe nunca y depende exclusivamente*, como veremos más adelante, *de la temperatura de la substancia.*

La existencia de este movimiento se demuestra, por ejemplo, con el siguiente experimento: si dos recipientes A y B, que se comunican entre sí (fig. 108), contienen gases diferentes, por ejemplo, uno hidrógeno y otro nitrógeno, y abrimos la llave de paso C, al cabo de cierto tiempo en ambos recipientes habrá una mezcla homogénea de los dos gases. Es decir, los gases se mezclan totalmente por sí solos. Esta mezcla se produce incluso cuando el hidrógeno se encuentra en el recipiente superior A y, por consiguiente, queda excluida

toda posibilidad de que este cuerpo, como menos denso, pueda descender o de que, en general, pueda producirse la mezcla de los dos gases bajo la influencia de la gravedad.

El fenómeno descubierto por Brown en 1826 demuestra más directamente aún la existencia de un movimiento caótico de las moléculas. Brown observó al microscopio cómo unas diminutas partículas suspendidas en un líquido se encontraban en movimiento constante y desordenado; cuanto menor era la partícula, tanto más intenso era su movimiento. Este movimiento, denominado *browniano*, que no se interrumpe nunca ni depende de causas externas, es una manifestación del movimiento interno de la materia. Las moléculas del líquido, que se encuentran en movimiento, al chocar con un cuerpo sólido cualquiera le comunican cierta cantidad de movimiento. Si el cuerpo que se encuentra en el líquido es grande, el número de moléculas que por todas partes chocan con él es extraordinariamente elevado, pero sus golpes se compensan entre sí en cada momento, por lo que dicho cuerpo, prácticamente, continúa inmóvil. Pero cuando el cuerpo es suficientemente pequeño puede ocurrir que esta compensación no sea total, es decir, que casualmente cualquiera de sus lados reciba un número considerablemente mayor de impactos de moléculas que los demás y, como resultado, el cuerpo se pondrá en movimiento. *Las partículas brownianas realizan precisamente un movimiento* de este tipo *impulsadas por la acción de los golpes casuales que reciben de las moléculas.* La masa de las partículas brownianas es millares de millones de veces mayor que la de cada molécula, su velocidad es muy pequeña comparada con la de éstas, pero su movimiento tiene la propiedad de poder observarse al microscopio.

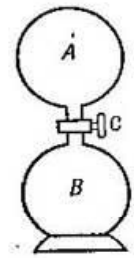


Fig. 108. Los gases que hay en los recipientes *A* y *B* comienzan a difundirse recíprocamente cuando se abre la llave de paso *C*.

En la fig. 109 se muestran las posiciones individuales sucesivas de varias partículas brownianas, señaladas de acuerdo con las observaciones llevadas a cabo con el microscopio a intervalos determinados. Las partículas suspendidas en un gas realizan también movimientos brownianos.

Por consiguiente, la materia no sólo tiene estructura granular, es decir, no sólo está formada por partículas independientes entre sí, sino que estas partículas se encuentran constantemente en movimiento. De aquí se deduce, que la teoría de la constitución de la materia es de por sí *una teoría cinético-molecular.* Esta teoría fue

desarrollada primeramente por M. V. Lomonósov para explicar las propiedades de la materia en sus diversos estados de agregación. Después, la teoría cinético-molecular se utilizó principalmente para explicar las propiedades de la materia en su estado de agregación más simple, es decir, en estado gaseoso. No obstante, antes de pasar a exponer los fundamentos de la teoría cinético-molecular, examinaremos las leyes empíricas a que se sujetan los gases.

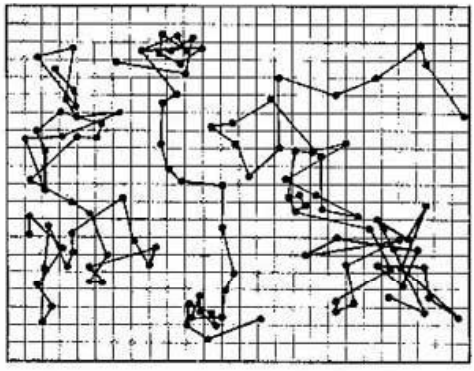


Fig. 109. Posiciones sucesivas de tres partículas brownianas señaladas cada 30 segundos.

§ 44. Leyes de Boyle-Mariotte y de Gay-Lussac. Determinación de la temperatura. Los gases tienen la propiedad de llenar por completo las vasijas en que se encuentran y de ejercer presión sobre las paredes que limitan dichas vasijas. La presión p es una magnitud física que numéricamente es igual a la fuerza que actúa perpendicularmente a la unidad de superficie. Por consiguiente, si la fuerza que actúa normalmente a la superficie S es igual a f_n, tendremos que:

$$p = \frac{f_n}{S}. \qquad (1)$$

En el sistema *CGS* se toma como unidad de presión p la *baria*, que es igual a la presión que ejerce 1 dina sobre una superficie de 1 cm^2 perpendicular a ella*).

En el sistema internacional *MKS* se toma como unidad la presión que ejerce 1 newton sobre 1 m^2 de superficie perpendicular a la dirección de dicha fuerza. Esta unidad se representa por N/m^2; es evidente que 1 $N/m^2 = 10$ barias. Para medir la presión se utilizan también las siguientes unidades: 1) *la atmósfera técnica* (at), igual a la presión de 1 kgf/cm^2; 2) *la atmósfera física* (atm), igual a la presión de 1,033 kgf/cm^2; 3) *el torr*, que es la presión que ejerce una columna de mercurio de 1 mm de altura (torr o mm Hg). La

*) En meteorología se suele emplear una unidad llamada bar, que es 10^6 veces mayor que la indicada (*N. del T.*).

presión de 760 torr es igual a una atmósfera física. A continuación damos el cuadro de equivalencias mutuas entre estas unidades:

$$1 \text{ atm} = 1{,}033 \text{ at} = 1033 \text{ gf/cm}^2 = 760 \text{ torr} =$$
$$= 1033 \cdot 981 \text{ barias} = 1{,}013 \cdot 10^6 \text{ barias}.$$

Cualquier cantidad de gas se caracteriza por las cuatro magnitudes siguientes: 1) su masa m, 2) el volumen que ocupa V, 3) la presión a que se encuentra p, 4) su temperatura t; todas estas magnitudes se encuentran en mutua dependencia y al variar una de ellas, por regla general, varían todas las demás. La fórmula que regula las relaciones entre todas estas magnitudes se llama *ecuación de estado*.

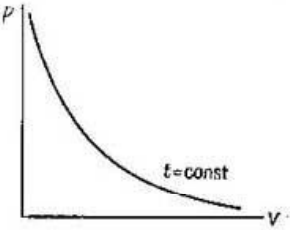


Fig. 110. Isoterma de Boyle-Mariotte.

Antes de dar la expresión de la ecuación general de estado de los gases, trataremos de otras leyes empíricas más simples, referentes al caso en que dos de las cuatro magnitudes indicadas se mantienen constantes.

A temperatura constante, la presión que experimenta una masa determinada de gas es inversamente proporcional a su volumen (ley de Boyle-Mariotte).

$$pV = \text{const (cuando } m \text{ y } t \text{ son constantes).} \qquad (2)$$

La curva que relaciona gráficamente p con V, para una masa m dada y una temperatura t constante, es una hipérbola equilátera (fig. 110). Como esta curva se refiere a una temperatura constante, se llama *isoterma*.

La ley de Boyle-Mariotte es aproximada, como se señaló ya en el § 2. A grandes presiones todos los gases se comprimen menos de lo que expresa la ley de Boyle-Mariotte. Sin embargo, la mayoría de los gases, a temperaturas próximas a la del ambiente y a presiones que no difieran mucho de la atmosférica, cumplen la ley de Boyle-Mariotte con una exactitud bastante grande.

A continuación vamos a referirnos a las leyes que relacionan entre sí la presión o el volumen del gas con su temperatura. No obstante, es conveniente determinar con anterioridad de qué manera se mide la propia temperatura. El calentamiento o enfriamiento de los cuerpos, es decir, sus cambios de temperatura, influyen en casi todas sus cualidades físicas: varían sus dimensiones lineales, cambian sus cualidades elásticas, su conductividad eléctrica, etc. Cualquiera de estas variaciones puede utilizarse para medir la temperatura. Histó-

ricamente, como sabemos, se ha establecido el método de medición de la temperatura por la variación que experimenta el volumen del mercurio, valiéndose de los llamados termómetros de mercurio. Sin embargo, el procedimiento generalmente descrito de graduar el termómetro de mercurio se reduce a dividir su escala *en partes iguales, suponiendo de antemano* que el volumen del mercurio varía linealmente con respecto a las variaciones de la temperatura t. Pero si llenamos el termómetro con otro líquido y hacemos que dos de sus puntos coincidan con los correspondientes del termómetro de mercurio (por ejemplo, con el punto «0», correspondiente a la temperatura de fusión del hielo, y con el punto «100», correspondiente a la de ebullición del agua), y después dividimos su escala en partes iguales, veremos que las indicaciones de este termómetro para las temperaturas intermedias (aunque se diferencien poco) no coincidirán con las del termómetro de mercurio. De esta forma, la escala de temperaturas establecida depende de la substancia («termométrica») cuyas variaciones de volumen nos sirven para medirlas. Como la elección de dicha substancia (el mercurio) ha sido casual, también resulta casual la propia escala de temperaturas. Aunque no contamos todavía con ninguna base teórica para la elección de la substancia termométrica, podemos admitir que, en calidad de ésta, debe elegirse aquella cuyas propiedades restantes se rijan por las leyes más simples. Es decir, para substancia termométrica se puede elegir el gas que mejor cumple la ley de Boyle-Mariotte. El Comité Internacional de Pesas y Medidas decidió, en 1877, elegir como substancia termométrica el hidrógeno y practicar las mediciones de temperatura con un termómetro lleno de este gas, *considerando las variaciones de la temperatura proporcionales a las de la presión del hidrógeno*, cuyo volumen se mantiene constante al calentarlo o enfriarlo.

De esta forma, *se postula que la presión del hidrógeno varía linealmente con la temperatura*:

$$p_t = p_0 (1 + \alpha t), \tag{3}$$

donde p_t es la presión del hidrógeno a la temperatura t; p_0, esta misma presión a cero grados; y α, un coeficiente constante. *La igualdad* (3), *referida al hidrógeno, sirve para determinar la escala de temperaturas* (es decir, la llamada *escala empírica de temperaturas*). Si consideramos que la temperatura de fusión del hielo es igual a 0° y que la temperatura de ebullición del agua, a la presión atmosférica, es igual a 100° (*escala de Celsius o centígrada*), el coeficiente α tendrá el valor numérico de $\frac{1}{273{,}13} = 0{,}0036613$ grados^{-1}.

Una vez establecido el procedimiento a emplear cuando se miden las temperaturas, podemos hacernos la pregunta: ¿cómo dependen la presión y el volumen de cualquier gas de su temperatura? *Las leyes* empíricas *de Gay-Lussac* nos dan esta dependencia.

1. A volumen constante, la presión de una masa de gas dada varía en relación lineal con la temperatura:

$$p_t = p_0 (1 + \alpha_p t). \quad (4)$$

2. A presión constante, el volumen de una masa determinada de gas varía en relación lineal con la temperatura:

$$V_t = V_0 (1 + \alpha_V t). \quad (5)$$

El coeficiente α_p se llama coeficiente térmico de presión, y el α_V, coeficiente térmico de dilatación cúbica. Las correlaciones (4) y (5) son aproximadas para todos los gases a excepción del hidrógeno, el cual, por definición, cumple exactamente la correlación (4). El valor de los coeficientes también es aproximadamente igual para todos los gases:

$$\alpha_V = \alpha_p = \alpha = \frac{1}{273} \text{ grados}^{-1}. \quad (6)$$

En la tabla II se dan los valores empíricos del producto pV para algunos gases reales, a temperatura constante y diferentes presiones p. Para construir la tabla se tomó 1 litro de cada gas a 0° C y a 1 atm. De esta forma, para cada uno de los gases a $p = 1$ atm, el producto pV es igual a la unidad. Según la ley de Boyle-Mariotte este producto debería conservar su valor a cualquier presión.

Tabla II

Valores del producto pV a 0° C para distintas p

p_{atm}	pV			
	H_2	N_2	O_2	Aire
1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
100	1,0690	0,9941	0,9265	0,9730
200	1,1380	1,0483	0,9140	1,0100
500	1,3565	1,3900	1,1560	1,3400
1000	1,7200	2,0685	1,7355	1,9920

Como puede verse en la tabla II, en el intervalo de presiones comprendido entre 1 atm y 100 atm la discrepancia con la ley de Boyle-Mariotte no es muy grande: el producto pV conserva un valor próximo a la unidad. Sin embargo, para el hidrógeno este valor resulta algo mayor que la unidad, mientras que para el N_2, O_2, y el aire, es un poco menor que ésta. Esto quiere decir que el hidrógeno se comprime algo menos de lo que exige la ley de Boyle-Mariotte, mientras que los gases restantes se comprimen un poco más.

Pero a la presión de 1 000 atm todos los gases discrepan mucho de dicha ley (esta discrepancia llega a ser de dos veces y pico para

el nitrógeno), comprimiéndose menos de lo que por ella se podía esperar.

Las diferencias son aún mayores cuando las presiones son muy altas.

Por ejemplo, a la presión de 15 000 kgf/cm² el volumen del nitrógeno es 16 veces mayor que el que debería tener según la ley de Boyle-Mariotte.

También son muy notorias las discrepancias de los gases reales con la ley de Gay — Lussac.

Tabla III

Valores de los coeficientes α_p y α_V para los gases

Gas	$\alpha_p \cdot 10^7$	$\alpha_V \cdot 10^7$
H_2. . . .	36 613	36 600
He	36 601	36 582
N_2	36 744	36 732
CO_2	37 262	37 414
Aire	36 750	36 760

Como vemos en la tabla III, los valores de α_p y α_V no coinciden para un mismo gas; para el anhídrido carbónico la diferencia entre α_p y α_V alcanza un 0,4%. También existen ciertas diferencias entre los coeficientes α_p y α_V de los distintos gases.

Finalmente, los valores de α_p y α_V resultan algo diferentes para un mismo gas, según sea el intervalo de temperaturas en que se hayan determinado.

De acuerdo con las fórmulas (4) y (5) tenemos, que

$$\alpha_p = \frac{p - p_0}{p_0 t}, \quad \alpha_V = \frac{V - V_0}{V_0 t},$$

donde p_0 y V_0 son la presión y el volumen a 0° C y p y V estas mismas magnitudes a la temperatura t. Midiendo p y V, por ejemplo, a $t = 50$ °C, hallaremos el valor medio de α_p y α_V para el intervalo de temperaturas comprendido entre 0 y 50° C. Por la ley de Gay-Lussac los valores de α_p y α_V no deberían depender de la temperatura t que se tomase.

Pero como muestra la tabla IV, con relación al aire, en la práctica también se observa una pequeña discrepancia en el cumplimiento de esta condición de la ley antedicha.

Como puede verse, esta diferencia es muy pequeña, sobre todo para α_p. No obstante, un termómetro de gas, lleno de aire en lugar de hidrógeno, daría ciertos errores al medir las temperaturas.

Un gas hipotético que cumpla exactamente las leyes de Boyle-Mariotte y de Gay—Lussac y que se caracterice por los valores $\alpha_p = \alpha_V = \alpha = \frac{1}{273{,}13} \cong \frac{1}{273}$, se llama *gas perfecto o gas ideal.* Las cua-

Tabla IV

Valores de α_p y α_V para el aire, a $p = 1$ atm, para diferentes intervalos de temperatura

	Intervalos de temperatura (°C)			
	0—50°	0—100°	0—150°	0—200°
$\alpha_p \cdot 10^6$	3675	3675	3674	3674
$\alpha_V \cdot 10^6$	3676	3674	3673	3672

lidades del «gas perfecto» no son más que aproximaciones más o menos exactas a las cualidades de los gases reales.

Llamando Δ_p a la variación $p_t - p_0$ de la presión del gas, por la fórmula (4) obtenemos:

$$\Delta p = p_0 \alpha t, \tag{4a}$$

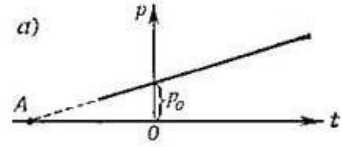
y si en la fórmula (5) designamos por ΔV la variación del volumen

$$\Delta V = V_0 \alpha t. \tag{5a}$$

De la fórmula (4a) se deduce, que al elevar la temperatura de un gas perfecto en 1° C, su presión (a volumen constante) aumenta en $\frac{1}{273}$ de la presión que tenía a 0° C.

De la misma manera, por la fórmula (5a) tenemos que al elevar la temperatura de un gas perfecto en 1° C, su volumen (a presión constante) aumenta en $\frac{1}{273}$ del volumen que tenía a 0° C.

La relación entre la presión del gas y su temperatura, a volumen constante, se representa gráficamente por una recta que corta al eje de ordenadas en un punto, el cual corresponde al valor de p_0 (fig. 111,*a*). Esta línea se llama *isocora*, lo que quiere decir, que se refiere a volúmenes constantes.



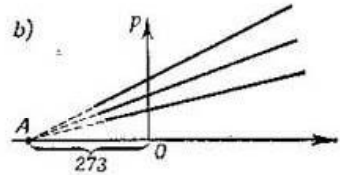


Fig. 111. a) La relación de dependencia entre la presión del gas p y la temperatura se representa por una recta (isocora); b) todas las isocoras, correspondientes a cualquier cantidad de gas, cortan el eje de abscisas en un mismo punto A.

Para masas de gas distintas, p_0 tendrá valores distintos y las isocoras representarán una familia de rectas, que cortará al eje de ordenadas a diferentes alturas (fig. 111,*b*); sin embargo, todas estas

rectas cortarán al eje de abscisas en un mismo punto A, cuyo valor será $t = -\frac{1}{\alpha} \cong -273°$ C, puesto que por la fórmula (4) $p_t = 0$ cuando $t = -\frac{1}{\alpha}$, cualquiera que sea el valor de p_0.

De igual manera, la relación entre el volumen del gas y su temperatura, a presión constante, se representa gráficamente por una recta que corta el eje de ordenadas en un punto, el cual corresponde al valor de V_0 (*isobara*).

Para masas de gas distintas obtenemos una familia de rectas que cortan al eje de ordenadas a diferentes alturas, pero que tienen

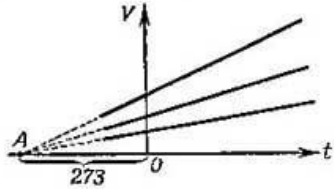


Fig. 112. Todas las rectas, correspondientes a cualquier cantidad de gas, que representan cómo depende el volumen V de éste de su temperatura t, cortan el eje de abscisas en un mismo punto A.

un punto de intersección A, situado en el eje de abscisas, donde $t = -\frac{1}{\alpha} \cong -273°$ C (fig. 112).

De las figuras 111,*b* y 112 se deduce, que las fórmulas que expresan la dependencia que existe entre la presión o el volumen del gas y la temperatura pueden simplificarse trasladando el origen de coordenadas al punto A. Efectivamente, introduciendo una nueva escala de temperaturas, cuyos grados tengan la misma magnitud que los de *la escala centígrada*, pero cuyo cero se encuentre a $-273°$ C (y representando por T la temperatura en dicha escala), tendremos:

$$T = t + 273° \text{ C},^*) \tag{7}$$

de donde $t = T - 273° \text{ C} = T - \frac{1}{\alpha}$, y de acuerdo con la (4)

$$p_T = p_0\left[1 + \alpha\left(T - \frac{1}{\alpha}\right)\right],$$

es decir

$$p_T = p_0 \alpha T. \tag{8}$$

Análogamente tendremos que

$$V_T = V_0 \alpha T. \tag{9}$$

Esta escala de temperaturas lleva el nombre *de Kelvin* y sus grados se representan por °K. Por la fórmula (8) tenemos, que la presión del gas a volumen constante es directamente proporcional a la temperatura por la escala de Kelvin. Análogamente, por la fórmula (9),

*) Más exactamente, $T = t + 273{,}13°$ C.

el volumen del gas a presión constante es directamente proporcional a la temperatura por la escala de Kelvin. Cuando $T = 0$, por las fórmulas (8) y (9) obtenemos que $p = 0$ y $V = 0$ respectivamente; pero en la práctica el volumen del gas nunca puede llegar a ser igual a cero.

Esta absurda deducción es el resultado de una extrapolación incorrecta de las leyes de Gay-Lussac a temperaturas excesivamente bajas; porque cualquier gas real se transforma en líquido y se solidifica antes de alcanzar la temperatura $t = -273°$ C. No obstante, la escala de Kelvin y el valor de la temperatura cero de la misma tienen un sentido físico determinado, como veremos más adelante. Por esto, la escala de Kelvin se denomina frecuentemente *escala absoluta* y el cero de dicha escala (que se encuentra a $-273{,}13°$ C), *cero absoluto*.

§ 45. Ecuación de estado de los gases perfectos. Densidad de los gases. Sea una masa determinada de gas m, que ocupe un volumen V_1, y que se encuentre a la presión p_1 y a la temperatura T_1. Supongamos que, en otro estado, esta misma masa de gas se caracteriza por el volumen, presión y temperatura V_2, p_2 y T_2. Establezcamos, sobre la base de las leyes de Boyle-Mariotte y de Gay—Lussac, la relación que existe entre V_1, p_1, T_1 y V_2, p_2, T_2.

Para esto, partiendo del estado V_1, p_1, T_1, empezamos por calentar el gas a presión constante p_1, hasta la temperatura T_2. El volumen del gas pasará a ser V', y por la fórmula (9) del § 44 tendremos:

$$V' = V_1 \frac{T_2}{T_1}. \tag{1}$$

Como resultado de este calentamiento, el gas se encontrará en un estado que se caracterizará por el volumen V', la presión p_1 y la temperatura T_2, por lo cual, podemos hacer que pase al estado definitivo V_2, p_2, T_2, variando por vía isoterma su volumen, para lo que, según la ley de Boyle-Mariotte, tendremos:

$$p_1 V' = p_2 V_2.$$

Poniendo en esta expresión el valor de V' de la fórmula (1), obtenemos:

$$p_1 V_1 \frac{T_2}{T_1} = p_2 V_2 \quad \text{o} \quad \frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2},$$

de donde se deduce, que al variar el estado de una masa de gas dada, la magnitud $\frac{pV}{T}$ permanece constante:

$$\frac{pV}{T} = B. \tag{2}$$

La ecuación (2) fue deducida (en 1834) por el ingeniero francés Clapeyron, el cual desempeñó durante muchos años el cargo de

profesor en el Instituto de vías de comunicación de San Petersburgo. El valor numérico de la constante B de esta ecuación depende de la cantidad de gas que se toma y de las unidades en que se miden p, V y T.

Según la ley de Avogadro, *las moléculas-gramo de los distintos gases, a igualdad de presión y temperatura, ocupan el mismo volumen.* A la temperatura $t = 0°$ C y a la presión $p = 1$ atm, la molécula-gramo de cualquier gas ocupa un volumen igual a 22,41 l.

De aquí se deduce, que si la correlación (2) no se refiere a una cantidad cualquiera de gas, sino *a un mol, la constante B tendrá un mismo valor para todos los gases.*

Esta constante universal para todos los gases se designa con la letra R y se denomina *constante de los gases.* Poniendo en la fórmula (2), en lugar de V, el volumen molar V_0 (es decir, el volumen de una molécula-gramo de gas), obtenemos

$$pV_0 = RT. \tag{3}$$

El volumen molar V_0 tiene las dimensiones L^3/mol y se mide en l/mol o en cm^3/mol. La fórmula (3) es la ecuación de estado. En realidad esta ecuación sólo la satisfacen los gases perfectos, mientras que para los gases reales es únicamente aproximada, lo mismo que las leyes de Boyle-Mariotte y Gay-Lussac de las que se deriva. Por esta razón es de hecho la ecuación de estado de los gases perfectos.

La ecuación (3), que es una generalización de la (2), fue establecida por D. I. Mendeléiev, el cual la dio a conocer por primera vez en la asamblea de la Sociedad Físico-Química Rusa en 1874, publicándola después en 1875. Por esto, en adelante llamaremos a la expresión (3) fórmula de Mendeléiev-Clapeyron.

El valor numérico de R se puede deducir partiendo de que, cuando $t = 0°$ C, es decir, cuando $T = 273°$ K y $p = 1$ atm, el volumen de un mol $V_0 = 22{,}4$ l/mol, de donde

$$R = \frac{pV_0}{T} = \frac{1 \cdot 22{,}4}{273} \text{ l atm/grado mol} = 0{,}082 \text{ l atm/grado mol.} \tag{4}$$

El valor de R en el sistema *CGS* se obtiene expresando la presión p en barias y el volumen molar V_0 en cm^3/mol:

$$R = \frac{1033 \cdot 981 \cdot 22{,}4 \cdot 10^3}{273} \text{ barias cm}^3\text{/grado mol} =$$

$$= 8{,}31 \cdot 10^7 \text{ ergios/grado mol.} \tag{4a*}$$

La denominación de la unidad de medida de la constante de los gases, ergios/grado mol, procede de que la baria = dina/cm^2, de donde la baria cm^3 = dina cm = ergio.

*) Más exactamente

$R = 8{,}313 \cdot 10^7$ ergios grado mol = 0,08204 l atm/grado mol.

La fórmula (3), que solamente es válida para un mol de gas, puede generalizarse con facilidad para cualquier masa. Para esto, se representa por μ el peso molecular del gas; entonces, si a una presión y temperatura determinadas, un mol de gas ocupa un volumen molar V_0, m gramos de gas ocuparán a esta misma presión y temperatura un volumen $V = \frac{m}{\mu} V_0$. De donde se deduce que, para m gramos de gas, a la presión y temperatura dadas, la expresión pV/T también será m/μ veces mayor que la constante de los gases R, pero como pV/T permanece constante para todos los cambios del gas, tendremos que, en general, para m gramos de gas

$$\frac{pV}{T} = \frac{m}{\mu} R, \text{ de donde } pV = \frac{m}{\mu} RT. \tag{5}$$

La fórmula (5) es de por sí una generalización de la de Mendeléiev-Clapeyron, aplicable a cualquier masa m de cualquier gas; en este caso, la constante R es la misma para todos los gases y su valor numérico es el que se da en la expresión (4) ó (4a).

La fórmula (5) relaciona las cuatro magnitudes m, p, V y T, que caracterizan la cantidad de gas dada. Conociendo tres de estas magnitudes, la fórmula (5) nos permite calcular la cuarta.

Partiendo de esta fórmula (5) se determina directamente *la densidad del gas*:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT}. \tag{6}$$

De esta forma, la densidad del gas resulta ser directamente proporcional a su peso molecular y a su presión e inversamente proporcional a su temperatura absoluta.

En los gases se utiliza frecuentemente *la densidad relativa*, es decir, la relación que existe entre la densidad del gas dado ρ y la densidad ρ_0 de un gas determinado, que se considera como patrón, tomado a la misma presión y temperatura que el gas que se examina. En este caso

$$\rho = \frac{p\mu}{RT}, \quad \rho_0 = \frac{p\mu_0}{RT},$$

de donde la densidad relativa

$$\rho' = \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{\mu}{\mu_0}. \tag{7}$$

La densidad relativa se toma generalmente con relación al hidrógeno, para el cual $\mu_0 = 2$ aproximadamente; por consiguiente, la densidad relativa:

$$\rho'_{H_2} = \frac{1}{2} \mu. \tag{7a}$$

Esta fórmula permite establecer el peso molecular de los gases midiendo su densidad relativa con respecto al hidrógeno.

Examinemos unos ejemplos sobre el empleo de la fórmula de Mendeléiev — Clapeyron y sobre la determinación de la densidad de los gases.

Ejemplo 1. ¿Qué volumen, en litros, ocupará 1 g de nitrógeno ($\mu = 28$) a la presión de 380 mm Hg y temperatura de 27° C?

Solución. Por la fórmula (5) tenemos:

$$V = \frac{mRT}{\mu p}.$$

Reducimos la presión p de mm Hg a atmósferas:

$$p = \frac{380}{760}\,\text{atm} = 0{,}5\ \text{atm}.$$

Reducimos la temperatura a la escala de Kelvin:

$$T = t + 273° = 300°,$$

y tomamos para la constante de los gases el valor

$$R = 0{,}082\ \text{l atm/grado mol},$$

entonces

$$V = \frac{1 \cdot 0{,}082 \cdot 300}{28 \cdot 0{,}5}\,\text{l} = 1{,}75\ \text{l}.$$

Ejemplo 2. ¿A qué es igual la densidad del hidrógeno ($\mu = 2$) a 0°C y a la presión de 1 atm?

Solución. Por la fórmula (6):

$$\rho = \frac{p\mu}{RT}.$$

Si todas las magnitudes que entran en el segundo miembro de esta expresión se toman por el sistema *CGS*, es decir, μ en g/mol; p, en barias; R, en ergios/grado mol y T, en grados Kelvin; ρ resultará en g/cm³.

Si empleamos el sistema mixto siguiente: R en l atm/grado mol; μ, en g/mol; p, en atm y T, en grados Kelvin; ρ resultará en g/l, es decir, en un sistema en el cual se toma como unidad de densidad un cuerpo cuyo gramo-masa tiene el volumen de 1 l.

Es evidente, que del valor numérico de la densidad en g/l podemos pasar al valor numérico de la misma en g/cm³ dividiendo el primero de ellos por 1000. Es decir, este ejemplo puede resolverse por dos procedimientos:

1) reducimos la presión a barias: $p = 1$ atm $= 1033 \cdot 981$ barias $= 1{,}013 \cdot 10^6$ barias, y tenemos

$$\rho = \frac{2 \cdot 1{,}013 \cdot 10^6}{8{,}31 \cdot 10^7 \cdot 273}\,\text{g/cm}^3 = 8{,}9 \cdot 10^{-5}\ \text{g/cm}^3;$$

2) empleamos el sistema mixto indicado anteriormente, y entonces

$$\rho = \frac{2 \cdot 1}{0{,}082 \cdot 273}\,\text{g/l} = 8{,}9 \cdot 10^{-2}\ \text{g/l} = 8{,}9 \cdot 10^{-5}\ \text{g/cm}^3.$$

§ 46. Conceptos fundamentales de la teoría cinética de los gases. La densidad de los gases en condiciones normales (es decir, a 0°C y a la presión de 1 atm) es aproximadamente 1 000 veces menor que

la de los líquidos. En los líquidos las moléculas están en estrecho contacto unas con otras, de donde puede deducirse, que las distancias que hay entre las moléculas de los gases son aproximadamente $\sqrt[3]{1\,000}$, es decir, decenas de veces mayores que las dimensiones de las propias moléculas. Por lo tanto, puede considerarse, que todo gas es un conjunto de moléculas separadas entre sí por intervalos suficientemente grandes. Las moléculas se mueven en desorden, recorriendo libremente el espacio que media entre dos choques consecutivos entre sí o con las paredes de la vasija que contiene el gas. Las fuerzas que ejercen las moléculas entre sí, salvo en el momento de los choques, son tan pequeñas que pueden despreciarse. Las moléculas no pierden energía cuando chocan entre sí o con las paredes, es decir, cumplen las leyes de los choques entre esferas perfectamente elásticas. Este modelo mecánico del gas, considerado como un conjunto de moléculas esféricas elásticas, que se mueven libre y desordenadamente, está demasiado simplificado, pero permite explicar las principales cualidades de los gases. Más adelante veremos cómo hay que desarrollar este modelo para que se ajuste más exactamente a las propiedades de los gases reales. Las cualidades de los gases reales no se pueden explicar partiendo exclusivamente de conceptos mecánicos. Teniendo en cuenta lo dicho en el § 31 sobre los límites que existen en la utilización de la mecánica clásica, en general, debemos plantearnos la pregunta de hasta qué punto es posible emplear en este modelo la concepción de las moléculas como partículas que se mueven según las leyes de la mecánica clásica.

En el § 31 dimos a conocer la relación, según la cual, la indeterminación de la coordenada Δx y de la componente de la velocidad Δv_x deben satisfacer la desigualdad:

$$\Delta x \cdot \Delta v_x > \frac{h}{m}.$$

Apliquemos esta correlación a la molécula que se mueve en un gas en condiciones normales. En calidad de gas podemos tomar el nitrógeno, cuya molécula tiene una masa $m = 4{,}7 \cdot 10^{-23}$g. Como veremos más adelante, las moléculas que se encuentran en estas condiciones tienen unos recorridos medios, sin chocar con otras moléculas, del orden de 10^{-5} cm y una velocidad del orden de 400 m/s. Por lo tanto, para poder hablar del carácter del movimiento de las moléculas, hay que tener la posibilidad de fijar sus posiciones con una exactitud mínima $\Delta x \sim 10^{-6}$ cm. Entonces, según el principio de la incertidumbre, la indeterminación de la velocidad será:

$$\Delta v_x \sim \frac{h}{m} \cdot \frac{1}{\Delta x} = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-27}}{4{,}7 \cdot 10^{-23} \cdot 10^{-6}} \text{ cm/s} \cong 1{,}4 \cdot 10^{2} \text{ cm/s},$$

es decir, cerca de 1/3% de la velocidad.

De esta forma, dentro de los límites de precisión que necesitamos, podemos considerar la molécula como una partícula en el sentido ordinario de la palabra. A presiones muy elevadas, cuando las moléculas se encuentran mucho más cerca unas de otras (y hay que tomar para Δx valores más pequeños), o a temperaturas muy bajas, cuando es pequeña la velocidad de las propias moléculas, estas consideraciones no sirven.

El modelo del gas como conjunto de partículas que se mueven libremente permite, en primer lugar, explicar directamente la propiedad que tienen los gases de llenar totalmente las vasijas que los

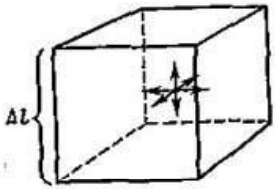


Fig. 113. Promediación del movimiento de las moléculas en un recipiente cúbico.

contienen y de penetrar unos en otros (difusión). Los choques de las moléculas son los que originan la presión del gas sobre las paredes de las vasijas que lo contienen.

La idea de explicar la presión del gas sobre las paredes, como resultado de los choques de las moléculas, fue propuesta en 1738 por Daniel Bernoulli, académico de San Petersburgo. En los años 1744—1748, M. V. Lomonósov elaboró y desarrolló la teoría atómico-molecular de la constitución de la materia, demostró por primera vez la veracidad de la teoría cinético-molecular del calor y explicó desde este punto de vista muchos fenómenos. El ulterior desarrollo de la teoría cinético-molecular de los gases, que no se produce hasta mediados del siglo XIX, se debe a los trabajos de toda una serie de físicos, entre los que destacan Clausius, Boltzmann y Maxwell.

Calculemos ahora la presión que se origina como resultado del choque de las moléculas con las paredes del recipiente. Figurémonos un recipiente en forma de cubo, cuya arista tiene una longitud Δl (fig. 113), y que dentro de ella se mueven desordenadamente n moléculas, cuyas dimensiones despreciamos. Como el movimiento de las moléculas es completamente desordenado*), el efecto de sus choques con las paredes será igual al que se produciría si $^1/_3$ de la totalidad de dichas moléculas se moviera en línea recta entre las paredes delantera y trasera del cubo, $^1/_3$ entre las paredes superior e inferior y otro $^1/_3$ entre las paredes derecha e izquierda. Si tomamos aisladamente una molécula lanzada perpendicularmente hacia una de las paredes, por ejemplo, hacia la delantera, con una velocidad v,

*) Es decir, carente de toda dirección privilegiada. (*N. del T.*)

al llegar a ella rebotará hacia atrás y, como resultado, su cantidad de movimiento variará en la magnitud $m \cdot v - m(-v) = 2mv$, donde m es la masa de la molécula; esta variación de la cantidad de movimiento determina el impulso de la fuerza que, por parte de la pared, actúa sobre la molécula durante el golpe:

$$\Delta f \cdot \delta t = 2mv,$$

donde Δf es la fuerza del golpe y δt, el tiempo que dura el mismo. Por la tercera ley de Newton, sobre la pared actuará una fuerza numéricamente igual a Δf. Al rebotar en una pared, la molécula saldrá lanzada hacia la pared opuesta, de donde será también despedida y volverá a la primera pared, después de transcurrir un tiempo determinado Δt. *La fuerza media* $\overline{\Delta f}$, que actúa sobre la pared durante el tiempo que transcurre entre dos choques consecutivos de la molécula, se determina partiendo de que su impulso $\overline{\Delta f} \cdot \Delta t$ debe ser numéricamente igual al impulso de la fuerza Δf que actúa durante el tiempo del golpe δt, de donde

$$\overline{\Delta f} \cdot \Delta t = 2mv. \qquad (1)$$

La magnitud Δt representa el tiempo que necesita la molécula para, después de rebotar en la pared delantera del cubo, desplazarse hasta la pared trasera del mismo y regresar a la anterior, de donde

$$\Delta t = \frac{2 \cdot \Delta l}{v}$$

Poniendo este valor de Δt en (1), obtenemos

$$\overline{\Delta f} = \frac{mv^2}{\Delta l}$$

Este es el valor medio, con relación al tiempo, de la fuerza de los choques de una molécula. Las diferentes moléculas se mueven con velocidades distintas, $v_1, v_2, v_3, \ldots$, y la fuerza total de los choques de todas ellas con la pared será

$$\overline{f} = \frac{mv_1^2}{\Delta l} + \frac{mv_2^2}{\Delta l} + \frac{mv_3^2}{\Delta l} + \ldots + \frac{mv_{n'}^2}{\Delta l},$$

donde n' es el número de moléculas que se mueven entre las paredes delantera y trasera. Sacando factor común—la magnitud constante $\frac{m}{\Delta l}$—y multiplicando y dividiendo el segundo miembro de la igualdad por n', tendremos

$$\overline{f} = \frac{n' \cdot m}{\Delta l} \cdot \frac{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \ldots + v_{n'}^2}{n'}.$$

La magnitud

$$\frac{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \ldots + v_{n'}^2}{n'} = \overline{v^2}$$

representa *el valor medio de los cuadrados de las velocidades de las moléculas* o, en otras palabras, *el cuadrado de la velocidad cuadrática media (o velocidad eficaz)*. De donde

$$\bar{f} = \frac{n' \cdot m}{\Delta l} \bar{v}^2.$$

El número de moléculas que se mueven entre las paredes delantera y trasera puede considerarse igual, como ya dijimos, a $^1/_3$ del número total de moléculas n, y, por consiguiente,

$$\bar{f} = \frac{1}{3} \frac{n}{\Delta l} \cdot m\bar{v}^2.$$

Dividiendo los dos miembros de esta igualdad por Δl^2, tendremos

$$\frac{\bar{f}}{\Delta l^2} = \frac{1}{3} \frac{n}{\Delta l^3} \cdot m\bar{v}^2, \tag{2}$$

pero Δl^2 es el área de la pared del cubo, por consiguiente, $\bar{f}/\Delta l^2$ será la presión p que sufre dicha pared, y Δl^3 es el volumen del cubo, de donde tenemos, que $n/\Delta l^3$ será igual al número de moléculas n_0 que existen en la unidad de volumen; en definitiva, la igualdad (2) toma el aspecto

$$p = \frac{1}{3} n_0 \cdot m\bar{v}^2. \tag{3}$$

Es decir, la presión p que ejerce el gas sobre las paredes de la vasija se determina por el número de moléculas n_0 que hay en la unidad de volumen, por la masa m de las moléculas y por el valor medio del cuadrado de sus velocidades v. La fórmula (3) puede tomar otro aspecto si dividimos y multiplicamos por 2 su segundo miembro, entonces

$$p = \frac{2}{3} n_0 \left(\frac{m\bar{v}^2}{2} \right), \tag{4}$$

pero

$$\frac{m\bar{v}^2}{2} = \bar{w}$$

es la energía cinética media del movimiento de traslación de una molécula, de donde

$$p = \frac{2}{3} n_0 \bar{w}, \tag{4a}$$

es decir, la presión del gas puede expresarse también mediante la energía cinética media del movimiento de traslación de sus moléculas.

La fórmula (3), o su equivalente (4a), se conoce con el nombre *de fórmula fundamental de la teoría cinética de los gases.*

Multiplicando los dos miembros de la fórmula (4a) por el volumen de un mol de gas V_0, obtenemos

$$pV_0 = \frac{2}{3} n_0 V_0 \overline{w},$$

pero $n_0 V_0$ es el número de moléculas que hay en el volumen molar V_0, es decir, el número de moléculas de un mol de gas; este número es igual al número de Avogadro: $n_0 V_0 = N$, de donde

$$pV_0 = \frac{2}{3} N \cdot \overline{w},$$

pero $pV_0 = RT$, donde T es la temperatura del gas por la escala de Kelvin y R la constante de los gases, de donde

$$pV_0 = \frac{2}{3} N\overline{w} = RT. \qquad (5)$$

La fórmula (5) relaciona directamente la energía cinética media $\overline{w}$ del movimiento de traslación de las moléculas con las magnitudes macroscópicas que caracterizan el gas, es decir, con su presión, volumen y temperatura. De la fórmula (5) deducimos que

$$\overline{w} = \frac{m\overline{v^2}}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{R}{N} T; \qquad (6)$$

como quiera que R y N son magnitudes constantes, la magnitud

$$k = \frac{R}{N} \qquad (7)$$

también es constante y se denomina *constante de Boltzmann*.

El valor numérico de la constante de Bolzmann es

$$k = \frac{8{,}31 \cdot 10^7}{6{,}02 \cdot 10^{23}} \text{ ergios/grado} = 1{,}38 \cdot 10^{-16} \text{ ergios/grado}.$$

Poniendo en la fórmula (6) la constante de Boltzmann, obtenemos

$$\overline{w} = \frac{3}{2} kT. \qquad (6a)$$

Las fórmulas (6) y (6a) muestran que *la energía cinética media del movimiento de traslación de las moléculas depende exclusivamente de la temperatura y es directamente proporcional a la temperatura absoluta T*.

De esta forma, la escala de temperaturas absolutas (de Kelvin) adquiere un sentido físico directo. Según la fórmula (6a), el movimiento de traslación de las moléculas cesa totalmente a la temperatura de cero absoluto. Sin embargo, aún con este cero absoluto se conservan algunas formas de movimiento dentro de las moléculas y de los átomos, de modo que el movimiento interno de la materia no se detiene totalmente ni cuando la temperatura es de cero absolu-

to. Más adelante veremos que en la práctica es imposible conseguir el cero absoluto.

Las deducciones indicadas nos permiten determinar no sólo la energía cinética media del movimiento de traslación de las moléculas, sino también toda una serie de magnitudes que caracterizan la naturaleza cinético-molecular del gas.

De la fórmula (6) podemos obtener el valor medio del cuadrado de la velocidad de las moléculas:

$$\overline{v^2} = \frac{3RT}{mN},$$

pero m es la masa de una molécula y N, el número de moléculas que hay en un mol; dé donde mN es el peso molecular μ, por lo tanto, *la velocidad cuadrática media del movimiento de traslación de las moléculas* será:

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}, \qquad (8)$$

es decir, la velocidad cuadrática media del movimiento de traslación de las moléculas es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la temperatura absoluta del gas e inversamente proporcional a la raíz cuadrada de su peso molecular.

Cuando la unidad de volumen contiene un número de moléculas igual a n_0, por la fórmula (4a) obtenemos

$$n_0 = \frac{3p}{2\overline{w}};$$

poniendo en esta igualdad el valor de $\overline{w}$ que nos da la fórmula (6a) hallamos

$$n_0 = \frac{p}{kT}. \qquad (9)$$

De la fórmula (9) se deduce que, a igualdad de presión y temperatura, todos los gases tienen el mismo número de moléculas en la unidad de volumen (este mismo resultado se deduce también directamente de la ley de Avogadro). En condiciones normales, es decir, cuando $p = 1$ atm y $T = 273°$ K, en 1 cm^3 de cualquier gas habrá

$$n_0 = 2{,}683 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}$$

moléculas; *este número lleva el nombre de Loschmidt.*

Para mejor asimilación del orden de las magnitudes que caracterizan la teoría cinético-molecular de los gases, ofrecemos varios ejemplos numéricos.

Ejemplo 1. ¿Cuántas moléculas de gas debe haber en la unidad de volumen para que, a la temperatura de 27° C, la presión que ejerzan sobre las paredes de la vasija sea igual a una baria?

Solución. Por la fórmula (9):

$$n_0 = \frac{p}{kT} = \frac{1}{1{,}38 \cdot 10^{-16} \cdot 300}\ \text{cm}^{-3} = 2{,}42 \cdot 10^{13}\ \text{cm}^{-3},$$

es decir, en 1 cm³ deben encontrarse $2{,}42 \cdot 10^{13}$ moléculas.

Ejemplo 2. Hallar la velocidad cuadrática media de las moléculas de nitrógeno ($\mu = 28$) a las temperaturas: a) $t = 1000°$ C; b) $t = 0°$ C y c) $t = -270°$ C.

Solución. Poniendo en la fórmula (8) $R = 8{,}31 \cdot 10^7$ ergios/grado mol, $\mu = 28$ g/mol y $T = 1273°$ K, obtenemos:

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8{,}31 \cdot 10^7 \cdot 1273}{28}}\ \text{cm/s} = 1{,}06 \cdot 10^5\ \text{cm/s} = 1060\ \text{m/s}.$$

Procediendo análogamente resolvemos los otros dos casos: b) $\sqrt{\overline{v^2}} = 493$ m/s; c) $\sqrt{\overline{v^2}} = 51$ m/s. Es decir, cuando las temperaturas no son demasiado bajas, la velocidad de las moléculas de los gases es extraordinariamente grande. A la temperatura ambiente las moléculas alcanzan la velocidad de una bala de fusil.

Ejemplo 3. ¿A qué es igual, expresada en ergios, la energía cinética media del movimiento de traslación de las moléculas de un gas a las temperaturas: a) $t = 1000°$ C, b) $t = 0°$ C y c) $t = -270°$ C?

Solución. Por la fórmula (6a) tenemos, que a $t = 1000°$ C, es decir a $T = 1273°$ K:

$$\overline{w} = \frac{3}{2} kT = \frac{3}{2} 1{,}38 \cdot 10^{-16} \cdot 1273\ \text{ergios} = 2{,}63 \cdot 10^{-13}\ \text{ergios};$$

análogamente, para los otros casos hallamos:
b) $\overline{w} = 5{,}65 \cdot 10^{-14}$ ergios y c) $\overline{w} = 6{,}21 \cdot 10^{-16}$ ergios. Es decir, a pesar de sus grandes velocidades, la energía cinética media de cada molécula es muy pequeña, incluso a temperaturas de 1000° C. Esto es consecuencia de que la masa de estas moléculas aisladas es también muy pequeña.

§ 47. Presiones parciales de las mezclas de gases. De acuerdo con la fórmula fundamental de la teoría cinética de los gases [fórmula (4a), § 46], la presión del gas es

$$p = \frac{2}{3} n_0 \overline{w}, \qquad (1)$$

donde n_0 es el número de moléculas que contiene la unidad de volumen, y $\overline{w}$, la energía cinética media a la temperatura dada T. La fórmula (1) no depende de la clase de moléculas, puesto que todas las moléculas a la temperatura dada T tienen la misma energía cinética media $\overline{w}$.

Supongamos que el gas en cuestión no es homogéneo, sino una mezcla de gases diferentes, en la cual, por unidad de volumen, el número de moléculas del primer gas es igual a n_{01}; el del segundo, n_{02}; el del tercero, n_{03} y así sucesivamente.

En este caso, el número total de moléculas por unidad de volumen n_0 será

$$n_0 = n_{01} + n_{02} + n_{03} + \ldots$$

y por la fórmula (1), la presión que ejerce sobre las paredes de la vasija toda la mezcla será

$$p = \frac{2}{3} n_{01}\overline{w} + \frac{2}{3} n_{02}\overline{w} + \frac{2}{3} n_{03}\overline{w} + \ldots \qquad (2)$$

pero, es evidente que

$$p_1 = \frac{2}{3} n_{01}\overline{w}$$

es la presión que ejercería el primer gas si fuera el único contenido en la vasija, en la misma cantidad que interviene en la mezcla. Análogamente

$$p_2 = \frac{2}{3} n_{02}\overline{w}$$

es la presión que ejercería el segundo gas si fuera el único contenido en la vasija, en la misma cantidad que interviene en la mezcla, etc.

Las presiones p_1, p_2, p_3, etc., se llaman *presiones parciales*. Por la fórmula (2) tenemos

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots \qquad (3)$$

La fórmula (3) representa la llamada *ley de Dalton: cuando se trata de gases perfectos, la suma de las presiones parciales es igual a la presión total de la mezcla.*

De la ley de Dalton se desprende lo siguiente: si varios gases perfectos (que se encuentran a igual presión p, pero que ocupan compartimientos separados cuyos volúmenes sean V_1, V_2, V_3, ...), se ponen en mutuo contacto quitando los tabiques que los separan, una vez que se mezclan entre sí por completo, gracias a la difusión, su presión total no varía; en otras palabras, cuando se mezclan gases perfectos a presión constante, su volumen total no varía, es decir, sus volúmenes se adicionan.

Esta última circunstancia puede comprobarse por medio de un experimento directo. Pero la medición directa de las presiones parciales en una mezcla de gases es difícil. Esta medición puede efectuarse si se dispone de un tabique permeable a uno de los gases e impermeable a todos los demás (es decir, *un tabique semipermeable*). Por ejemplo, una lámina de platino caldeada deja pasar fácilmente al hidrógeno pero es casi impermeable a los demás gases. El gas que pasa a través del tabique equilibra su presión parcial por ambos lados del mismo.

Figurémonos una vasija de platino cerrada B (fig. 114), caldeada después de hacer en ella el vacío. Supongamos que en estas condiciones la vasija B está rodeada de una mezcla gaseosa de hidrógeno y otro gas cualquiera (químicamente inactivo con relación al hidrógeno, como el argón, por ejemplo). En este caso el hidrógeno penetrará en la vasija de platino caldeado B, hasta que la presión que ejerce

sobre las paredes de ella no se iguale por ambos lados. Esto ocurrirá cuando la presión del hidrógeno dentro de la vasija B sea igual a su presión parcial fuera de ella, es decir, en la parte donde se encuentran los gases mezclados. De esta forma se puede medir directamente la presión parcial del hidrógeno valiéndose del manómetro C.

Este experimento puede hacerse también de la forma siguiente: se empieza por llenar de un gas cualquiera, por ejemplo, de argón, a una misma presión p_0, la vasija B y el espacio que la rodea. Después, se sustituye el argón que hay fuera de la vasija por una mezcla de argón e hidrógeno, cuya presión también sea igual a p_0, mientras

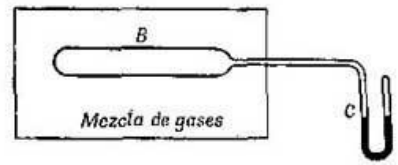


Fig. 114. Esquema del experimento para hallar la presión parcial del hidrógeno.

que la presión parcial del hidrógeno que hay en ella sea p_1. Entonces, si se caldean las paredes de la vasija B, el hidrógeno comienza a penetrar en ella, mientras que el argón exterior no puede hacer lo mismo. Como resultado se obtiene una diferencia de presiones entre la mezcla gaseosa que se encuentra fuera de la vasija B y la que hay dentro de ella. La presión que se establece dentro de la vasija B es igual a $p_0 + p_1$, es decir, mayor que la presión p_0 en la magnitud p_1. Esta presión «complementaria» p_1 nos sirve de medida de la presión parcial del hidrógeno en la mezcla.

En los gases reales y en los vapores se observan ciertas discrepancias con la ley de Dalton, las cuales fueron estudiadas minuciosamente por B. B. Golitsin en el año 1890.

§ 48. Energía interna del gas. Grados de libertad. Como dijimos en el § 46, la teoría cinética de los gases nos lleva a una conclusión muy importante: las moléculas del gas se mueven desordenadamente y la energía cinética media de su movimiento de traslación $\overline{w}$ a una temperatura T, es igual a

$$\overline{w} = \frac{3}{2}\left(\frac{R}{N}\right)T = \frac{3}{2}kT, \qquad (1)$$

donde R es la constante de los gases; N, el número de Avogadro y $k = \frac{R}{N}$, la constante de Boltzmann. De esta forma, la energía cinética de la traslación de las moléculas depende exclusivamente de la temperatura T, puesto que las demás magnitudes que intervienen en la expresión (1) son constantes. *Al calentar o enfriar un gas*, es decir, *al comunicarle o sustraerle cierta cantidad de calor, varía la energía cinética de sus moléculas.*

La energía cinética del movimiento desordenado de las moléculas de un gas perfecto determina *su energía interna*. Pero cuando se trata de gases reales, como veremos más adelante, hay que tener también en cuenta la energía potencial recíproca de dichas moléculas, puesto que la energía interna de los gases reales representa de por sí la suma de la energía cinética del movimiento de las moléculas y de su energía potencial.

La energía cinética del movimiento de las moléculas, en general, *no se reduce a la energía cinética de su traslación, sino que puede estar integrada también por la energía cinética de su rotación y de sus vibraciones.*

Para calcular la energía que se invierte en las diferentes formas de movimiento de las moléculas hay que introducir el concepto de *grados de libertad.*

Por grados de libertad de un cuerpo se entiende, el número de coordenadas independientes que hay que tomar, para determinar la posición de dicho cuerpo en el espacio. Así, por ejemplo, *un punto material tiene tres grados de libertad*, puesto que su posición en el espacio se determina por tres coordenadas, por ejemplo, las coordenadas, x, y, z, del sistema de coordenadas cartesianas.

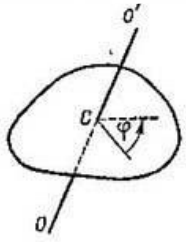


Fig. 115. Los sólidos tienen seis grados de libertad.

La posición de un sólido (fig. 115) puede determinarse conociendo: 1) la posición de su centro de gravedad C en el espacio, 2) la dirección de un eje determinado OO', y 3) el ángulo de giro del sólido alrededor de este eje, con relación a una posición inicial determinada. Para determinar la posición del centro de gravedad hay que tomar tres coordenadas x, y, z. Para establecer la dirección del eje OO' en el espacio hay que conocer dos coordenadas más, por ejemplo, los dos ángulos ϑ y ψ, que forma con dos de los tres ejes coordenados. Finalmente, el ángulo de giro del sólido alrededor del eje OO' se determina por otra coordenada (el ángulo φ de la fig. 115).

De esta forma, el sólido tiene seis grados de libertad.

Pero si algunas partes del sólido pueden desplazarse (vibrar) con relación a otras, para examinar estos movimientos hay que introducir grados de libertad complementarios, además de los ya indicados. Y al contrario, si el sólido, por cualquier causa (por ejemplo, por ser completamente simétrico) no gira con respecto a un eje determinado, tendrá menos de seis grados de libertad, o mejor dicho, cinco.

La esfera, que no está sometida a rotación y solamente posee movimiento de traslación, puede considerarse como un punto material con tres grados de libertad.

Cada molécula de gas tiene un número determinado de grados de libertad, tres de los cuales corresponden a su movimiento de traslación en el espacio.

La premisa fundamental de la teoría cinética de los gases es la suposición de que el movimiento de las moléculas se desarrolla en absoluto desorden; este desorden no sólo se refiere al movimiento de traslación, sino también a todas las demás formas de movimiento de las moléculas (rotación, vibraciones). Ninguna de estas formas de movimiento predomina sobre las demás, por lo que es natural suponer, que *a cada grado de libertad de las moléculas le corresponde, por término medio, una misma cantidad de energía* $\overline{w}$. Esto que acabamos de indicar se conoce con el nombre de *principio de la equipartición de la energía entre los grados de libertad*. Partiendo de este principio, es fácil obtener la energía media $\overline{w}_0$ correspondiente a un grado de libertad. Al movimiento de traslación de las moléculas, con sus tres grados de libertad, le corresponde por la fórmula (1) la energía

$$\overline{w} = \frac{3}{2} kT,$$

de donde a un grado de libertad le corresponderá una energía media

$$\overline{w}_0 = \frac{1}{2} kT = \frac{1}{2} \left(\frac{R}{N}\right) T. \tag{2}$$

Supongamos ahora que el gas está formado por moléculas iguales, y que cada una de ellas tiene i grados de libertad; en este caso, a cada molécula (con todos sus grados de libertad) le corresponderá, por término medio, la energía

$$\overline{w} = \frac{i}{2} kT = \frac{i}{2} \left(\frac{R}{N}\right) T. \tag{3}$$

Para obtener la energía interna total del gas hay que multiplicar este valor de $\overline{w}$ por el número de moléculas que lo integran. Si referimos la energía interna *a un mol* de gas, obtendremos su valor U_0 multiplicando $\overline{w}$ por el número de Avogadro N, de donde

$$U_0 = \frac{i}{2} RT. \tag{4}$$

Por la fórmula (4) vemos que la energía interna de un gas se expresa por medio del número de grados de libertad i de sus moléculas y de su temperatura absoluta T. De esta forma, la energía interna de una cantidad dada de gas perfecto sólo depende de su temperatura T y en ella no influyen ni el volumen, ni, por consiguiente,

la presión. Cuando los gases son reales, la energía interna total, que, como ya indicamos, está integrada por la energía cinética del movimiento de las moléculas y por su energía potencial, depende también del volumen que ocupa el gas. Pero la energía interna de un gas real no se limita a las formas mecánicas de la energía (véase el § 49).

§ 49. Calor específico de los gases. Aplicando el concepto de la energía interna, podemos hallar la expresión del calor específico.

Se entiende por *calor específico c* de una substancia cualquiera, una magnitud física numéricamente igual a la cantidad de calor que hay que comunicar a la unidad de masa de dicha substancia para elevar su temperatura en 1°C.

Junto con el calor específico nos ocuparemos del *calor molecular C o calor específico molar*. Se entiende por calor molecular o calor específico molar C de un cuerpo cualquiera, una magnitud física numéricamente igual a la cantidad de calor que hay que comunicar a un mol de este cuerpo para que su temperatura aumente en 1°C. Evidentemente, entre los calores molecular C y específico c existe la correlación:

$$C = \mu c,$$

donde μ es el peso molecular del cuerpo dado.

Cuando se trata de gases hay que distinguir *en qué condiciones se calientan*, por ejemplo, *a volumen constante V* o *a presión constante p*.

Examinemos el caso del calentamiento de un gas a volumen constante V.

En este caso, el trabajo de las fuerzas externas es igual a cero y todo el calor que se comunica al gas se gasta en aumentar su energía interna U. De donde el calor molecular de este gas a volumen constante C_V es numéricamente igual a la variación de la energía interna de un mol de dicho gas U_0 al elevar su temperatura en 1°C. Como quiera que por la fórmula (4), § 48, esta variación es igual a

$$\Delta U_0 = \frac{i}{2} R (T+1) - \frac{i}{2} RT = \frac{i}{2} R,$$

para el calor molecular del gas a volumen constante, tenemos

$$C_V = \frac{i}{2} R. \qquad (2)$$

Poniendo este valor de C_V en la correlación (1) obtendremos el calor específico

$$c_V = \frac{i}{2} \frac{R}{\mu}. \qquad (2a)$$

De la fórmula (2) se deduce, que el calor molecular de un gas a volumen constante C_V depende de los grados de libertad i de sus moléculas y del valor de la constante de los gases R.

En el § 45 dimos el valor numérico de la constante de los gases R en ergios/grado mol y en l atm/grado mol. Si utilizamos estos valores de R, obtendremos el calor específico en estas mismas unidades. Pero generalmente el calor específico se expresa por medio de la cantidad de calor que se comunica al cuerpo. La unidad de cantidad de calor es *la caloría*. Una caloría («pequeña» o «caloría-gramo») es igual a la cantidad de calor necesaria para elevar la temperatura de 1 g de agua desde 19,5 hasta 20,5°C.

Como la transmisión del calor es una forma de la transmisión de la energía y como, según la ley de la conservación, toda cantidad de calor transmitida equivale a una determinada cantidad de energía*), las calorías pueden servir no sólo para medir la cantidad de calor, sino también la energía y el trabajo. Por lo tanto, cabe preguntarse, ¿qué relación numérica existe entre la caloría y las demás unidades de energía? Las mediciones más exactas dan:

$$1\text{cal} = 4{,}182 \text{ julios};$$

aproximadamente podemos admitir que 1 cal = 4,18 J. Valiéndonos de esta relación entre la caloría y el julio, podemos reducir fácilmente el valor de la constante R de ergios/grado mol a cal/grado mol, a saber:

$$R = 8{,}313 \cdot 10^7 \text{ ergios/grado mol} = \frac{8{,}313 \cdot 10^7}{4{,}182 \cdot 10^7} \text{cal/grado mol} =$$
$$= 1{,}9858 \text{ cal/grado mol.}$$

Aproximadamente puede tomarse $R = 2$ cal/grado mol. Utilizando este valor de la constante de los gases R, por la fórmula (2), obtenemos el calor molecular del gas C_V en cal/grado mol.

Para poder calcular C_V nos queda por esclarecer el número de grados de libertad i que debe atribuirse a las distintas moléculas. Pero antes de detenernos en esto, deduciremos la expresión del calor molecular del gas a presión constante C_p.

Al calentarse a presión constante p, el gas se dilata; el calor exterior que se le comunica no se gasta únicamente en aumentar sus reservas de energía interna U, sino también en realizar un trabajo A contra las fuerzas exteriores. De esta forma, el calor molecular a presión constante C_p es mayor que a volumen constante C_V en una cantidad igual al trabajo A que realiza el mol de gas, como resultado de la dilatación que experimenta al elevarse su temperatura T en 1°C a presión constante p.

$$C_p = C_V + A.$$

Para calcular este trabajo A, supongamos que un mol de gas, que se encuentra a la temperatura T y a la presión p, está encerrado

*) Véase el capítulo VIII *Principios de Termodinámica.*

en un cilindro con émbolo (fig. 116). La fuerza exterior que sostiene al émbolo es $f = pS$, donde S es el área de la superficie frontal del émbolo. Al calentar el gas a presión constante p, en 1° C, este se dilata y el émbolo se eleva una altura h; al ocurrir esto el gas realiza un trabajo

$$A = f \cdot h = p \cdot Sh,$$

pero $Sh = \Delta V_0$, donde ΔV_0 es el aumento del volumen del gas, por consiguiente

$$A = p \cdot \Delta V_0. \tag{4}$$

El aumento del volumen del gas podemos hallarlo por la ecuación de estado de los gases perfectos. A la temperatura T y la presión p, el volumen de un mol de gas V_0 es igual a

$$V_0 = \frac{R}{p} T.$$

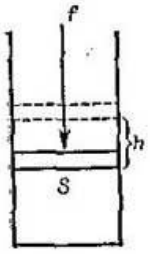


Fig. 116. El trabajo que realiza el gas es igual a fh.

A la temperatura $(T + 1)°$ y a la misma presión p, el volumen V_0' será:

$$V_0' = \frac{R}{p}(T + 1),$$

por consiguiente, el aumento del volumen de un mol de gas al aumentar su temperatura en 1° C será

$$\Delta V_0 = V_0' - V_0 = \frac{R}{p}(T + 1) - \frac{R}{p} T = \frac{R}{p}.$$

Poniendo este valor de ΔV_0 en (4), hallamos el trabajo A que realiza un mol de gas, como resultado de la dilatación que experimenta al calentarse en 1° C a presión constante p:

$$A = R.$$

Es decir, el trabajo A, que buscábamos, es igual a la constante de los gases R. Colocando este valor de A en (3), hallamos la relación que existe entre los calores moleculares del gas a presión constante C_p y a volumen constante C_V:

$$C_p = C_V + R. \tag{5}$$

De donde, valiéndonos de la fórmula (2), obtenemos la expresión de C_p por medio del número de grados de libertad de las moléculas del gas

$$C_p = \frac{i}{2} R + R = \frac{i+2}{2} R. \tag{6}$$

Aprovechando la relación (1) existente entre los calores específico y molecular, hallamos

$$c_p = c_V + \frac{R}{\mu} \tag{5a}$$

o

$$c_p = \frac{i+2}{2} \cdot \frac{R}{\mu}. \tag{6a}$$

De las fórmulas (2) y (6) ó (2a) y (6a) obtenemos

$$\frac{C_p}{C_V} = \frac{c_p}{c_V} = \frac{i+2}{i}. \tag{7}$$

La relación entre los calores moleculares y específicos a presión y a volumen constantes $C_p/C_V = c_p/c_V$ se designa con la letra γ; esta relación depende exclusivamente del número de grados de libertad de las moléculas que componen el gas.

Para adjudicar a las moléculas un número determinado de grados de libertad, hay que partir de un modelo concreto de molécula. Hasta ahora hemos admitido que la molécula es como una esfera; si consideramos que esta molécula esférica es incapaz de girar, le podemos adjudicar tres grados de libertad. En este caso, valiéndonos del valor de $R = 1{,}9858$ cal/grado mol, obtenemos por las fórmulas (2), (6) y (7):

$$i = 3 \begin{cases} C_V = \frac{3}{2} R = 2{,}979 \text{ cal/grado mol} \cong 3 \text{ cal/grado mol}, \\ C_p = \frac{5}{2} R = 4{,}965 \text{ cal/grado mol} \cong 5 \text{ cal/grado mol}, \\ \gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{5}{3} = 1{,}67. \end{cases}$$

Como demuestran los resultados de las mediciones que se recogen en la tabla V, estos valores de los calores moleculares son ciertos para el helio y el argón, los cuales son gases *monoatómicos* y, por consiguiente, están formados por partículas que son de por sí átomos aislados y no grupos de átomos unidos en forma de moléculas. Es decir, cuando se trata de *gases monoatómicos, los calores moleculares calculados de acuerdo con la teoría cinética de los gases y sus valores obtenidos experimentalmente para los gases reales, coinciden entre sí con bastante exactitud cuando el número de grados de libertad de las moléculas se toma igual a tres.*

Para los gases *diatómicos*, como son el hidrógeno, el oxígeno, el nitrógeno, el monóxido de carbono, etc., se puede tomar el modelo siguiente: dos átomos, A y B, unidos rígidamente entre sí de manera, que sus centros se encuentran a una distancia invariable l (fig. 117) el uno del otro.

Tabla V

Valores experimentales de los calores moleculares de algunos gases

Gas	c_V	c_p	γ
Helio, He	2,98	5,00	1,67
Argón, Ar	2,98	5,07	1,65
Hidrógeno, H_2	4,87	6,87	1,41
Nitrógeno, N_2	4,96	6,84	1,41
Oxígeno, O_2	4,99	6,90	1,40
Monóxido de carbono, CO	5,01	7,01	1,40
Vapor de agua, H_2O	6,65	8,65	1,31
Metano, CH_4	6,51	8,51	1,30
Cloroformo, $CHCl_3$	15,2	17,2	1,13
Alcohol etílico, C_2H_6O	18,9	20,9	1,11

Como quiera que ninguno de estos dos átomos entra en rotación, hay que admitir que este modelo no gira con respecto al eje OO', que pasa por los centros de ambos átomos. Por esto, a la molécula

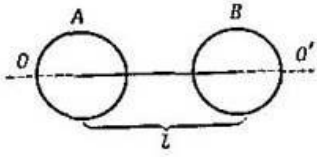


Fig. 117. Modelo de una molécula diatómica.

diatómica deben atribuírsele *cinco grados de libertad*. Entonces, por las fórmulas (2), (6) y (7):

$$i=5\begin{cases} C_V=\frac{5}{2}R=4{,}965 \text{ cal/grado mol}\cong 5 \text{ cal/grado mol}, \\ C_p=\frac{7}{2}R=6{,}951 \text{ cal/grado mol}\cong 7 \text{ cal/grado mol}, \\ \gamma=\frac{C_p}{C_V}=\frac{7}{5}=1{,}40. \end{cases}$$

Por la tabla V puede verse que estos datos coinciden, con bastante exactitud, con los valores de los calores específicos molares que se observan para el hidrógeno, nitrógeno, oxígeno y monóxido de carbono; por lo tanto, *a las moléculas de estos gases diatómicos hay que atribuirles efectivamente cinco grados de libertad.*

Si consideramos las moléculas más complejas (*triatómicas y poliatómicas*) como partículas sólidas asimétricas, tendremos que atribuirles seis grados de libertad.

En este caso, para sus calores moleculares obtenemos:

$$i=6\begin{cases} C_V=\frac{6}{2}R\cong 6 \text{ cal/grado mol}, \\ C_p=\frac{8}{2}R\cong 8 \text{ cal/grado mol}, \\ \gamma=\frac{C_p}{C_V}=\frac{8}{6}=1{,}33. \end{cases}$$

En la tabla V puede verse que estos valores se aproximan a los datos experimentales correspondientes al vapor de agua y al metano, mientras que para moléculas tan complejas como el cloroformo, $CHCl_3$, y el acohol etílico, C_2H_6O, el calor molecular resulta mucho mayor.

Pero las moléculas en forma de partículas sólidas no pueden tener más de seis grados de libertad, por lo cual, para aquellas moléculas complejas cuyo calor molecular C_V es mayor que seis, hay que tomar en consideración, además de los grados de libertad correspondientes a su traslación y rotación, los correspondientes a sus vibraciones.

La teoría desarrollada de las capacidades caloríficas molares se funda totalmente en ideas clásicas, que tienen en cuenta únicamente las formas mecánicas del movimiento de las moléculas, y es solamente aproximada. Según esta teoría tendríamos, por ejemplo, que todos los gases diatómicos, cuyas moléculas tienen cinco grados de libertad, deberían tener exactamente el mismo calor molecular C_V a volumen constante. El número de grados de libertad solamente puede ser entero, y la variación de este número de grados en una unidad debería producir una variación de $\frac{1}{2}R = 0{,}993$ cal/grado mol en el calor molecular. Pero por la tabla V vemos que los calores moleculares de los gases diatómicos son algo diferentes. Estas diferencias superan los errores de observación y, por consiguiente, son reales. Por otra parte, son mucho menores que $\frac{1}{2}R$. La teoría anteriormente expuesta no puede explicar estas diferencias. Según esta misma teoría, el calor molecular de los gases no depende de su temperatura: *pero los experimentos demuestran que, en realidad, el calor molecular depende de ella: el calor molecular de todas las substancias es menor a bajas temperaturas.*

Por ejemplo, para el hidrógeno gaseoso tenemos:

$T°$ K . .	197°	90°	40°
C_V . . .	4,38	3,25	2,98

Como puede verse, a baja temperatura, $T = 40°$ K, es decir, a $t = -233°$ C, el calor molecular del hidrógeno es mucho menor que el que obtuvimos partiendo de la teoría clásica, atribuyendo a la molécula diatómica de hidrógeno cinco grados de libertad; este calor molecular es aproximadamente igual a $\frac{3}{2}R$. Por el contrario, a temperaturas muy altas los valores resultan ser mayores que los calculados. Es decir, la teoría clásica solamente da buenos resultados a temperaturas medias. Esto se explica, porque las ideas clásicas

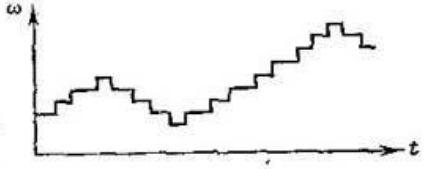


Fig. 118. Variación de la energía de rotación (o vibratoria) de las moléculas; esta energía varía a saltos.

no son aplicables a moléculas y átomos independientes. La verdadera teoría de la capacidad calorífica molar nos la da la mecánica cuántica.

De acuerdo con los puntos de vista clásicos, la energía w_0, correspondiente a cualquier grado de libertad, puede variar continuamente. Pero según la teoría de los cuantos, la energía de la rotación de las moléculas, lo mismo que la energía de sus vibraciones, puede variar exclusivamente a saltos; la representación gráfica de la energía de rotación o de vibración w con relación al tiempo t, es una línea escalonada (fig. 118). Para la energía de rotación de las moléculas diatómicas ordinarias (nitrógeno, oxígeno) estos escalones representan de por sí magnitudes del orden de 10^{-15} ergios. La energía media correspondiente a un grado de libertad $\frac{1}{2}kT$, a $T = 300°$ K, es igual a $\overline{w} = 2{,}17 \cdot 10^{-14}$ ergios; es decir, que los escalones de la energía de rotación de las moléculas, a la temperatura ordinaria, son pequeños en comparación con la energía media correspondiente a un grado de libertad. Gracias a esto, el calor molecular puede calcularse desde el punto de vista clásico. Pero a bajas temperaturas, cuando la propia energía $\overline{w_0}$ es comparable a la magnitud de los escalones de energía, los puntos de vista clásicos son inaplicables.

En estas condiciones resulta que la energía de rotación de las moléculas deja de variar con la temperatura. Como consecuencia, el calor molecular de todos los gases a bajas temperaturas tiende al valor de $C_V = \frac{3}{2}R$.

Además, cuando las temperaturas son bajas, el cálculo del valor medio de la energía, por la teoría de los cuantos, es diferente que

por la clásica (puesto que hay que tener en cuenta la llamada «degradación» del gas).

Finalmente, a temperaturas muy bajas el gas se hiela y se solidifica, y el calor molecular de los cuerpos sólidos, como veremos más adelante, tiende a cero cuando la temperatura se aproxima al cero absoluto.

En cuanto a la energía de las vibraciones se refiere, sus escalones son mucho mayores: para moléculas no muy complejas, son del orden de $2 \cdot 10^{-13}$ ergios, es decir, aproximadamente diez veces mayores que la energía media $\bar{w}_0$, correspondiente a un grado de libertad a la temperatura ordinaria. Gracias a esto, a la temperatura ordinaria podemos no tener en cuenta la energía de las vibraciones, puesto que ésta influye únicamente a temperaturas elevadas*). Para las moléculas complejas los escalones de la energía vibratoria pueden ser menores, y, entonces, el papel de esta energía de las moléculas se deja sentir también a temperaturas medias.

En la fig. 119 se ve cómo varía el calor molecular de un gas diatómico con la temperatura. A temperatura elevada tienen importancia las vibraciones (a ellas les corresponden dos grados de libertad, véase el § 93) y el calor molecular $C_V = \frac{7}{2} R$; a temperaturas medias $C_V = \frac{5}{2} R$ y a temperaturas muy bajas $C_V = \frac{3}{2} R$. La parte punteada de la curva, tendente a cero, indica las variaciones del calor molecular después de la solidificación del gas.

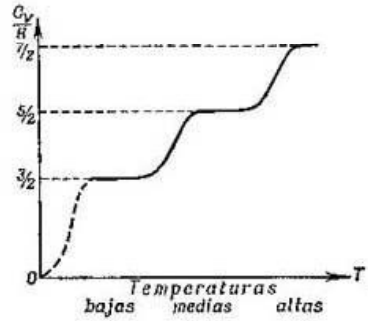


Fig. 119. Variación del calor molecular de un gas diatómico con la temperatura.

Al calcular la relación entre el calor molecular de los gases poliatómicos y la temperatura, cuando ésta es muy elevada, hay que tener en cuenta también la disociación de las moléculas. Por ejemplo, al disociarse una molécula diatómica aparecen dos átomos, cada uno de ellos con tres grados de libertad. Cuando se produce la diso-

*) La teoría cuántica de las moléculas demuestra, que en éstas existe la llamada energía nula de vibración, la cual no desaparece ni a la temperatura de cero absoluto. Sin embargo, el escalón de energía vibratoria siguiente al «nulo» se encuentra a tanta altura, que sólo hay que tenerlo en cuenta a temperaturas muy altas. De esta forma, aunque a temperaturas bajas y medias las vibraciones no cesan por completo en las moléculas, tampoco dependen de la temperatura y, por consiguiente, no influyen en la capacidad calorífica.

ciación completa de un gas diatómico, éste se transforma en una mezcla de dos gases monoatómicos, la suma de cuyos calores moleculares será igual a $\frac{6}{2} R$.

Por esta razón, la variación del calor molecular de un gas diatómico, a altas temperaturas, se diferenciará en realidad de la representada en la fig. 119.

§ 50. Distribución de las velocidades. Ley de Maxwell. En el § 46 examinamos solamente el valor medio del cuadrado de la velocidad de las moléculas. Pero en realidad, las moléculas se mueven a velocidades distintas y para cada temperatura T existe una velocidad v_p más probable. Las moléculas cuya velocidad es mucho mayor o mucho menor que la más probable son raras.

Como el movimiento de las moléculas es completamente desordenado, no es posible plantearse la cuestión de cuántas moléculas tienen exactamente la velocidad dada v, puesto que, en general, estas moléculas pueden no existir en un momento dado. Sin embargo, puede plantearse la cuestión de determinar el número de moléculas cuyas velocidades están comprendidas en un determinado intervalo de velocidades, por ejemplo, aquellas cuyo valor se encuentra entre dos velocidades dadas v_1 y v_2. *La ley de distribución de las velocidades* fue deducida por Maxwell, el cual, valiéndose del cálculo de probabilidades, determinó el número de moléculas Δn, cuyas velocidades se encuentran comprendidas en el intervalo existente entre una velocidad dada v y otra $v + \Delta v$.

La ley de Maxwell es más fácil de formular introduciendo el concepto de velocidad relativa

$$u = \frac{v}{v_p}, \tag{1}$$

donde v es la velocidad dada y v_p, la velocidad más probable de las moléculas del gas en cuestión a la temperatura dada. Según la ley de Maxwell, el número de moléculas Δn cuyas velocidades relativas están comprendidas entre u y $u + \Delta u$, (donde Δu debe tomarse pequeño con relación a u), es igual a

$$\Delta n = \frac{4}{\sqrt{\pi}} n \cdot e^{-u^2} u^2 \Delta u, \tag{2}$$

donde n es el número total de moléculas del gas que se examina.

La velocidad más probable v_p, según los cálculos de Maxwell, es igual a

$$v_p = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}, \tag{3}$$

donde μ es el peso molecular del gas; T, su temperatura absoluta y R, la constante de los gases. Como $R = kN$ y $\mu = mN$ siendo

k la constante de Boltzmann; m, la masa de la molécula del gas dado y N, el número de Avogadro; la fórmula (3) puede tomar también la forma:

$$v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \tag{3a}$$

Tomando como abscisas los valores de la velocidad relativa de las moléculas u y como ordenadas el valor de la magnitud $\frac{\Delta n}{n \cdot \Delta u}$ (llamada *función de distribución*), obtenemos la curva representada en la fig. 120. Esta curva tiene su máximo para $u = 1$, lo que corresponde a un valor de la velocidad v igual a la velocidad más probable v_p.

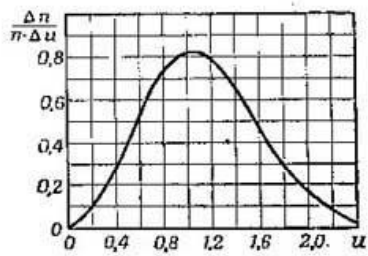


Fig. 120. La función de distribución de Maxwell.

El número relativo de moléculas $\frac{\Delta n}{n}$, cuyas velocidades están comprendidas entre u y $u + \Delta u$, es igual al producto de la ordenada de la curva por Δu, es decir, puede representarse como el área de la columna rayada de la fig. 121.

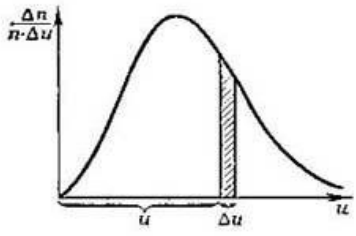


Fig. 121. El área de la columna rayada representa el número relativo de moléculas, cuyas velocidades están comprendidas en el intervalo de velocidades dado Δu.

Para dar una idea más concreta de la ley de Maxwell citaremos los datos siguientes: la velocidad más probable de las moléculas de nitrógeno ($\mu = 28$) a 148° C es igual a

$$v_p = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8{,}31 \cdot 10^7 \cdot 421}{28}}\ \text{cm/s} = 500\ \text{m/s}.$$

En estas condiciones la distribución de las moléculas de nitrógeno por las zonas de velocidades será la siguiente:

Zona de velocidades en m/s	Parte (en %) del número total de moléculas de nitrógeno (a $T = 421°$ K), cuya velocidad está comprendida entre los límites indicados
$0 < v < 100$	0,6
$100 < v < 300$	12
$300 < v < 500$	30
$500 < v < 700$	29
$700 < v < 1000$	23
$1000 < v$	5,4

De esta tabla se desprende que el 59% del número total de moléculas tiene velocidades comprendidas entre 300 y 700 m/s, es decir, en la zona correspondiente a la velocidad más probable $v_p = 500$ m/s. El número relativo de moléculas lentas ($v < 100$ m/s) y de moléculas muy rápidas es pequeño. Sin embargo, el número de moléculas cuya velocidad sobrepasa en más del doble a la más probable ($v > 1000$ m/s), alcanza un 5,4%. La velocidad más probable de las moléculas de un gas dado se determina por su temperatura, siendo mayor cuanto más alta es ésta. No obstante, en el gas existe cierto número de moléculas que se mueven a considerable velocidad aún a temperaturas no elevadas. La existencia de estas moléculas «calientes», como veremos más adelante, desempeña un papel bastante importante en el desarrollo de muchos procesos.

La curva de distribución de Maxwell permite hallar una velocidad media aritmética, para la que, como puede demostrarse, se obtiene el valor:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}. \qquad (4)$$

De esta forma, comparando las tres velocidades que hemos examinado:

1) la más probable

$$v_p = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} \cong 1{,}41\sqrt{\frac{RT}{\mu}},$$

2) la media aritmética

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \cong 1{,}60\sqrt{\frac{RT}{\mu}}, \text{ y}$$

3) la media cuadrática

$$\sqrt{\bar{v}^2} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} \cong 1{,}73\sqrt{\frac{RT}{\mu}},$$

vemos, que la menor de ellas es la más probable, y la mayor, la media cuadrática (fig. 122). La relación entre estas velocidades no depende ni de la temperatura ni de la clase de gas.

Examinemos un ejemplo sobre la aplicación de la fórmula de Maxwell. Supongamos que hay que determinar qué parte de las moléculas de hidrógeno ($\mu = 2$) a $T = 300°$ K tiene velocidades comprendidas en el intervalo de 1900 a 1905 m/s.

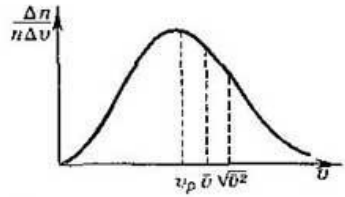


Fig. 122. Comparación de las velocidades de las moléculas: v_p es la velocidad más probable; $\bar{v}$, la velocidad media aritmética; y $\sqrt{\bar{v}^2}$, la velocidad media cuadrática.

Para esto, se empieza por hallar el valor de la velocidad más probable de las moléculas de hidrógeno a $T = 300°$ K:

$$v_p = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{1 \cdot 8{,}31 \cdot 10^7 \cdot 300}{2}} \text{ cm/s} = 1{,}6 \cdot 10^5 \text{ cm/s}.$$

De donde la velocidad relativa, correspondiente a la velocidad de las moléculas de hidrógeno $v = 1900$ m/s a la temperatura dada, será:

$$u = \frac{v}{v_p} = \frac{1{,}9 \cdot 10^5}{1{,}6 \cdot 10^5} \approx 1{,}2.$$

El valor de Δu se determina por la correlación $\Delta u = \frac{\Delta v}{v_p}$; y como $\Delta v = 1905 - 1900$ m/s $= 5 \cdot 10^2$ cm/s, tendremos que

$$\Delta u = \frac{5 \cdot 10^2}{1{,}6 \cdot 10^5} = 0{,}0031.$$

El valor de $\frac{\Delta n}{n \cdot \Delta u}$, correspondiente a $u = 1{,}2$, lo hallamos por la fig. 120, de donde tenemos:

$$\frac{\Delta n}{n \cdot \Delta u} = 0{,}78.$$

De donde el número relativo de moléculas, cuya velocidad está comprendida en el intervalo de velocidades de $v = 1900$ m/s a $v = 1905$ m/s, será igual

$$\frac{\Delta n}{n} = 0{,}78 \cdot 0{,}0031 = 2{,}5 \cdot 10^{-3},$$

es decir, el 0,25 % del número total de moléculas tiene una velocidad comprendida en el intervalo indicado.

En muchos problemas concretos tiene gran importancia conocer el número de moléculas cuya velocidad es mayor que un valor dado de u. El número de estas moléculas se representa en el diagrama, que da la ley de distribución de Maxwell, como el área rayada de la fig. 123. Esta área, como función de la velocidad u, puede calcularse integrando la fórmula de Maxwell; el resultado de este cálculo puede darse en forma de tabla o de diagrama. Llamando n_u al número de moléculas cuya velocidad es mayor que la dada u, la curva de la fig. 124 nos da los valores de n_u/n en función de u. El valor 1,0 de la ordenada de esta curva para $u = 0$ significa, que todas las moléculas tienen velocidades comprendidas entre 0 e ∞; la ordenada 0,57 para $u = 1{,}0$ representa que el 57% de todas las moléculas tiene velocidades que sobrepasan a la más probable,

etc. Para las grandes u (prácticamente para $u > 3$) la magnitud n_u/n se representa aproximadamente por la siguiente fórmula:

$$\frac{n_u}{n} = 1{,}128u \cdot e^{-u^2}. \qquad (5)$$

Examinemos otros ejemplos concretos.

Ejemplo 1. ¿Qué parte de las moléculas del gas tiene velocidad comprendida entre $1/2v_p$ y $2v_p$?

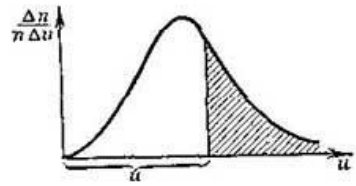


Fig. 123. El área de la figura rayada da el número relativo de moléculas cuyas velocidades son mayores que el valor u dado.

Solución. Como quiera que en este caso el intervalo de velocidades Δu es grande, no se puede emplear directamente la fórmula de Maxwell (2). Por esto, nos valemos del diagrama de la fig. 124. Para la velocidad de las moléculas igual a 1/2 de la más probable, la velocidad relativa es $u = 1/2$; según el diagrama de la fig. 124, a este valor de u corresponde $\frac{n_u}{n} = 0{,}92$, lo que significa que el 92% de todas las moléculas se mueve con velocidades que sobrepasan a $1/2v_p$. También tenemos, que la velocidad $2v_p$ corresponde a $u = 2$ y que a este valor de u le pertenece, según el diagrama, el de $\frac{n_u}{n} = 0{,}05$, que quiere decir, que el 5% de todas las moléculas tienen velocidades mayores que el doble de la más probable. De estos datos se deduce que el número de moléculas cuyas velocidades se encuentran entre $1/2v_p$ y $2v_p$ constituye el 92% — 5% = = 87% de la totalidad de las moléculas del gas.

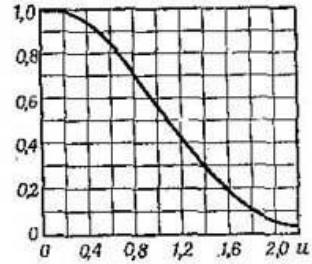


Fig. 124. Las ordenadas de esta curva dan el número relativo de moléculas cuyas velocidades son mayores que el valor dado u.

Ejemplo 2. ¿Qué parte de las moléculas tiene una energía cinética de traslación mayor que el doble de la media?

Solución. La energía cinética media es la que tiene una molécula que se mueve a la velocidad cuadrática media. Por lo tanto, la velocidad de las moléculas cuya energía cinética es igual al doble de la energía cinética media debe satisfacer la condición

$$v = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\overline{v^2}}.$$

La velocidad relativa u, correspondiente a este valor de v, es igual a

$$u=\frac{v}{v_p}=\sqrt{2}\frac{\sqrt{\overline{v^2}}}{v_p},$$

pero

$$\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\frac{3RT}{\mu}},\quad \text{y}\quad v_p=\sqrt{\frac{2RT}{\mu}},$$

de donde obtenemos

$$u=\sqrt{2}\sqrt{\frac{3}{2}}=\sqrt{3}=1{,}73.$$

Según el diagrama de la fig. 124, al valor de $u = 1{,}73$ corresponde el de $\frac{n_u}{n} = 0{,}11$, de donde se deduce, que el número de moléculas, cuya energía cinética es mayor que el doble de la media, constituye un 11% de la totalidad de las moléculas.

La fórmula de Maxwell (2) nos da el número de moléculas cuyas velocidades se encuentran en el intervalo dado Δv, *independientemente de las direcciones que dichas velocidades tengan*. Pero puede plantearse un problema más concreto: ¿cuál es el número de moléculas, cuya velocidad se encuentra comprendida en un intervalo dado y que tienen una dirección determinada? Para resolver este problema introducimos en nuestro análisis el *vector* velocidad de las moléculas v y designamos sus componentes por v_x, v_y y v_z.

El número de moléculas, cuya velocidad tiene sus componentes v_x, v_y y v_z comprendidas respectivamente en los intervalos v_x, $v_x + \Delta v_x$; v_y, $v_y + \Delta v_y$ y v_z, $v_z + \Delta v_z$, es igual a

$$\Delta n=\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot n\cdot e^{\frac{-\frac{m}{2}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}{kT}}\Delta v_x\Delta v_y\Delta v_z, \tag{6}$$

o

$$\Delta n=\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot n\cdot e^{-\frac{E_c}{kT}}\Delta v_x\Delta v_y\Delta v_z, \tag{6a}$$

donde

$E_c=\frac{m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}{2}$ es la energía cinética de una molécula.

La suposición hecha para las componentes de las velocidades v_x, v_y y v_z, limita, tanto el intervalo en que se encuentra el valor numérico de la velocidad v, como su dirección. Efectivamonte, introduzcamos un sistema de coordenadas y tomemos sobre sus ejes los valores de v_x, v_y y v_z (fig. 125); el vector velocidad v estará representado en este sistema por una flecha, cuyo punto de aplicación se encontrará en el origen de coordenadas. La condición de que las componentes de las velocidades de las moléculas v_x, v_y y v_z, se encuentren en el intervalo v_x, $v_x + \Delta v_x$; v_y, $v_y + \Delta v_y$ y v_z, $v_z + \Delta v_z$, significa que se trata de todas aquellas moléculas cuyas velocidades v se representan en la fig. 125 como vectores que tienen sus extremos dentro de un cubo dado $\Delta\omega = \Delta v_x\cdot\Delta v_y\cdot\Delta v_z$.

Si el vector velocidad de las moléculas se limita únicamente por la condición de que su valor numérico se encuentre dentro de un intervalo de velocidades dado v, $v + \Delta v$, estas velocidades se representarán como vectores (fig. 126) que tendrán todas las direcciones posibles, pero cuyas longitudes terminarán dentro de una capa esférica de radio v y de espesor Δv *). El número de molé-

*) Para mayor claridad, en la fig. 126 se representa únicamente la sección de esta capa esférica por el plano YZ.

culas cuyas velocidades satisfacen esta condición se expresa por la fórmula (6), donde el producto $\Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z$ deberá ser sustituido por el volumen de la capa esférica citada

$$\Delta\omega = 4\pi v^2 \cdot \Delta v,$$

de donde según (6)

$$\Delta n = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot n \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \cdot 4\pi v^2 \Delta v. \qquad (7)$$

Se ve fácilmente, que la fórmula (7) se convierte en la fórmula de Maxwell (2) si en ella se introduce la velocidad relativa $u = \frac{v}{v_p}$. Ambas fórmulas, (6)

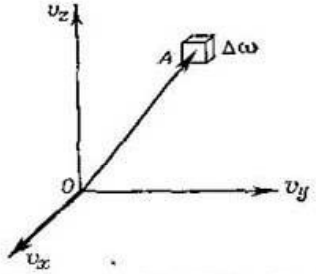


Fig. 125. Las velocidades cuyas componentes v_x, v_y y v_z están limitadas por los intervalos dados Δv_x, Δv_y, y Δv_z, se representan por vectores que tienen sus extremos dentro de un cubo $\Delta\omega = \Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z$.

y (7), nos dan la distribución de las moléculas según sus velocidades. Solamente se diferencian entre sí por el procedimiento que se emplea para elegir los grupos de moléculas cuyo número relativo nos ocupa.

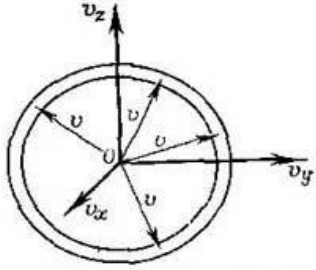


Fig. 126. Las velocidades cuyos valores numéricos están limitados por un intervalo dado se representan por vectores cuyos extremos se encuentran dentro de una capa esférica.

La fórmula (7) puede tomar otro aspecto, si en lugar de las velocidades se pone en ella la energía cinética E_c. Diferenciando la igualdad $E_c = \frac{mv^2}{2}$, obtenemos

$$dE_c = mv\, dv.$$

Sustituyendo las diferenciales dE_c y dv por pequeños intervalos de energía y velocidad, ΔE_c y Δv, hallamos

$$\Delta v = \frac{1}{mv} \Delta E_c.$$

Poniendo este valor de Δv en (7) y teniendo también en cuenta que $v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}}$, obtenemos

$$\Delta n = \frac{2}{\sqrt{\pi}(kT)^{3/2}} \cdot n \cdot e^{-\frac{E_c}{kT}} \cdot \sqrt{E_c} \cdot \Delta E_c. \quad (8)$$

La fórmula (8) nos da el número de partículas Δn que *tienen la energía cinética correspondiente al intervalo de energía dado.*

Boltzmann generalizó la ley de distribución de Maxwell (6) para el caso en que las moléculas se muevan en el campo de la gravedad (en el caso más general, en un campo de fuerzas cualquiera). En estas condiciones, la energía cinética E_c de la fórmula (6) deberá ser sustituida por la energía total de las moléculas $E = E_c + E_p$, donde E_p es la energía potencial. Además, como quiera que la energía potencial, en términos generales, depende de las coordenadas, hay que referirse a un número de moléculas para las que estén limitadas a intervalos determinados no sólo las velocidades, sino también sus coordenadas. En definitiva, en lugar de la ley de distribución (6) se obtiene

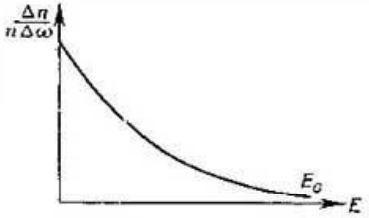


Fig. 127. Diagrama que concuerda con la ley de Boltzmann.

$$\Delta n = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot n \cdot e^{-\frac{E}{kT}} \Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z \Delta x \Delta y \Delta z. \quad (8a)$$

La fórmula (8a) expresa *la ley de distribución de Boltzmann.* En la fig. 127 se representa gráficamente la relación entre $\frac{\Delta n}{n\Delta\omega}$ y E, donde $\Delta\omega = \Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z \Delta x \times \times \Delta y \Delta z$.

§ 51. Distribución de las partículas por alturas. La fórmula de distribución de Boltzmann permite obtener la ley de la disminución del número de partículas al aumentar la altura, en el campo de la gravedad. Figurémonos una columna vertical de gas y supongamos que todas sus partes se encuentran a igual temperatura T. En estas condiciones, la velocidad de las moléculas y su distribución por velocidades, será igual en todas partes (abajo y arriba) y estará sometida a la ley de Maxwell, que nosotros utilizaremos bajo el aspecto que presenta en la fórmula (6) del § 50.

La distribución de las partículas por energías la da la fórmula de Boltzmann (8a) del mismo párrafo:

$$\Delta n = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot n \cdot e^{-\frac{E}{kT}} \Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z \Delta x \Delta y \Delta z. \quad (1)$$

La energía total $E = E_c + E_p$, donde E_c es la energía cinética y E_p la energía potencial; en este caso, la energía potencial es la energía de las molécu-

las en el campo de la gravedad, es decir, $E_p = mgh$, donde h es la altura a que se encuentran las moléculas. Por consiguiente, (1) toma la forma:

$$\Delta n = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot n \cdot e^{-\frac{E_c + mgh}{kT}} \Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z \Delta x \Delta y \Delta z,$$

o, pasando al número de partículas correspondientes a la unidad de volumen,

$$\Delta n = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot n \cdot e^{-\frac{mgh}{kT}} \cdot e^{-\frac{E_c}{kT}} \Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z. \quad (2)$$

La distribución de moléculas por velocidades, a cualquier altura, se expresa por la fórmula de Maxwell (6) del § 50:

$$\Delta n = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} n_h e^{-\frac{E_c}{kT}} \Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z. \quad (3)$$

donde n_h es el número de partículas por unidad de volumen a la altura h.

Las fórmulas (3) y (2) pueden concordarse si se admite que el número de moléculas por unidad de volumen n_h, a la altura h, se expresa por la correlación

$$n_h = n_0 \cdot e^{-\frac{mgh}{kT}}, \quad (4)$$

donde n_0 es el número de moléculas por unidad de volumen a la altura $h = 0$. Esta fórmula de n nos da la ley de distribución del número de moléculas por unidad de volumen en función de la altura: el número de moléculas por unidad de volumen n_h disminuye exponencialmente a medida que aumenta la altura (fig. 128).

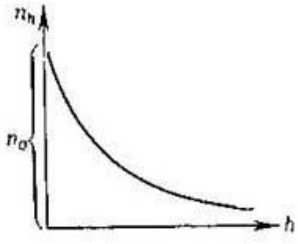


Fig. 128. Ley de la disminución del número de partículas por unidad de volumen al aumentar la altura h.

Con la fórmula (4) se puede obtener fácilmente la expresión de cómo depende de la altura la presión del gas.

La presión del gas a una altura dada es proporcional al número de partículas n por unidad de volumen [fórmula (4) § 46], de donde la ley de la disminución de la presión p al aumentar la altura h será la misma que la ley de disminución del número de partículas:

$$p_h = p_0 \cdot e^{-\frac{mgh}{kT}}.$$

Como $\frac{m}{k} = \frac{\mu}{R}$, donde μ es el peso molecular del gas, y R, la constante de los gases, podemos escribir la fórmula anterior de la forma siguiente:

$$p_h = p_0 e^{-\frac{\mu gh}{RT}}. \quad (5)$$

La fórmula (5) se llama *barométrica* y refleja cómo la presión del gas disminuye exponencialmente al aumentar la altura. Además, la fórmula (5) muestra

cómo esta disminución de la presión del gas, al aumentar la altura, depende del peso molecular: cuanto mayor es el peso molecular del gas, tanto más de prisa disminuye su presión al aumentar la altura. La fórmula (5) puede emplearse para calcular aproximadamente la presión atmosférica p_h a diferentes alturas, admitiendo que la temperatura T es igual a todas las alturas, aunque en realidad esta condición no se cumple cuando la diferencia entre ellas es considerable.

§ 52. Determinación del número de Avogadro. En todo gas que se encuentre en el campo de la gravedad, el número de moléculas por unidad de volumen disminuye al aumentar la altura. Si este número de moléculas por unidad de volumen, a una altura cero, es igual a n_0, a una altura h será

$$n_h = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}} \tag{1}$$

donde m es la masa de una molécula; g, la aceleración de la gravedad; k, la constante de Boltzmann y T, la temperatura por la escala de Kelvin [el fundamento de la fórmula (1) puede verse en el § 51].

La fórmula (1) para determinar la distribución del número de moléculas con relación a la altura, fue aplicada por Perrin a las partículas brownianas y utilizada para la determinación del número de Avogadro N. Las partículas brownianas (véase el § 43) se encuentran bajo la acción de los golpes que reciben de las moléculas que se mueven desordenadamente. Partiendo de las ideas generales sobre el carácter de estos golpes desordenados, se puede demostrar, que *la energía cinética media $\overline{w}$ de una partícula browniana es igual a la energía cinética media de las moléculas a la temperatura dada T*, es decir,

$$\overline{w} = \frac{3}{2} kT = \frac{3}{2} \left(\frac{R}{N}\right) T \tag{2}$$

Por lo tanto, el conjunto de las partículas brownianas reproduce exactamente el modelo de la estructura cinético-molecular del gas; aunque en este modelo las «moléculas» son tan grandes que podemos verlas al microscopio y las velocidades de sus movimientos son pequeñas, porque su masa m es muy grande en comparación con la de una molécula aislada. El conjunto de las partículas brownianas cumple todas las leyes de los gases, incluida la (1), que determina la disminución del número de partículas al aumentar la altura.

De la fórmula (2) se deduce que el número de Avogadro N es igual a

$$N = \frac{3}{2} \frac{R}{\overline{w}} \cdot T, \tag{3}$$

donde vemos que, conociendo la energía cinética media $\overline{w}$ de una partícula browniana, a una temperatura dada T, se puede determinar directamente el número de Avogadro N. Sin embargo, los inten-

tos realizados para establecer directamente la energía cinética media de las partículas de Brown $\overline{w} = \frac{m\overline{v^2}}{2}$, por la masa m de una partícula y el valor medio del cuadrado de su velocidad $\overline{v^2}$, no han dado los resultados apetecidos. Esto se explica porque, debido a lo caótico que es el movimiento de las partículas antedichas, no es posible determinar el valor medio del cuadrado de su velocidad $\overline{v^2}$ observándolas al microscopio. Por esto Perrin dio un pequeño rodeo y empezó por hallar la energía cinética media $\overline{w}$ partiendo de la ley de distribución de las partículas por alturas.

Si en un líquido cualquiera hay partículas brownianas en suspensión, no todas ellas descienden hasta el fondo con el tiempo, sino que, debido al movimiento que realizan, se reparten de manera que su densidad disminuye al aumentar la altura: la cantidad de partículas será mayor junto al mismo fondo, mientras que a cierta altura habrá pocas. La ley de la distribución del número de partículas brownianas n según sea la altura h viene determinada por la fórmula (1). Esta disminución del número de partículas, al aumentar la altura, es extraordinariamente rápida (porque la masa m de cada partícula es muy grande en comparación con la masa de una molécula aislada), pudiendo apreciarse cuando las variaciones de la altura h son pequeñas fracciones de milímetro.

Poniendo en la fórmula (1), en lugar de la temperatura T, su valor por medio de $\overline{w}$, según la fórmula (2), obtenemos

$$n_h = n_0 \cdot e^{-\frac{3Ph}{2\overline{w}}}, \qquad (4)$$

donde P es el peso de una partícula browniana; en esta fórmula (4) vemos que, por la ley de disminución del número de partículas al aumentar la altura, conociendo su masa m se puede hallar la energía cinética media $\overline{w}$, y conociendo el valor de $\overline{w}$ podemos calcular por (3) el número de Avogadro N.

Perrin preparó una emulsión bastante homogénea de resina de *garcinia morella* (gutagamba o gomaguta), centrifugándola repetidas veces hasta conseguir la formación de partículas esféricas de iguales dimensiones, del orden de una micra. Estas partículas, suspendidas en el agua, reflejaban un intenso movimiento browniano al ser observadas al microscopio. El número de partículas contenidas en el líquido disminuía a medida que aumentaba la altura. Esta disminución era muy rápida.

Para observar esta disminución se utilizó el procedimiento siguiente: en el portaobjetos (fig. 129) se practicó un hueco cilíndrico; este hueco se llenó de emulsión y se tapó con el cubreobjetos. La emulsión así preparada se observó al microscopio con poca profundidad de campo visual. Enfocando el microscopio a una determinada

capa de emulsión, se podían observar claramente las partículas que se encontraban en esa capa, pero las imágenes de las partículas situadas más arriba o más abajo resultaban desenfocadas. Desplazando el objetivo del microscopio se podían ir enfocando sucesivamente las distintas capas de la emulsión y, de esta forma, comprobar la variación del número de partículas al aumentar la altura.

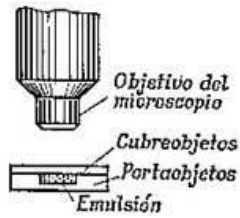
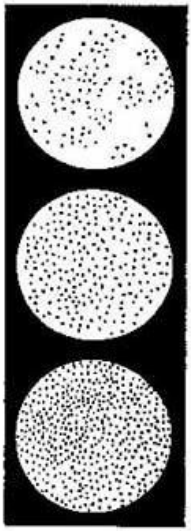


Fig. 129. Procedimiento para observar las partículas brownianas al microscopio.

En la figura 130 se representan varios microfotogramas instantáneos de las partículas brownianas tomados de diferentes capas del líquido: en la capa inferior hay muchas partículas, mientras que en la superior hay pocas. El cómputo directo del número de partículas n'_h que se ven al microscopio en las capas situadas a diferentes alturas h, permite establecer la ley de su disminución al aumentar la altura. Como quiera que el número de partículas n'_h que se observan en el campo visual del microscopio es proporcional al número de partículas n_h por unidad de volumen a esta misma altura, tenemos, que el número n'_h deberá satisfacer la fórmula (4).



Supongamos que el número de partículas de una capa situada a la altura h_1 sea n'_{h_1}; por la fórmula (4)

$$n'_{h_1} = n'_0 e^{-\frac{3}{2}\frac{P}{w}h_1};$$

Fig. 130. Distribución de las partículas brownianas por capas a diferentes alturas. Cuanto más alta está la capa, menor es el número de partículas que hay en ella.

análogamente, para el número de partículas n'_{h_2}, que se encuentran en la capa cuya altura es h_2, obtenemos

$$n'_{h_2} = n'_0 \cdot e^{-\frac{3}{2}\frac{P}{w}h_2}, \quad \text{de donde} \quad \frac{n'_{h_1}}{n'_{h_2}} = e^{-\frac{3}{2}\frac{P}{w}(h_1 - h_2)}.$$

Logaritmando esta ecuación y resolviéndola con relación a $\overline{w}$, obtenemos

$$\overline{w} = \frac{3}{2} \frac{P(h_2 - h_1)}{\ln \frac{n'_{h_1}}{n'_{h_2}}} \qquad (5)$$

Aquí, los valores de n'_{h_1} y de n'_{h_2} se hallan contando directamente el número de partículas que se ven al microscopio, y $h_2 - h_1$ es la magnitud en que hay que desplazar el objetivo del microscopio para pasar de la observación del número de partículas de la capa situada a la altura h_1 a la observación de las que se encuentran en la capa situada a la altura h_2. Este desplazamiento se mide con el tornillo micrométrico. Para poder determinar $\overline{w}$ nos queda por hallar el peso de una partícula browniana m. Este peso fue medido por Perrin valiéndose de la fórmula de Stokes (§ 42). Esta fórmula da la posibilidad de determinar el radio r de una partícula cuando se conoce su velocidad de caída y la viscosidad del líquido en que se encuentra. El peso P de una partícula esférica se expresa directamente por medio de su radio r y de la densidad ρ de la substancia de que está formada

$$P = \frac{4}{3} \pi r^3 (\rho - \rho'),$$

donde ρ' es la densidad del agua

La velocidad de caída de las partículas aisladas que observó Perrin era imposible de determinar, puesto que estas partículas realizaban movimientos brownianos. No obstante, se puede proceder del modo siguiente: se echa la emulsión en una vasija alta y estrecha y se remueve para que sus partículas se distribuyan regularmente por toda la altura; hecho esto, se deja en reposo. Las partículas comenzarán a posarse y la parte superior del líquido empezará a clarear. Al ocurrir esto se forma una divisoria que limita el enturbiamiento, la cual, aunque algo imprecisa debido al movimiento browniano, se distingue bien a simple vista. La velocidad con que desciende este límite del enturbiamiento nos da la velocidad de caída de las partículas aisladas. De esta forma se pueden hallar todos los datos necesarios para determinar la energía cinética media de una partícula $\overline{w}$. Conociendo $\overline{w}$, determinamos, como dijimos anteriormente, por la fórmula (3) el número de Avogadro N.

Otro procedimiento empleado por Perrin para determinar el número de Avogadro N, se basa también en la observación del desplazamiento de las partículas brownianas y consiste en lo siguiente: supongamos que el movimiento de las partículas brownianas se proyecta sobre un eje OX trazado arbitrariamente. Supongamos también que durante el tiempo t, que dura nuestra observación, la proyección del desplazamiento en este eje es igual a x. Si medimos

estas x para muchas partículas tendremos que, como demostró Einstein, el valor medio del cuadrado de x satisfará la correlación

$$\overline{x^2} = \frac{RT}{3\pi\eta r N} t,$$

donde R es la constante de los gases; T, la temperatura por la escala de Kelvin; η, el coeficiente de viscosidad del medio en que se encuentran las partículas brownianas y r, el radio de una de estas partículas. Como todos los datos que intervienen en esta fórmula, a excepción de N, pueden medirse directamente, podemos servirnos de ella para calcular el número de Avogadro N.

Las mediciones llevadas a cabo por Perrin demostraron, que el número de Avogadro es una magnitud del orden de $6 \cdot 10^{23}$ partículas por mol. Los métodos empleados por Perrin no podían dar resultados más exactos. Más adelante (véase el t. II) daremos a conocer otros procedimientos que permiten determinar con mayor exactitud dicho número. Como dijimos anteriormente, en la actualidad se acepta el valor del número de Avogadro $N = 6{,}023 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}.

§ 53. Recorrido libre de las moléculas. Como las moléculas del gas se encuentran en estado de movimiento caótico constante, chocan entre sí, pero entre cada dos choques sucesivos recorren un cierto espacio libre λ. La longitud de los recorridos entre dos choques suele ser distinta pero, como el número de moléculas es muy grande y sus movimientos desordenados, podemos referirnos al recorrido libre medio. Calculemos este recorrido libre medio $\overline{\lambda}$ de las moléculas.

Estudiemos para ello el comportamiento de una molécula determinada, admitiendo que tiene forma esférica, que su radio es r y que se mueve con una velocidad v. Después de cada choque, la velocidad v de la molécula cambia de dirección, pero, para simplificar, supongamos que dicha molécula sigue moviéndose en la misma dirección que antes y que todas las demás moléculas están quietas. En estas condiciones, la molécula en cuestión chocará con todas aquellas otras cuyos centros se encuentren a una distancia de $2r$ o menor (fig. 131) de la línea recta que marca la dirección de su movimiento.

Por consiguiente, en la unidad de tiempo esta molécula chocará con todas las z moléculas cuyos centros se encuentran dentro de un cilindro de radio $R = 2r$ y cuya longitud l es numéricamente igual a la velocidad v (fig. 132); el número de moléculas z que se encuentra dentro de este cilindro será igual a

$$z = \pi R^2 v n_0,$$

donde n_0 es el número de moléculas que hay en la unidad de volumen. Poniendo en esta fórmula $R = 2r$ y suponiendo que v es igual a la velocidad media del movimiento de las moléculas $\overline{v}$, obtenemos

la expresión *del número medio de choques de las moléculas en la unidad de tiempo*

$$\bar{z} = \pi r^2 \bar{v} n_0. \tag{1}$$

Pero como las demás moléculas también se mueven en realidad, el número de choques $\bar{z}$ es algo mayor que el que se obtiene con la fórmula (1).

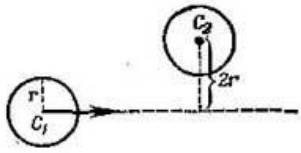


Fig. 131. La molécula chocará con todas aquellas otras cuyos centros se encuentren a una distancia no mayor de $2r$ de la línea recta por la cual se mueve.

Los cálculos numéricos correspondientes demuestran que, efectivamente, $\bar{z}$ es $\sqrt{2}$ veces mayor, es decir:

$$\bar{z} = 4\sqrt{2}\,\pi r^2 \bar{v} n_0. \tag{2}$$

Las dimensiones de las moléculas son magnitudes del orden de $r \cong 10^{-8}$ cm; el número de moléculas contenido en la unidad de

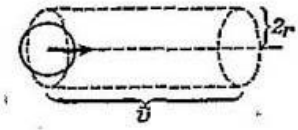


Fig. 132. La molécula chocará con todas aquellas otras cuyos centros se encuentren dentro de un cilindro de radio $2r$.

volumen en condiciones normales es $n_0 \cong 3 \cdot 10^{19}$ y la velocidad de estas moléculas $\bar{v} \cong 5 \cdot 10^4$ cm/s, de donde deducimos que el número de choques que experimentan las moléculas del gas en la unidad de tiempo será una magnitud del orden de

$$\bar{z} \cong 4 \cdot \sqrt{2} \cdot 3{,}14\,(10^{-8})^2 \cdot 5 \cdot 10^4 \cdot 3 \cdot 10^{19}\ \text{s}^{-1} \cong 3 \cdot 10^9\ \text{s}^{-1}.$$

Es decir, en condiciones normales las moléculas experimentan varios millares de millones de choques por segundo.

El recorrido libre medio de las moléculas $\bar{\lambda}$ se obtiene dividiendo el camino medio recorrido en la unidad de tiempo por el número de choques $\bar{z}$ que se producen en este mismo tiempo. Como el camino recorrido en la unidad de tiempo es numéricamente igual a la velocidad $\bar{v}$, el recorrido libre medio de las moléculas será:

$$\bar{\lambda} = \frac{\bar{v}}{\bar{z}}. \tag{3}$$

Poniendo el valor de $\bar{z}$ que da la fórmula (2), obtenemos

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{4\sqrt{2}\,\pi r^2 n_0} \tag{4}$$

o si en lugar del radio de la molécula ponemos su diámetro $\sigma = 2r$, tendremos

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi\sigma^2 n_0}. \tag{4a}$$

Por las fórmulas (4) y (4a) se ve, que el recorrido libre medio de las moléculas $\bar{\lambda}$ es inversamente proporcional al número de moléculas en la unidad de volumen n_0. Y como a temperatura constante n_0 es directamente proporcional a la presión del gas, obtenemos

$$\frac{\bar{\lambda}_1}{\bar{\lambda}_2} = \frac{n_{02}}{n_{01}} = \frac{p_2}{p_1}, \tag{5}$$

donde $\bar{\lambda}_1$ y $\bar{\lambda}_2$ son los recorridos libres medios correspondientes a las presiones p_1 y p_2 del gas. Según la fórmula (5) *el recorrido libre medio de las moléculas $\bar{\lambda}$ es inversamente proporcional a la presión p del gas a temperatura constante.*

El valor absoluto del recorrido libre medio de las moléculas depende de su diámetro σ. Más adelante veremos que existen procedimientos para determinar el valor numérico de $\bar{\lambda}$ para los diversos gases; con estos valores numéricos de $\bar{\lambda}$, aplicando la fórmula (4a), se determina el diámetro σ de las moléculas. Pero hay que tener en cuenta que los diámetros hallados de esta forma no representan exactamente las dimensiones reales de las moléculas. En primer lugar, porque las moléculas no son esferas regulares, y en segundo, porque en realidad los choques entre dichas moléculas no son semejantes a los que se producen entre esferas perfectamente elásticas. Las moléculas son de por sí sistemas complejos, constituidos por núcleos atómicos y electrones. Las fuerzas que actúan entre ellas, y que se dejan sentir a pequeñas distancias, tienen caracteres complicados (en parte eléctricos). El proceso del choque se reduce a que, a pequeñas distancias, las moléculas se repelen entre sí, y esta fuerza de repulsión aumenta a medida que disminuye la distancia entre ellas (para más detalles véase el § 61). El resultado de la acción de estas fuerzas es que las moléculas cambian la dirección de sus velocidades.

Es decir, el diámetro de las moléculas σ, calculado partiendo de la suposición de que las moléculas son esferas perfectamente elásticas, da solamente una idea aproximada de las dimensiones que éstas tienen; la magnitud σ es lo que suele llamarse *el diámetro eficaz de la molécula*. La magnitud πr^2 se denomina *sección eficaz de la molécula*.

El carácter aproximado de los cálculos que conducen a la fórmula (4) se deja sentir en que, en realidad, el recorrido libre medio de las moléculas depende en cierto grado de la temperatura, mientras que por dicha fórmula no debe existir esta dependencia si el calentamiento se realiza a volumen constante. Al elevarse

Tabla VI

Recorrido libre medio y diámetro eficaz de las moléculas y átomos

Gas (vapor)	$\overline{\lambda} \cdot 10^5$ cm	$\sigma \cdot 10^8$ cm
Hidrógeno, H_2	1,123	2,3
Nitrógeno, N_2	0,599	3,1
Oxígeno O_2	0,647	2,9
Helio, He	1,798	1,9
Argón, Ar	0,666	3,6

la temperatura, el recorrido libre medio de las moléculas aumenta un poco. Llamando $\overline{\lambda}_\infty$ al recorrido libre medio calculado por la fórmula (4), el recorrido medio libre efectivo $\overline{\lambda}$ a la temperatura T será

$$\overline{\lambda} = \overline{\lambda}_\infty \frac{T}{C+T},$$

donde C es una magnitud constante para cada gas, que lleva el nombre de *constante de Sutherland*; su valor se determina experimentalmente.

Para el nitrógeno, por ejemplo, $C = 102{,}7°$, de donde el recorrido libre medio $\overline{\lambda}$ que da la fórmula de Sutherland a $T = 300°$ K es un 12% mayor que a $T = 200°$ K.

En la tabla VI se dan los recorridos libres medios $\overline{\lambda}$, en condiciones normales ($p = 1$ atm y $t = 0°$ C), para algunos gases y vapores, y los diámetros eficaces σ calculados a base de estos valores de $\overline{\lambda}$.

Para el aire, según cálculos aproximados, el recorrido libre medio $\overline{\lambda}$ puede considerarse, en condiciones normales, igual a $\overline{\lambda} = 7 \cdot 10^{-6}$ cm.

Sabiendo esto, por la fórmula (5) obtenemos, a distintas presiones, los valores que recoge la tabla VII.

Tabla VII

Recorrido libre medio de las moléculas del aire a diferentes presiones

Presión en mm Hg	760	1	0,01	10^{-4}	10^{-6}
Recorrido libre medio $\overline{\lambda}$ en cm	$7 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-1}$	$5 \cdot 10^{1}$	$5 \cdot 10^{3}$

En la tabla VII puede verse cómo el recorrido libre medio $\overline{\lambda}$ de las moléculas del gas, que en condiciones normales representa aproximadamente la cienmilésima parte de un centímetro, cuando el gas está enrarecido a una presión de 0,01 mm Hg alcanza la magnitud de 5 mm y cuando el enrarecimiento es muy grande (con una presión del orden de 10^{-6} mm Hg), el recorrido libre medio de las moléculas llega a tener la enorme magnitud de varias decenas de metros.

Estos cálculos permiten formarnos una idea de lo que representa de por sí un gas en estado de gran enrarecimiento, es decir, cuando en las vasijas en que se encuentra se hace el vacío con buenas bombas modernas. Técnicamente no es difícil extraer el aire de una vasija hasta una presión $p \cong 10^{-4}$ mm Hg; en estas condiciones, el número de moléculas por 1 cm^3 será todavía igual, aproximadamente, a $4 \cdot 10^{12}$. El recorrido libre medio de estas moléculas, según los datos de la tabla VII, es igual a $\overline{\lambda} = 50$ cm. Si las dimensiones de la vasija son del orden de 10 cm, tendremos que cada molécula recorrerá varias veces la vasija de parte a parte, rebotando en sus paredes, antes de que casualmente se encuentre en su camino con otra molécula.

De esta forma, a pesar de que la cantidad de moléculas por 1 cm^3 sigue expresándose aún por un número de doce cifras, la vasija puede considerarse suficientemente «vacía», puesto que las moléculas se desplazan en ella libremente de pared a pared.

§ 54. Experimentos con haces moleculares. La posibilidad de obtener enrarecimientos del gas en que el recorrido libre de las moléculas alcanza decenas de centímetros e incluso varios metros, permite hacer experimentos que, de forma suficientemente directa, confirman la veracidad de las conclusiones fundamentales de la teoría cinético-molecular de los gases.

Figurémonos un recipiente dividido por una serie de tabiques (fig. 133). Estos tabiques tienen unos orificios pequeños y redondos, a_1, a_2, alineados entre sí. En el recipiente se ha hecho el vacío hasta tal grado, que el recorrido libre medio de las moléculas es mayor que las dimensiones de aquél. En la parte A del recipiente se halla un metal K de bajo punto de fusión, (por ejemplo, sodio). Si se calienta esta parte del recipiente, el metal K desprende vapores, los cuales llenan el espacio A con una presión suficientemente baja. Las moléculas de vapor cuya velocidad está dirigida en el sentido de la línea recta que une los orificios a_1 y a_2, pasan por estos orificios y van a parar a la parte B del recipiente. Como la presión de los restos de gas que quedaron en el recipiente es muy baja, el movimiento de las moléculas en la parte B es rectilíneo y uniforme. El conjunto de las moléculas del vapor metálico que atraviesa los orificios a_1 y a_2 forma en la parte B un haz molecular que avanza en

línea recta. Por esto, el experimento que describimos se denomina *experimento con haz molecular* (*o atómico*). Al llegar a la pared r, los átomos del metal se adhieren a ella siempre que esté suficientemente fría. De esta forma, en la pared r se deposita una capa de metal apreciable, la cual revela que el haz molecular llegó hasta dicha pared. La forma de la capa depositada en la pared r reproduce la configu-

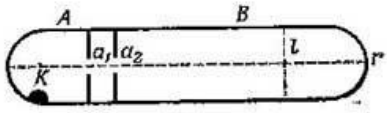


Fig. 133. Formación del haz molecular.

ración de los orificios a_1 y a_2; si estos orificios son redondos, la mancha de metal depositado será también redonda. Pero si en el camino que recorre el haz se intercala un obstáculo cualquiera, por ejemplo, un alambre tensado l, en la mancha de metal depositado se produce la «sombra» de dicho alambre. Todos estos experimentos sirven para convencernos directamente de que las moléculas del haz se mueven en línea recta.

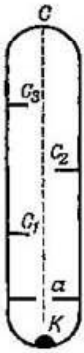


Fig. 134. Determinación del recorrido libre de las moléculas por medio de un haz molecular.

Con el haz molecular se puede efectuar otro experimento parecido, que permite valorar el recorrido libre de las moléculas. Cuando la presión de los residuos de gas es baja, el haz molecular que sale por el orificio a (fig. 134) llega a la pared contraria C; en las láminas laterales C_1, C_2, C_3, . . ., a pesar de estar más cerca, no se deposita el metal. Pero si añadimos gas al recipiente, para de esta forma disminuir el recorrido libre, las moléculas lanzadas en haz comienzan a experimentar choques y no llegan hasta la pared C, porque sus colisiones con las moléculas del gas hacen que se desvíen hacia un lado y que se depositen en la lámina lateral C correspondiente y en las otras más distantes. Cuanto mayor sea la presión del gas que se añade, tanto menor será el recorrido libre y tanto más próximas estarán las láminas laterales a que llegan moléculas del haz. Este experimento permite valorar el recorrido libre medio a presiones diferentes. El orden de los valores que así se obtienen coincide con el de los calculados basándose en la teoría cinético-molecular de los gases.

Si el número de moléculas por unidad de tiempo que lleva el haz al pasar por el orificio a es igual a n_0, a cierta distancia x de dicho orificio este número será menor, puesto que parte de las moléculas se desvía a consecuencia de los choques.

El cálculo teórico demuestra, que a la distancia x, del origen del haz, llegan en la unidad de tiempo n_x moléculas, lo que se determina por la fórmula

$$n_x = n_0 e^{-\frac{x}{\bar{\lambda}}},$$

donde $\bar{\lambda}$ es el recorrido libre medio. Es decir, el número de moléculas del haz disminuye según una ley exponencial. Si suponemos que $x = 2\bar{\lambda}$, tendremos:

$$n_{2\bar{\lambda}} = n_0 e^{-\frac{2\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}}} = n_0 e^{-2} = 0{,}135 n_0,$$

es decir, solamente un 13,5% del total de las moléculas del haz recorren una distancia dos veces mayor que el recorrido libre medio.

Finalmente, mencionaremos los experimentos que se hacen con los haces moleculares para valorar la velocidad de las moléculas de los gases. El primero que realizó estos experimentos fue Stern.

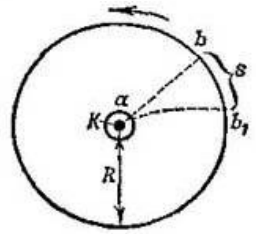


Fig. 135. Esquema del experimento de Stern para hallar las velocidades de las moléculas.

La idea del experimento de Stern se reduce a lo siguiente: figurémonos un recipiente cilíndrico, a lo largo de cuyo eje hay colocado un alambre K (fig. 135). Este alambre K está rodeado de un tabique circular en el que existe una ranura a. En todo el recipiente se practica un alto vacío. El alambre que utilizó Stern en sus experimentos era de platino recubierto con una capa de plata. Al calentar el alambre con una corriente eléctrica, la plata se vaporizaba y se producía un haz molecular que salía por la rendija a y llegaba al punto b de la pared del recipiente. Si en estas condiciones se hacía girar dicho recipiente alrededor de su eje, que pasaba por el alambre K, el haz comenzaba a retrasarse con relación a la pared de aquél y dejaba su huella en el punto desviado b_1. La desviación s entre los puntos b y b_1 es fácil de relacionar con la velocidad media $\bar{v}$ de las moléculas del haz. Si R es el radio del recipiente y $\bar{t}$ es el tiempo medio, durante el cual las moléculas se trasladan desde el alambre K hasta la pared, tendremos que

$$\bar{t} = \frac{R}{\bar{v}}.$$

Durante este tiempo $\overline{t}$, cada punto de la pared recorre un espacio s, igual a

$$s = \omega R \overline{t},$$

donde ω es la velocidad angular de la rotación del recipiente. De esta última igualdad tenemos

$$\overline{t} = \frac{s}{\omega R}.$$

Igualando entre sí estas dos expresiones de $\overline{t}$, obtenemos

$$\overline{v} = \frac{\omega R^2}{s}.$$

Como las moléculas se mueven con velocidades distintas, la huella que se produce en el punto b_1 es algo imprecisa. Pero midiendo la desviación s hasta el centro de dicha huella y conociendo el radio R del recipiente y la velocidad angular de su rotación ω, podemos

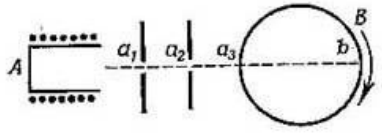


Fig. 136. Esquema de experimento para determinar las velocidades de las moléculas.

determinar la velocidad media de las moléculas $\overline{v}$. Las mediciones realizadas para la plata resultaron en perfecto acuerdo con el valor de la velocidad calculado por las fórmulas de la teoría cinética de los gases.

El experimento de Stern fue repetido más tarde por procedimientos diferentes, uno de los cuales se muestra en la fig. 136.

En el horno A se vaporiza bismuto en el vacío, con lo que, a través de las rendijas a_1 y a_2, se desprende un haz atómico. Delante de este haz gira un cilindro B con una rendija a_3. Cuando esta rendija a_3 se encuentra enfrente de las rendijas a_1 y a_2, los átomos penetran en el cilindro. Mientras los átomos atraviesan el cilindro, éste tiene tiempo de girar un determinado ángulo, por lo que los átomos no van a parar al punto b, situado frente a la rendija a_3, sino a un punto algo desviado con respecto al b. Los átomos más veloces se desvían menos y los más lentos más. Se obtiene una franja de metal depositado cuya densidad es diferente en distintos sitios. Midiendo la densidad del metal depositado puede hallarse la ley de la distribución de los átomos por velocidades.

La ley de la distribución de las moléculas por velocidades en el haz molecular, se diferencia algo de la ley de la distribución de las moléculas por velocidades en el volumen del gas. En este último caso las moléculas se distribuyen

por velocidades de acuerdo con la ley de Maxwell [fórmula (2) del § 50]:

$$\Delta n = \frac{4}{\sqrt{\pi}} n e^{-u^2} u^2 \Delta u. \quad (1)$$

Pero en el haz molecular hay más moléculas rápidas que en el gas que lo origina. Esto se explica, porque las moléculas rápidas se abren paso con más facilidad que las lentas a través del orificio del diafragma. Los cálculos demuestran, que mientras en el gas el número relativo de moléculas, cuyas velocidades se encuentran comprendidas en el intervalo u, $u + \Delta u$, es igual a $\Delta n/n$, en el haz, el número relativo de moléculas con velocidades comprendidas en este mismo intervalo será:

$$\frac{\Delta n'}{n'} = \frac{\Delta n}{n} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot u,$$

donde u es la velocidad relativa de las moléculas. Por esto, la ley de la distribución de las moléculas del haz por velocidades no se expresa por la fórmula (1), sino por la fórmula:

$$\Delta n' = 2n' e^{-u^2} u^3 \Delta u. \quad (2)$$

§ 55. Fenómenos de transporte en los gases. Difusión. El movimiento desordenado de las moléculas de los gases da lugar a su constante remoción, por lo que dos gases heterogéneos puestos en contacto directo se compenetran entre sí, es decir, se difunden. El transporte de las moléculas del gas de unos sitios a otros también crea un mecanismo, que facilita los fenómenos de rozamiento interno en los gases y de conductividad térmica. Todos los fenómenos relacionados con el movimiento de las moléculas se conocen con la denominación común de *fenómenos de transporte*.

Cuando la teoría cinética de los gases estaba en su época de desarrollo se le hacían objeciones del tipo siguiente: si la velocidad con que se mueven las moléculas es realmente del orden de varios centenares de metros por segundo, como afirma la teoría cinética de los gases, la difusión debe realizarse muy de prisa. Por ejemplo, si en el rincón de una habitación se abre un recipiente que contenga una substancia olorosa, este olor deberá percibirse inmediatamente en toda la habitación, puesto que las moléculas de la substancia en cuestión sólo necesitan unas fracciones de segundo para recorrer un espacio igual a las dimensiones de la habitación. Pero todos sabemos que la difusión de los gases, a la presión atmosférica, se desarrolla lentamente; por eso en nuestro caso, los olores se defunden despacio. El error de estos razonamientos reside en que no tienen en cuenta que las moléculas, debido a la pequeñez de su recorrido libre a la presión atmosférica, chocan constantemente con otras moléculas y, por consiguiente, se «empujan» sin salir del sitio. Es decir, las moléculas, a pesar de su gran velocidad, es muy poco lo que se apartan en un segundo del sitio en que estaban, ya que su trayectoria es una línea quebrada sumamente compleja.

Empecemos por estudiar el fenómeno *de la difusión*.

Las observaciones demuestran que, cuando la difusión se realiza a través de una superficie ΔS, el transporte de la masa de gas ΔM será tanto mayor cuanto mayor sea el área de dicha superficie ΔS, cuanto mayor el intervalo de tiempo Δt que dure la difusión que se observa y cuanto más rápidamente cambie de dirección, perpendicularmente a ΔS, la densidad parcial ρ del gas que se difunde. Tracemos un eje OX perpendicular al área ΔS; supongamos que la densidad parcial del gas, en dos puntos separados entre sí por un intervalo Δx, se diferencia en $\Delta\rho$; en este caso la magnitud $\frac{\Delta\rho}{\Delta x}$ caracteriza la variación de la densidad ρ por unidad de longitud en la

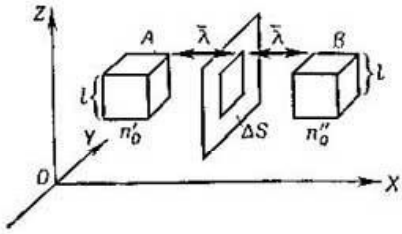


Fig. 137. Transporte de moléculas a través del área ΔS de un plano imaginario.

dirección del eje OX; esta magnitud se llama *gradiente de densidad*. De lo expuesto se deduce que ΔM es directamente proporcional al gradiente de densidad $\Delta\rho/\Delta x$, al área de la superficie ΔS y al tiempo Δt:

$$\Delta M = -D\left(\frac{\Delta\rho}{\Delta x}\right)\Delta S\Delta t. \qquad (1)$$

La magnitud D, que depende de la naturaleza del gas y de las condiciones en que éste se encuentra, se llama *coeficiente de difusión*. El signo menos significa que la masa se transporta en el sentido en que disminuye la densidad.

La fórmula (1) caracteriza al fenómeno de la difusión desde el punto de vista macroscópico.

Examinemos ahora este mismo fenómeno desde el punto de vista de la teoría cinético-molecular de los gases. Para simplificar, examinemos dos gases distintos, que se compenetren entre sí, y cuyas moléculas sean tan semejantes, que sus masas y secciones eficaces puedan considerarse iguales. Estas moléculas tendrán, en condiciones iguales, los mismos recorridos libres y las mismas velocidades.

Calculemos el número de moléculas de uno de los dos gases que pasan por la superficie ΔS (fig. 137), la cual es perpendicular al eje OX, en cuya dirección tiene lugar el cambio de densidad ρ del gas. Separemos mentalmente, a derecha e izquierda de la superficie antedicha, dos espacios cúbicos A y B, situados a una distancia de

ella igual al recorrido libre medio $\bar{\lambda}$. En estas condiciones podemos considerar que las moléculas que salen de uno de estos cubos llegarán a la superficie ΔS sin chocar con otras.

Supongamos, además, que las caras laterales de los cubos A y B son paralelas a la superficie ΔS y que su magnitud es igual a la de ésta; siendo l la longitud de las aristas de los cubos, es evidente que $l^2 = \Delta S$. Designemos el número de moléculas del gas contenido en el cubo A por medio de n_A. Como el movimiento de las moléculas es totalmente desordenado (véase el § 46), podemos considerar que $^1/_3$ parte de las moléculas se mueven a lo largo del eje OX y que, de ellas, la mitad lo hace en el sentido positivo de dicho eje y la otra mitad en el sentido negativo. De esta forma, del número total de moléculas n_A que se encuentra en el cubo A, solamente $^1/_6$ de n_A se mueve en dirección a la superficie ΔS. Como quiera que esta superficie ΔS se encuentra a una distancia $\bar{\lambda}$ del cubo, todas estas moléculas llegarán a ella, sin chocar con otras, y la atravesarán. El tiempo δt, durante el cual este $^1/_6$ de n_A pasa a través de la superficie ΔS, es igual al intervalo de tiempo que transcurre desde que las primeras moléculas del cubo A salen en dirección a ΔS hasta el momento en que salen las últimas; es decir, $\delta t = \frac{l}{\bar{v}}$, donde $\bar{v}$ es la velocidad media aritmética de las moléculas. De esta forma, el número de moléculas Δn_A, que pasan por la superficie ΔS de izquierda a derecha en la unidad de tiempo, será:

$$\Delta n_A = \frac{\frac{1}{6} n_A}{\delta t} = \frac{1}{6} n_A \frac{\bar{v}}{l}.$$

Llamando n_0' al número de moléculas correspondiente a la unidad de volumen en el sitio en que se encuentra el cubo A, tendremos que $n_A = n_0' l^3$, y la expresión de Δn_A se podrá escribir de la forma siguiente:

$$\Delta n_A = \frac{1}{6} n_A \frac{\bar{v}}{l} = \frac{1}{6} n_0' \bar{v} l^2 = \frac{1}{6} n_0' \bar{v} \Delta S. \qquad (2)$$

Análogamente podemos obtener que el número de moléculas Δn_B que atraviesan la superficie ΔS de derecha a izquierda en la unidad de tiempo, será:

$$\Delta n = \frac{1}{6} n_0'' \bar{v} \cdot \Delta S, \qquad (3)$$

donde n_0'' es el número de moléculas que contiene la unidad de volumen en el sitio en que se encuentra el cubo B. De donde la diferencia entre el número de moléculas que pasan a través de la superficie ΔS de izquierda a derecha y las que lo hacen de derecha a izquierda, durante un período de tiempo arbitrario Δt, será

$$\Delta n = \frac{1}{6} \bar{v} (n_0' - n_0'') \Delta S \Delta t. \qquad (4)$$

La masa ΔM transportada a través de la superficie ΔS durante el tiempo Δt, de izquierda a derecha (en dirección positiva del eje OX), puede obtenerse multiplicando el número de moléculas transportadas Δn por la masa de una molécula m, de donde

$$\Delta M = m \cdot \Delta n = \frac{1}{6} \bar{v} m (n_0' - n_0'') \Delta S \Delta t. \quad (5)$$

La diferencia $n_0'' - n_0'$, es igual a la velocidad con que varía el número de moléculas en la unidad de volumen en la dirección OX, es decir, a la magnitud $\frac{\Delta n_0}{\Delta x}$ multiplicada por la distancia que hay entre los cubos A y B; esta distancia es igual a $2\bar{\lambda}$, de donde

$$n_0'' - n_0' = \frac{\Delta n_0}{\Delta x} \cdot 2\bar{\lambda}.$$

Poniendo este valor de $n_0'' - n_0'$ en (5), obtenemos

$$\Delta M = -\frac{1}{3} \bar{v}\bar{\lambda} m \cdot \frac{\Delta n_0}{\Delta x} \Delta S \Delta t, \text{ pero } m \frac{\Delta n_0}{\Delta x} = \frac{\Delta (m n_0)}{\Delta x};$$

la magnitud mn_0 es igual a la masa del gas que se examina por unidad de volumen, es decir, a la densidad ρ, de donde

$$m \frac{\Delta n_0}{\Delta x} = \frac{\Delta \rho}{\Delta x},$$

y de aquí

$$\Delta M = -\frac{1}{3} \bar{v}\bar{\lambda} \left(\frac{\Delta \rho}{\Delta x} \right) \Delta S \Delta t. \quad (6)$$

De esta fórmula, y de acuerdo con la expresión (1), obtenemos, que la masa transportada ΔM es directamente proporcional al gradiente de densidad $\Delta\rho/\Delta x$, a la superficie ΔS y al tiempo Δt. Las fórmulas (6) y (1) coinciden entre sí admitiendo que

$$D = \frac{1}{3} \bar{v}\bar{\lambda}. \quad (7)$$

De esta forma, el coeficiente de difusión D resulta relacionado con la velocidad media del movimiento de las moléculas $\bar{v}$ y con el recorrido libre medio $\bar{\lambda}$. La velocidad media del movimiento de las moléculas $\bar{v}$ es proporcional a $\sqrt{\frac{T}{\mu}}$, mientras que el recorrido libre $\bar{\lambda}$, cuando la densidad del gas es constante, no depende de su temperatura. De esto se deduce que, para un gas dado que se calienta a volumen constante, el coeficiente de difusión $D \sim \sqrt{T}$. Si los gases son distintos pero sus moléculas tienen iguales dimensiones, a igual presión y temperatura, $D \sim \frac{1}{\sqrt{\mu}}$. El recorrido libre de las moléculas $\bar{\lambda}$, como se demostró en el § 53, es inversamente proporcional a la

presión del gas, por lo tanto, *el coeficiente de difusión es inversamente proporcional a dicha presión p*: $D \sim \frac{1}{p}$. Aquí p representa la presión conjunta de la mezcla de los dos gases.

En los gases enrarecidos la difusión es más rápida que en los sometidos a grandes presiones.

Poniendo en la fórmula (7), en lugar del recorrido libre medio $\bar{\lambda}$, su expresión según la fórmula (4a) § 53, obtenemos

$$D = \frac{\bar{v}}{3\sqrt{2}\,\pi\sigma^2 n_0}. \qquad (7a)$$

De esta forma, el coeficiente de difusión resulta relacionado directamente con el diámetro eficaz de las moléculas σ.

Cuando la difusión tiene lugar entre dos gases cuyas moléculas tienen dimensiones distintas, puede entenderse por σ el diámetro medio de las moléculas de ambos gases: $\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$.

§ 56. Rozamiento interno y conductividad térmica de los gases. En el § 42 introdujimos el concepto de coeficiente de rozamiento interno (viscosidad) η para los líquidos. Esta misma definición sirve para los gases.

Cuando las capas de un gas se mueven con velocidades distintas, entre estas capas se producen fuerzas: la capa más rápida acelera la marcha de la contigua más lenta, y viceversa, la capa más lenta frena la marcha de la más rápida. Las fuerzas de rozamiento interno f que se producen en estas circunstancias son tangentes a las capas del gas.

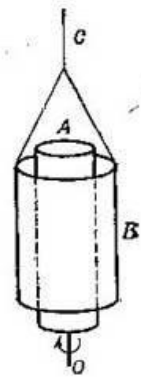


Fig. 138. Esquema del experimento para determinar el rozamiento interno de los gases.

En condiciones normales, el rozamiento interno en los gases es mucho menor que en los líquidos; no obstante, puede notarse en una serie de experimentos. El esquema de uno de ellos se muestra en la fig. 138. El espacio entre los dos cilindros coaxiales A y B está lleno del gas que se ensaya. El cilindro A va montado en el eje O y se hace que gire rápidamente; el cilindro B está colgado del hilo C, cuyo ángulo de torsión puede medirse. El cilindro A, al girar, arrastra a la capa de gas más próxima a él; ésta, gracias a la existencia de rozamiento interno, arrastra a su vez a la capa siguiente y así sucesivamente. Como consecuencia, el momento de rotación resulta aplicado al cilindro B, el cual gira hasta que la elasticidad del hilo torcido C equilibra el momento de las fuerzas aplicadas a él.

Llamemos u a la velocidad de la corriente de las capas del gas, para diferenciarla de la velocidad de las moléculas, que designamos con la letra v.

Entonces, de forma análoga a como lo hicimos en el § 42, podemos escribir, que la fuerza del rozamiento interno f, es

$$f = \eta \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) \Delta S, \qquad (1)$$

donde η es el coeficiente de rozamiento interno; $\frac{\Delta u}{\Delta x}$, el gradiente de la velocidad; y ΔS, la superficie a que se aplica la fuerza f.

Desde el punto de vista de la teoría cinética de los gases, cuando un gas fluye, a la velocidad del movimiento desordenado de sus moléculas v se une la velocidad de traslación u, que es igual para todas

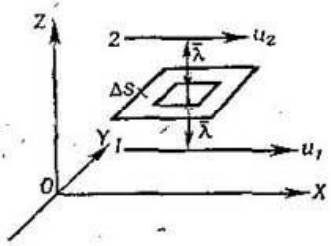


Fig. 139. Transporte de una cantidad de movimiento.

las moléculas de una capa dada (que corre a una velocidad determinada) y diferente para las distintas capas. Debido al movimiento caótico, las moléculas que pasan de una capa rápida a otra más lenta llevan consigo más componente de la cantidad de movimiento mu y, por consiguiente, hacen que esta última se acelere. Y viceversa, las moléculas que pasan de una capa más lenta a otra más rápida tienen una componente de la cantidad de movimiento mu demasiado pequeña y, como resultado, frenan la capa más rápida.

Destaquemos en el gas una superficie imaginaria ΔS (fig. 139), paralela a las capas de aquél que corren con diferentes velocidades u. Supongamos que la capa *1* se encuentra debajo de la superficie ΔS, a una distancia igual al recorrido libre medio de las moléculas $\bar{\lambda}$. En estas condiciones, las moléculas que parten de la capa *1* en dirección a la superficie ΔS, llegarán a ella sin chocar con otras. Según el § 55, el número de estas moléculas Δn_1 salidas de la capa *1*, que atraviesan la superficie ΔS en un tiempo Δt, será:

$$\Delta n_1 = \frac{1}{6} n_0 \bar{v} \Delta S \Delta t,$$

donde n_0 es el número de moléculas contenidas en la unidad de volumen. Estas Δn_1 moléculas transportan a través de la superficie ΔS

una cantidad de movimiento ΔK_1, igual a

$$\Delta K_1 = \frac{1}{6} n_0 \bar{v} \Delta S \Delta t \cdot m u_1,$$

donde u_1 es la velocidad a que corre la capa *1*.

De igual forma, partiendo de la capa *2*, que se encuentra encima de la superficie ΔS, a una distancia igual a $\bar{\lambda}$, se transportará a través de dicha superficie, durante el tiempo Δt, una cantidad de movimiento

$$\Delta K_2 = \frac{1}{6} n_0 \bar{v} \Delta S \Delta t \cdot m u_2,$$

donde u_2 es la velocidad a que corre la capa *2*. El número de moléculas por unidad de volumen n_0 es igual para ambas capas, puesto que en el caso que estudiamos se considera que la densidad del gas es la misma en todas sus partes.

Como resultado de estos dos transportes de cantidad de movimiento en direcciones contrarias, la cantidad de movimiento transportada a través de la superficie ΔS, será:

$$\Delta K = \Delta K_2 - \Delta K_1 = \frac{1}{6} n_0 \bar{v} \Delta S \Delta t \, (m u_2 - m u_1).$$

La diferencia $m u_2 - m u_1$ también puede escribirse de la forma siguiente: $m (u_2 - u_1)$. La diferencia de velocidades $u_2 - u_1$ es igual al gradiente de velocidad $\frac{\Delta u}{\Delta z}$ multiplicado por la distancia entre las capas *1* y *2*; como esta distancia es igual a $2\bar{\lambda}$, tenemos

$$u_2 - u_1 = \left(\frac{\Delta u}{\Delta z}\right) 2\bar{\lambda},$$

de donde

$$m u_2 - m u_1 = m \left(\frac{\Delta u}{\Delta z}\right) 2\bar{\lambda}$$

y, por consiguiente,

$$\Delta K = \frac{1}{3} n_0 m \bar{\lambda} \bar{v} \left(\frac{\Delta u}{\Delta z}\right) \Delta S \Delta t;$$

teniendo en cuenta que la magnitud $n_0 m$ es la densidad del gas ρ, obtenemos

$$\Delta K = \frac{1}{3} \rho \bar{\lambda} \bar{v} \left(\frac{\Delta u}{\Delta z}\right) \Delta S \Delta t,$$

de donde la fuerza f, que actúa sobre la capa más rápida, por parte de la más lenta, será

$$f = \frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{1}{3} \rho \bar{\lambda} \bar{v} \left(\frac{\Delta u}{\Delta z}\right) \Delta S. \qquad (2)$$

Comparando las expresiones (2) y (1) vemos que coinciden, siempre que el coeficiente de rozamiento interno η sea:

$$\eta = \frac{1}{3}\rho\bar{v}\bar{\lambda}. \qquad (3)$$

De esta forma, la teoría cinética de los gases permite expresar el coeficiente de rozamiento interno η por medio de las magnitudes que caracterizan la estructura molecular del gas, es decir, valiéndose del recorrido libre medio de las moléculas $\bar{\lambda}$, de su velocidad media $\bar{v}$ y de la densidad del gas ρ.

La fórmula (3) permite esclarecer el carácter de la relación que existe entre el coeficiente de rozamiento interno η y la presión del gas p. De las tres magnitudes ρ, $\bar{\lambda}$ y $\bar{v}$, que entran en la expresión (3), una de ellas, la velocidad de las moléculas $\bar{v}$, no depende de la presión, pero de las dos restantes, la densidad ρ es directamente proporcional a la presión p, mientras que el recorrido libre medio de las moléculas $\bar{\lambda}$ es inversamente proporcional a p. Por consiguiente, el producto $\rho\bar{\lambda}$ tampoco depende de la presión, es decir, *el coeficiente de rozamiento interno del gas* η *no depende de la presión* p. Este resultado, que a primera vista parece paradójico, depende de lo siguiente: cuando baja la presión p, disminuye el número de partículas n_0 por unidad de volumen y, por consiguiente, disminuye también el número de partículas que transportan cantidad de movimiento de una capa a otra. Pero, en cambio, aumenta el recorrido libre de las moléculas $\bar{\lambda}$, y, por lo tanto, las moléculas llegan a la capa dada, sin chocar con otras, desde una capa más lejana, que se mueve con una velocidad u distinta. Y como quiera que estas dos causas actúan en direcciones contrarias, la cantidad de movimiento que se transporta de una capa a otra permanece constante.

La conclusión de que el coeficiente de rozamiento interno es independiente de la presión se confirma perfectamente en la práctica. Así, por ejemplo, las mediciones realizadas con el anhídrido carbónico (CO_2) dan los siguientes valores de η para diferentes presiones:

p en mm Hg	760	380	20	2	0,6
η en g/cm s	$14{,}9\cdot10^{-5}$	$14{,}9\cdot10^{-5}$	$14{,}8\cdot10^{-5}$	$14{,}7\cdot10^{-5}$	$13{,}8\cdot10^{-5}$

Estos datos demuestran que mientras la presión varía desde 760 mm hasta 2 mm Hg, es decir, disminuyendo 380 veces, el coeficiente de rozamiento interno η sólo cambia de $14{,}9\cdot10^{-5}$ g/cm s a $14{,}7 \times \times 10^{-5}$ g/cm s, es decir, prácticamente permanece invariable. Unicamente a presiones más bajas comienza a notarse su dependencia

de la presión; más adelante estudiaremos las condiciones que hacen que η comience a depender de p.

Finalmente examinaremos otro fenómeno de transporte, el *de la conductividad térmica en el gas*. Desde el punto de vista macroscópico, el fenómeno de la conductividad térmica consiste en el transporte de cierta cantidad de calor ΔQ desde una capa más caliente a otra más fría. Si la variación de la temperatura T se realiza en la dirección del eje OX, a través de la superficie ΔS, perpendicular

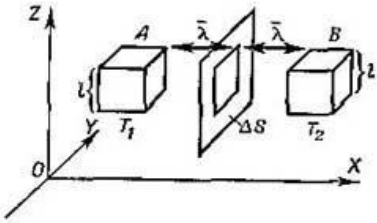


Fig. 140. Transporte de la energía por las moléculas.

a dicho eje (fig. 140), en el tiempo Δt será transportada una cantidad de calor ΔQ, la cual será tanto mayor, cuanto mayor sea la superficie ΔS, el intervalo de tiempo Δt en que se observa el transporte de calor, y cuanto más de prisa varíe la temperatura T en la dirección del eje OX, es decir, cuanto mayor sea el gradiente de temperatura $\frac{\Delta T}{\Delta x}$. Por consiguiente, podemos escribir:

$$\Delta Q = -\varkappa \left(\frac{\Delta T}{\Delta x}\right) \Delta S \Delta t, \qquad (4)$$

donde $\varkappa$ es una magnitud que depende de la naturaleza del gas y de las condiciones en que éste se encuentra; esta magnitud se llama coeficiente de conductividad térmica. El signo menos significa que la cantidad de calor ΔQ se transporta en el sentido de la disminución de la temperatura T.

El fenómeno de la conductividad térmica en los gases, generalmente, *se complica con el transporte de calor por convección*, es decir, realizado por las corrientes que se originan en el seno del gas, debidas a la diferencia de densidades que existe entre las partes del mismo que se encuentran a temperaturas distintas. Para estudiar la conductividad calorífica de los gases en su forma más pura hay que observar el transporte de calor a través del gas que se encuentra entre dos superficies planas paralelas, situadas horizontalmente, de las cuales, la superior debe tener una temperatura más elevada. En estas condiciones, las capas más frías y, por consiguiente, más densas del gas, se sitúan debajo de las más calientes y menos densas y no se producen corrientes de convección.

Desde el punto de vista cinético-molecular, el proceso de la conductividad térmica consiste en que las moléculas de la capa más caliente,

que tienen una energía cinética media $\overline{w}$ mayor, al penetrar en la capa más fría, ceden a las moléculas de ésta parte de su energía. Y viceversa, las moléculas de la capa más fría, al llegar a la más caliente, reciben de las moléculas de ésta cierta cantidad de energía cinética. En definitiva, la capa más caliente se enfría, mientras que la más fría se calienta. El transporte de una cantidad de calor ΔQ significa, desde el punto de vista cinético-molecular, el transporte de una determinada cantidad de energía cinética por el movimiento desordenado de las moléculas a través de una superficie ΔS.

Lo mismo que hicimos al examinar el fenómeno de la difusión, consideremos mentalmente dos cubos A y B (fig. 140), situados a ambos lados de una superficie determinada ΔS y a una distancia de ella igual al recorrido libre medio $\bar{\lambda}$. El número de moléculas del cubo A que, en un tiempo Δt, atraviesan la superficie ΔS (según dijimos en el § 55), será:

$$\Delta n_A = \frac{1}{6} n_0' \bar{v}_1 \Delta S \Delta t.$$

Como las moléculas del cubo A llegan a la superficie ΔS sin chocar con otras, cada una de ellas transporta a través de dicha superficie la energía cinética w_1 que tendría en el sitio en que se encuentra el cubo A. La energía w_1 se compone de las energías de los movimientos de traslación y de rotación de las moléculas y, por lo tanto, debe ser igual, por término medio, a $\frac{i}{2} kT_1$, siendo i el número de grados de libertad de las moléculas; k, la constante de Boltzmann, y T_1, la temperatura absoluta del sitio en que se encuentra el cubo A.

De aquí hallamos, que la cantidad de calor ΔQ_1, transportada por todas las moléculas Δn_A a través de la superficie ΔS, de izquierda a derecha, será:

$$\Delta Q_1 = \frac{1}{6} n_0' \bar{v}_1 \Delta S \Delta t \cdot \frac{i}{2} kT_1.$$

Análogamente obtenemos, que durante el tiempo Δt, las moléculas del cubo B transportan de derecha a izduierda a través de la superficie ΔS una cantidad de calor

$$\Delta Q_2 = \frac{1}{6} n_0'' \bar{v}_2 \Delta S \Delta t \cdot \frac{i}{2} kT_2$$

donde T_2 es la temperatura absoluta del sitio en que se encuentra el cubo B. Como resultado de estos dos transportes de calor en direcciones contrarias, en uno de ellos, concretamente de izquierda a derecha (en el sentido positivo del eje OX), a través de la superficie ΔS se transportará una cantidad de calor

$$\Delta Q = \Delta Q_1 - \Delta Q_2.$$

Poniendo en esta fórmula, en lugar de ΔQ_1 y ΔQ_2, los valores que hemos hallado anteriormente, obtendremos

$$\Delta Q = \frac{1}{6} \frac{i}{2} k (n_0' \bar{v}_1 T_1 - n_0'' \bar{v}_2 T_2) \Delta S \Delta t.$$

La cantidad de partículas por unidad de volumen n_0' y n_0'' es inversamente proporcional a las temperaturas T_1 y T_2, mientras que las velocidades de estas partículas $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$ son directamente proporcionales a $\sqrt{T_1}$ y $\sqrt{T_2}$. Por consiguiente, los productos $n_0' \bar{v}_1$ y $n_0'' \bar{v}_2$ son inversamente proporcionales a las raíces cuadradas de las temperaturas correspondientes, es decir, cuando la diferencia de temperaturas es pequeña, T_1 y T_2 se diferencian poco entre sí. Por lo tanto, podemos considerarlas iguales:

$$n_0' \bar{v}_1 = n_0'' \bar{v}_2 = n_0 \bar{v}.$$

Una vez sentado esto, la expresión ΔQ toma la forma:

$$\Delta Q = \frac{1}{6} n_0 \bar{v} \frac{i}{2} k (T_1 - T_2) \Delta S \Delta t. \qquad (5)$$

La diferencia de temperaturas $T_2 - T_1$ la expresamos por medio del gradiente de temperatura $\frac{\Delta T}{\Delta x}$ y de la distancia que hay entre los cubos A y B, igual a $2\bar{\lambda}$:

$$T_2 - T_1 = \left(\frac{\Delta T}{\Delta x}\right) \cdot 2\bar{\lambda}.$$

Poniendo este valor de $T_2 - T_1$ en (5), obtenemos:

$$\Delta Q = -\frac{1}{3} n_0 \bar{v} \bar{\lambda} \frac{i}{2} k \left(\frac{\Delta T}{\Delta x}\right) \Delta S \Delta t.$$

Y comparando esta expresión con la (4), hallamos, que el coeficiente de conductividad térmica $\varkappa$ es igual a

$$\varkappa = \frac{1}{3} n_0 \bar{v} \bar{\lambda} \cdot \frac{i}{2} k. \qquad (6)$$

La magnitud $\frac{i}{2} k$ podemos transformarla como sigue: la constante de Boltzmann es $k = \frac{R}{N}$, donde R es la constante de los gases y N el número de Avogadro, por esto:

$$\frac{i}{2} k = \frac{i}{2} R \frac{1}{N} = C_V \cdot \frac{1}{N},$$

donde C_V es el calor específico molar a volumen constante.

Aprovechando esta transformación podemos escribir la expresión (6) de la forma:

$$\varkappa = \frac{1}{3} \frac{n_0}{N} \bar{v} \bar{\lambda} C_V.$$

Esta expresión también puede transformarse; la magnitud n_0 representa el número de partículas por unidad de volumen, y N, el número de partículas que contiene un mol de gas; de donde n_0 es a N, como la masa de la unidad de volumen del gas (igual a la densidad ρ) es al peso molecular μ, es decir, $\frac{n_0}{N} = \frac{\mu}{\rho}$ y, por consiguiente:

$$\frac{n_0}{N} C_V = \rho \frac{C_V}{\mu} = \rho c_V,$$

donde c_V es el calor específico del gas a volumen constante. De aquí, en definitiva, tenemos, que el coeficiente de conductividad térmica

$$\varkappa = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \bar{\lambda} c_V. \tag{6a}$$

El coeficiente de conductividad térmica $\varkappa$, lo mismo que el coeficiente de rozamiento interno η, no depende de la presión del gas. Esto se debe también a que la densidad ρ y el recorrido libre medio $\bar{\lambda}$ son respectivamente directa e inversamente proporcionales a la presión p, mientras que la velocidad de las moléculas $\bar{v}$ y el calor específico c_V no dependen de dicha presión. Sin embargo, a presiones muy bajas, el coeficiente de conductividad térmica $\varkappa$ comienza a depender de la presión p.

En las expresiones que determinan los coeficientes de difusión D, del rozamiento interno η y de la conductividad térmica $\varkappa$, figura el valor del recorrido libre medio de las moléculas $\bar{\lambda}$; de esta forma, por los valores numéricos de cualquiera de estos tres coeficientes se puede determinar el valor medio del recorrido libre de las moléculas $\bar{\lambda}$ y, partiendo de él, el diámetro eficaz de las moléculas σ. No obstante, si para un gas cualquiera se calculan los diámetros eficaces de sus moléculas σ por los valores numéricos de los tres coeficientes D, η y $\varkappa$, los valores que se obtienen son algo diferentes. Estas diferencias se explican por el carácter aproximado que tienen las teorías expuestas.

Este carácter aproximado se manifiesta también en lo siguiente: de las fórmulas (3) y (6a) se deduce que la relación entre el coeficiente de conductividad térmica $\varkappa$ y el coeficiente de rozamiento interno η debe ser igual al calor específico del gas a volumen constante, es decir:

$$\frac{\varkappa}{\eta} = c_V.$$

Pero en realidad la relación $\frac{\varkappa}{\eta}$ es igual a Kc_V, donde K es un coeficiente que depende de la naturaleza del gas. Las mediciones demuestran, que para todos los gases monoatómicos $K = 2{,}50$ y para los diatómicos, aproximadamente, $K = 1{,}90$. Una teoría más desa-

rrollada conduce efectivamente a los valores indicados de $K = 2{,}5$ para los gases monoatómicos y de $K = 1{,}9$ para los diatómicos.

Analicemos un ejemplo de determinación de la fuerza de rozamiento interno de un gas.

Supongamos que el espacio comprendido entre los dos cilindros coaxiales A y B representados en la fig. 138 está lleno de hidrógeno a una temperatura de 27° C. El radio del cilindro interior A es $r_1 = 8$ cm, la distancia entre los cilindros es $d = 0{,}2$ cm. El cilindro interior gira con una velocidad de 10 r.p.s. Examinando este caso aproximadamente, como si fuera plano, determinar la fuerza tangencial f, que actúa sobre 1 cm² de la superficie del cilindro exterior B. El diámetro de las moléculas de hidrógeno σ puede considerarse igual a $2{,}3 \cdot 10^{-8}$ cm.

Solución. Debido al rozamiento interno, entre las capas del gas actúa una fuerza f, cuyo valor, según la fórmula (1) es

$$f = \eta \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) S.$$

Admitiendo que la velocidad del gas que hay junto a la superficie del sólido coincide con la velocidad de esta superficie, obtenemos, que esta misma fuerza f actúa sobre la superficie del cilindro B.

Sobre cada unidad de superficie del cilindro B actúa una fuerza f/S. Para determinar esta fuerza hay que conocer el gradiente de velocidad $\Delta u/\Delta x$ y el valor del coeficiente de rozamiento interno η del hidrógeno. El gradiente de velocidad $\Delta u/\Delta x$ en este caso es

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{u_2 - u_1}{d},$$

donde u_2 es la velocidad del gas junto a la superficie del cilindro interior y u_1 su velocidad junto a la superficie del cilindro exterior. Estas velocidades las igualamos a las de dichas superficies A y B, entonces

$$u_2 = 2\pi r_1 n; \quad u_1 = 0,$$

donde n es el número de revoluciones del cilindro interior en la unidad de tiempo, de donde

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = 2\pi \frac{r_1}{d} n.$$

Poniendo aquí los valores numéricos que se dan en las condiciones del ejemplo, hallamos

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = 2 \cdot 3{,}14 \cdot \frac{8}{0{,}2} \cdot 10 \text{ s}^{-1} = 2512 \text{ s}^{-1}.$$

El coeficiente de rozamiento interior, según la fórmula (2), será

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \bar{\lambda},$$

donde $\bar{v}$ es la velocidad media aritmética de las moléculas; $\bar{\lambda}$, su recorrido libre medio, y ρ, la densidad del gas. Poniendo en la fórmula anterior (véase los § 45, 46, 50 y 53)

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi \sigma^2 n_0}, \quad \bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}, \quad \rho = \frac{p\mu}{RT},$$

$$n_0 = \frac{p}{kT} = \frac{pN}{RT},$$

obtenemos

$$\eta = \frac{\sqrt{8RT\mu}}{3\sqrt{2\pi^3 \cdot \sigma^2 N}},$$

R es la constante de los gases, igual a $8{,}31 \cdot 10^7$ ergios/grado mol; μ, el peso molecular del hidrógeno, igual a 2 g/mol y N, el número de Avogadro, igual a $6 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}. Poniendo los valores de T y σ que se dan en el ejemplo, hallamos:

$$\eta = 8{,}6 \cdot 10^{-5} \text{ g/cm s}.$$

Y aprovechando los valores obtenidos para el gradiente de velocidad $\frac{\Delta u}{\Delta x} = 2512$ s^{-1} y para el coeficiente de rozamiento interno $\eta = 8{,}6 \cdot 10^{-5}$ g/cm s hallamos que la fuerza que actúa sobre la unidad de superficie del cilindro B, es:

$$\frac{f}{S} = \eta \cdot \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) = 8{,}6 \cdot 10^{-5} \cdot 2512 \text{ dinas/cm}^2 = 0{,}2 \text{ dinas/cm}^2,$$

o

$$\frac{f}{S} \cong 2 \cdot 10^{-4} \text{ gf/cm}^2.$$

§ 57. La conductividad térmica y el rozamiento interno en los gases a presión muy baja. Examinemos ahora las causas que hacen que los coeficientes de conductividad térmica y de rozamiento interno dependan de la presión cuando las presiones son muy bajas. Estudiemos primero el fenómeno de la conductividad térmica

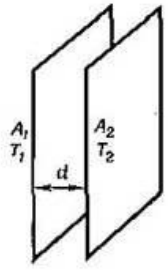


Fig. 141. El coeficiente de conductividad térmica comienza a depender de la presión cuando el recorrido libre de las moléculas se hace mayor que la distancia d entre las láminas.

Sean dos láminas paralelas A_1 y A_2 (fig. 141) separadas entre sí por una distancia d y mantenidas respectivamente a las temperaturas T_1 y T_2. Entre estas láminas se encuentra un gas, el cual, debido a su conductividad térmica, transmite el calor de la lámina A_1 (suponiendo $T_1 > T_2$) a la lámina A_2. Mientras el recorrido libre medio de las moléculas $\overline{\lambda}$ es pequeño en comparación con la distancia entre las láminas d, actúa el mecanismo de la transmisión del calor que hemos estudiado, es decir, las moléculas, al moverse desordenadamente, transmiten de una capa a otra la energía cinética. Pero cuando la presión es tan baja que el recorrido libre medio de las moléculas $\overline{\lambda}$ es igual o mayor que la distancia entre las láminas d, el mecanismo de la transmisión del calor es otro y consiste en que cada molécula, después de chocar con la lámina caliente A_1 recibe una energía cinética $\overline{w}_1$, correspondiente a la temperatura T_1, y sin sufrir colisio-

nes llega a la lámina A_2 y le cede parte de su energía $\overline{w}_1$. Esta misma molécula, después de rebotar en la lámina más fría A_2, y con menos reservas de energía $\overline{w}_2$, llega, sin chocar con nada, a la lámina A_1 y le quita parte de su energía. Si la presión sigue bajando, el número de moléculas n que realizan el transporte de energía de una lámina a otra, disminuye, su recorrido sigue siendo el mismo y las moléculas continúan pasando libremente de una a otra lámina. Es decir, al seguir bajando la presión, la conductividad térmica del gas disminuye. En fin de cuentas resulta que *el coeficiente de conductividad térmica de un gas depende de la presión cuando el recorrido libre medio de las moléculas es del mismo orden o mayor que la distancia d que hay entre los cuerpos separados por el gas que realiza la transmisión del calor*. Cuando $\overline{\lambda} > d$ el coeficiente de conductividad calorífica es directamente proporcional a la presión p.

Fig. 142 Estructura de la vasija de Dewar (termo).

De forma completamente análoga se explica la relación de la dependencia que existe entre el coeficiente de rozamiento interno de los gases η y la presión, cuando esta última es muy baja. Si la distancia d, que separa las paredes entre las cuales circula el gas, es del mismo orden o menor que el recorrido libre medio de las moléculas $\overline{\lambda}$, el coeficiente de rozamiento interno η comienza a depender de la presión p, y disminuye a la par que ésta.

De lo dicho se desprende que el valor absoluto de la presión p a partir del cual los coeficientes $\varkappa$ y η dependen de la presión, viene determinado por la distancia que separa los cuerpos entre los cuales se realiza el transporte de calor o de la cantidad de movimiento. Por ejemplo, en el caso de dos láminas muy próximas entre sí, la conductividad térmica del gas encerrado entre ellas comienza a depender de la presión cuando p no es aún muy baja; pero si la distancia d, que separa estas láminas, aumenta, para poder apreciar la dependencia antedicha se necesita que el enrarecimiento del gas sea mucho mayor.

El hecho de que la conductividad térmica dependa de la presión, cuando ésta es baja, se aprovecha en la construcción de termos (o vasijas de Dewar). El termo ordinario no es más que una vasija de vidrio con paredes dobles (fig. 142). En el espacio que queda entre ellas se hace el vacío hasta un grado en que el recorrido libre medio de las moléculas es considerablemente mayor que la distancia entre la pared interior y la exterior. En estas condiciones, la conductivi-

dad térmica es menor que si entre las paredes hubiera aire a presión atmosférica.

En calidad de ejemplo, hagamos el siguiente cálculo: la distancia que separa las paredes de una vasija de Dewar es $d = 0{,}8$ cm. Entre estas paredes hay hidrógeno a la temperatura de 27° C. Considerando que el diámetro de las moléculas de hidrógeno es $\sigma = 2{,}3 \cdot 10^{-8}$ cm, determinar qué presión p deberá tener el gas para que su conductividad térmica sea menor que a la presión atmosférica.

Para que el coeficiente de conductividad térmica sea menor que a la presión atmosférica, el recorrido libre medio $\bar{\lambda}$ de las moléculas de hidrógeno deberá ser mayor que la distancia d que separa las paredes de la vasija, es decir,

$$\bar{\lambda} > d.$$

El recorrido libre medio $\bar{\lambda}$ de las moléculas, según la fórmula (4a) § 53, es

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi\sigma^2 n_0},$$

donde n_0 es el número de moléculas en la unidad de volumen. De acuerdo con la fórmula (9) § 46, el número de moléculas por unidad de volumen n_0 está relacionado con la presión p del gas por la correlación:

$$n_0 = \frac{p}{kT},$$

donde k es la constante de Boltzmann y T, la temperatura del gas. Poniendo este valor de n_0 en la expresión de $\bar{\lambda}$, obtenemos

$$\bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2}\,\pi\sigma^2 p},$$

de donde, por la condición $\bar{\lambda} > d$, se deduce, que la presión p debe satisfacer la relación:

$$p < \frac{kT}{\sqrt{2}\,\pi\sigma^2 d}.$$

Poniendo aquí los valores numéricos dados, obtenemos

$$p < \frac{1{,}37 \cdot 10^{-16} \cdot 300}{\sqrt{2} \cdot 3{,}14 \cdot (2{,}3 \cdot 10^{-8})^2 \cdot 0{,}8} \text{ barias} = 22{,}0 \text{ barias}.$$

Reduciendo esta presión a milímetros de la columna de mercurio, hallamos

$$p < 0{,}015 \text{ mm Hg}.$$

Es decir, para que la conductividad térmica sea menor que la normal, la presión del gas que queda entre las paredes de la vasija de Dewar debe ser menor de 0,015 mm Hg.

§ 58. Obtención y medición de las bajas presiones. La obtención de bajas presiones (o como suele decirse, del «vacío») juega en la actualidad un gran papel, tanto en las investigaciones que se hacen en los laboratorios, como en la técnica. El empleo del vacío para fines electrotécnicos y radiotécnicos (aparatos electrónicos como kenotrones, válvulas de radio, etc.) dio un poderoso impulso al de-

sarrollo de la técnica del vacío. Hay diferentes tipos de bombas que, con ciertas manipulaciones complementarias, permiten obtener presiones de 10^{-6} mm Hg y menores. A estas presiones, el recorrido libre de las moléculas de los gases alcanza decenas de metros.

La bomba de vacío más simple tiene una estructura muy semejante a la de las bombas de émbolo para agua, con la única diferencia de que sus elementos están mejor ajustados y guarnecidos. Pero en la actualidad las bombas de émbolo han sido desplazadas totalmente por otras, en las que el movimiento de vaivén del émbolo, tan incómodo desde el punto de vista mecánico, ha sido sustituido por el de rotación de unas paletas. La fig. 143 representa la sección transversal de una bomba de este tipo.

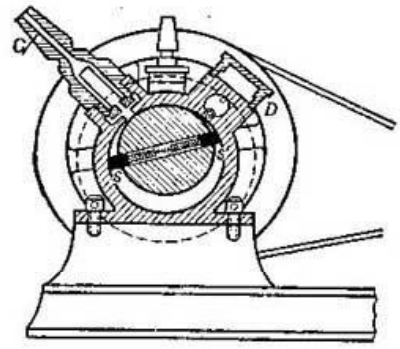


Fig. 143. Bomba de vacío (corte transversal).

Como puede verse, en la cavidad cilíndrica interior de una robusta caja se encuentra un cilindro metálico excéntrico. Dos paletas S y S', colocadas en una ranura de dicho cilindro y empujadas por

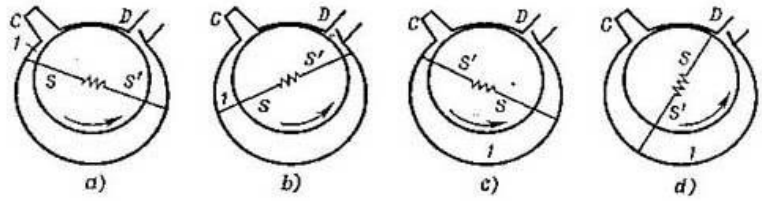


Fig. 144. Esquema del funcionamiento de la bomba de vacío: las paletas S y S', al girar, aspiran el aire por el tubo C y lo expulsan por la válvula D.

un muelle que hay entre ellas, dividen en dos partes el espacio comprendido entre el cilindro y la pared interior de la caja. Los esquemas a, b, c y d de la fig. 144, que representan las posiciones sucesivas que ocupan las paletas S y S' al girar el cilindro en la dirección que indica la flecha, dan una idea clara del funcionamiento de la bomba. En la posición a, el gas que se aspira de la vasija, que se une al tubo C, penetra en el espacio 1. A medida que gira el cilindro, la paleta S se va desplazando (posición b), con lo que el espacio 1 aumenta y el gas es aspirado a través del tubo C. Al seguir girando el cilindro, la

paleta S' cierra la comunicación entre el espacio *1* y el tubo C (posición *c*) y comienza a desalojar la porción de gas encerrada en el espacio *1* a través de la válvula D (posición *d*). La rotación del cilindro hace que este proceso de absorción del gas por el tubo C y de su expulsión al exterior por la válvula D, se repita constantemente.

El cilindro gira por la acción de un motor eléctrico. Para evitar que el gas se infiltre por debajo de las paletas y por otras partes, todos los elementos de la bomba se lubrifican con aceite automáticamente y sin interrupción. Por esta razón las bombas de este tipo se denominan *bombas rotatorias de aceite*. Con frecuencia es toda la bomba la que se sumerge en un baño de aceite. Con estas bombas se pueden alcanzar vacíos de hasta 10^{-4} mm Hg.

Designemos la capacidad del recipiente en que se hace el vacío con la letra V y la presión inicial del gas que hay en ella con la letra p_0. Al pasar por primera vez la paleta S se forma un espacio de volumen ΔV, que se llena con el gas aspirado del recipiente. Como resultado, en la vasija disminuye la presión hasta un valor

$$p_1 = p_0 \frac{V}{V+\Delta V}.$$

Después de engendrarse por segunda vez el espacio ΔV, la presión decae hasta el valor

$$p_2 = p_1 \frac{V}{V+\Delta V} = p_0 \left(\frac{V}{V+\Delta V}\right)^2$$

Continuando este razonamiento llegaremos a la conclusión de que, después de engendrarse n veces el espacio ΔV, en la vasija habrá decaído la presión hasta

$$p_n = p_0 \left(\frac{V}{V+\Delta V}\right)^n. \qquad (1)$$

Si el número de revoluciones de las paletas es constante, el número de aspiraciones será directamente proporcional al tiempo que dure el bombeo, de donde podemos admitir que

$$n = n_0 t.$$

Poniendo este valor de n en la expresión (1), hallamos que

$$p_t = p_0 \left(\frac{V}{V+\Delta V}\right)^{n_0 t},$$

donde p_t es la presión que se obtiene en la vasija de la cual se extrae el aire, al cabo de un tiempo t. Esta última expresión también puede escribirse así:

$$\frac{p_0}{p_t} = \left(1+\frac{\Delta V}{V}\right)^{n_0 t}. \qquad (2)$$

La relación p_0/pt crece a medida que disminuye la presión p_t en la vasija y caracteriza el funcionamiento de la bomba. Tomando logaritmos, obtenemos

$$\lg \frac{p_0}{p_t} = n_0 t \cdot \lg \left(1+\frac{\Delta V}{V}\right).$$

Las magnitudes n_0, V y ΔV son constantes para la bomba y la vasija dadas, por consiguiente,

$$\lg \frac{p_0}{p_t} = Ct, \tag{3}$$

donde C es una magnitud constante. Para caracterizar el funcionamiento de la bomba resulta cómodo el empleo de curvas, en las que se toman como abscisas el tiempo que dura el bombeo t y como ordenadas los valores de $\lg p_0/p_t$. En este diagrama la relación entre el $\lg p_0/p_t$ y el tiempo t viene dada por una recta. Pero en realidad, debido a la existencia de espacios perjudiciales, a que el funcionamiento de las válvulas no es ideal, etc., estas bombas no pueden proporcionar

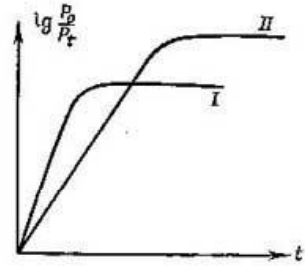


Fig. 145. Característica gráfica del funcionamiento de las bombas.

enrarecimientos infinitamente grandes. Para cada bomba existe una presión mínima determinada $p_{mín}$, la cual limita el enrarecimiento que puede lograrse con ella. Por esto, la dependencia gráfica entre el $\lg p_0/p_t$ y el tiempo t sólo estará representada por una línea recta mientras p_t sea considerablemente mayor que $p_{mín}$ (fig. 145). Pero cuando p_t se aproxime a $p_{mín}$, la bomba absorberá cada vez más despacio. Por esta razón, la dependencia entre el $\lg p_0/p_t$ y el tiempo t, para las bombas reales se representa por una curva, la cual, cuando el valor de t es grande, resulta paralela al eje de abscisas. Si se quiere comparar la acción de bombas diferentes hay que tomar los respectivos recipientes, en que se va a hacer el vacío, de forma que sus volúmenes sean iguales. En este caso, la velocidad de acción de la bomba dada estará determinada por el valor de la constante C. Las curvas que muestra la fig. 145 corresponden a dos bombas distintas. Por el procedimiento seguido al construir estas curvas vemos, que la I corresponde a una bomba que enrarece más de prisa, pero que es incapaz de proporcionar un buen vacío. La II, por el contrario, pertenece a una bomba que puede hacer un vacío mucho más perfecto, pero que enrarece más despacio.

En aquellos casos en que la vasija se une a la bomba por medio de un tubo, la velocidad de aspiración depende también de las dimensiones de dicho tubo, es decir, de su longitud y diámetro. Los tubos delgados y largos son los que más disminuyen la velocidad de aspiración. A grandes presiones, cuando el gas pasa por el tubo igual que si fuera un líquido viscoso, su volumen se determina por la fórmula de Poiseuille (§ 42), según la cual dicho volumen es directamente proporcional a la cuarta potencia del diámetro del tubo e inversamente proporcional a su longitud. A bajas presiones, cuando el recorrido libre medio $\overline{\lambda}$ de las moléculas es comparable con el diámetro y la longitud del tubo, la fórmula de Poiseuille no sirve. En este caso la masa del gas ΔM que pasa en la unidad de tiempo por un tubo de diámetro d y longitud l, con una caída de presión Δp, se expresa por la fórmula siguiente:

$$\Delta M = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2\pi}{R}}\cdot\frac{d^3}{l}\sqrt{\frac{\mu}{T}}\,\Delta p, \tag{4}$$

donde R es la constante de los gases; μ, el peso molecular, y T, la temperatura absoluta del gas.

Como puede verse, en este caso, la cantidad de gas que pasa por el tubo, también depende mucho de su diámetro. Es decir, en todos los casos deben emplearse tubos de unión lo más anchos y cortos posibles.

Para conseguir presiones más bajas que las que se obtienen con las bombas rotatorias de aceite, en la actualidad se utilizan con preferencia las *bombas de difusión*, llamadas también *bombas de condensación*. Estas últimas no sirven para aspirar el gas que hay en los recipientes a partir de la presión atmosférica, pero pueden crear diferencias de presión suplementarias. Por esto se emplean acompañadas de bombas rotatorias de aceite del tipo que ya hemos descrito. Con la bomba rotatoria de aceite se consigue *el vacío preliminar* y, después, con la difusión, se alcanza el alto vacío. El tipo más

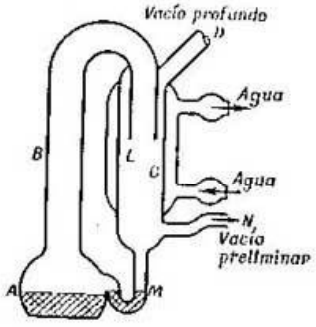


Fig. 146. Esquema de la bomba de difusión más sencilla.

simple de bomba de difusión de mercurio es el representado en la fig. 146. El mercurio que hay en la vasija A se calienta en un horno eléctrico. Los vapores de mercurio suben por el tubo B, salen por la tobera L, se condensan en las paredes C, que están refrigeradas por una camisa de agua, y retornan a la vasija A escurriendo por el tubo M. El chorro de vapor de mercurio que sale por la tobera L, arrastra las moléculas de gas que, por el tubo D, llegan del recipiente en que se hace el vacío y que luego son aspiradas por la bomba preliminar a través del tubo N.

Este principio del arrastre de las moléculas de gas por un chorro de vapores de mercurio en condensación tiene en la actualidad diversas variedades y existen numerosas estructuras de bombas de difusión, tanto de vidrio como metálicas. Se emplean con mucha frecuencia las llamadas bombas de múltiples etapas, en las cuales hay varias toberas situadas unas a continuación de otras. Las bombas de este tipo proporcionan un vacío más perfecto y pueden funcionar con peores vacíos preliminares.

Ultimamente se tiende a sustituir el mercurio de estas bombas por líquidos orgánicos con tensión de vapor muy reducida (como fracciones pesadas del petróleo y otros líquidos); este género de bombas suele denominarse de vapor de aceite.

Las bombas de difusión de mercurio tienen el inconveniente de que los vapores pueden penetrar en el recipiente que se vacía. La tensión

del vapor de mercurio a la temperatura de 20° C es igual a 0,00131 mm Hg. Por consiguiente este tipo de bombas no puede engendrar de por sí presiones menores de 0,0013 mm Hg. Para evitar este defecto, entre la bomba de difusión de mercurio y el recipiente en que se hace el vacío, se intercala un tubo acodado especial («trampa de mercurio») que se refrigera con aire líquido. A la temperatura de ebullición del aire líquido (—184° C) el mercurio se encuentra en estado sólido y la tensión de su vapor saturado es casi nula.

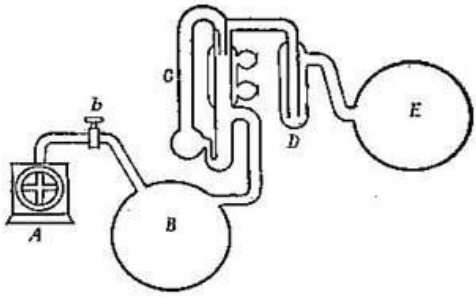


Fig. 147. Esquema de un conjunto para obtener alto vacío formado por una bomba preliminar y otra de difusión.

El conjunto completo se muestra esquemáticamente en la fig. 147, donde *A* es la bomba rotatoria de aceite para el vacío preliminar, movida por un motor eléctrico; *C*, la bomba de difusión; *D*, la trampa de mercurio, y *E*, el recipiente en que se hace el vacío. *B* es el llamado balón de vacío preliminar, cuya misión es evitar el funcionamiento constante de la bomba de aceite *A*. Una vez que esta bomba *A* hace en el balón *B* un vacío preliminar suficiente, se cierra la llave de paso *b* y se para la bomba *A*. En estas condiciones, la bomba de difusión aspira el gas del recipiente *E* hacia el balón *B*.

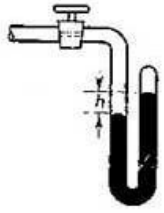


Fig. 148. Manómetro de mercurio.

Las bombas de vapor de aceite pueden funcionar sin trampas refrigeradas con aire líquido e incluso sin refrigeración de agua, puesto que los vapores saturados de los líquidos que en ellas se emplean tienen a 20° C una tensión mucho menor que la del vapor de mercurio.

El segundo problema de la técnica de alto vacío es el de la medición de las bajas presiones. Generalmente, con el manómetro de mer-

curio de tubo en U (fig. 148) pueden medirse presiones no menores de varias fracciones de milímetro de la columna de mercurio.

Por esto, para medir presiones más bajas, en los laboratorios se emplea mucho el *manómetro de McLeod* (fig. 149). El extremo D de este manómetro se pone en comunicación con el recipiente cuya presión p se quiere medir. Entonces, el gas a presión p llena todo el manómetro, incluso el depósito E. Cuando se sube el depósito A, que está en comunicación con el resto del manómetro por medio de un tubo de goma, el mercurio se eleva y aísla el depósito E y el capilar B del recipiente cuya presión se mide. Después, el mercurio sigue subiendo, hasta que llega a un determinado punto del capilar B. Supongamos que al ocurrir esto, el espacio libre que queda en el capilar B, sobre la superficie del mercurio, tiene un volumen igual a ΔV.

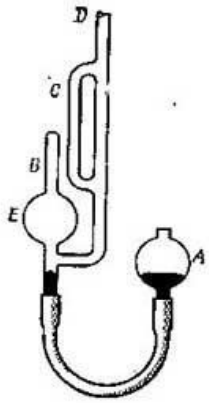


Fig. 149. Manómetro de McLeod.

Designando con la letra V el volumen conjunto del depósito E y el capilar B, tendremos, que el gas que se encontraba a la presión p resulta comprimido hasta la presión

$$p' = p\,\frac{V}{\Delta V}.$$

Cuando la relación $\frac{V}{\Delta V}$ es suficientemente grande, la presión p' es mucho mayor que la presión inicial p y puede medirse por la diferencia de alturas del mercurio en los capilares B y C. Midiendo p' y conociendo el valor numérico de la relación $\frac{V}{\Delta V}$, hallamos el valor de la presión p que se mide.

Sin embargo, el manómetro de McLeod tampoco sirve para medir presiones muy bajas ni presiones de vapores que se condensan con facilidad. Para estos fines se emplean otros tipos de manómetros. Como ejemplo indicaremos *el manómetro térmico*, que se funda en el hecho de que la conductividad térmica de los gases, a presiones muy bajas, depende de la presión. Prácticamente esta dependencia es una función lineal (véase el § 57). El manómetro térmico consiste en un matraz, dentro del cual hay un hilo metálico que se calienta con una corriente eléctrica. A una intensidad de corriente dada, la temperatura a que se calienta el hilo depende de sus pérdidas de calor, las cuales, a bajas presiones, dependen a su vez de la presión del gas cir-

cundante. De esta forma, la temperatura a que se calienta el hilo puede servir para medir la presión del gas que lo rodea. Esta temperatura del hilo se mide ordinariamente por las variaciones que experimenta su resistencia.

§ 59. Propiedades de los gases a presiones muy bajas. Cuando las presiones son tan bajas que el recorrido libre medio $\bar{\lambda}$ de las moléculas es del mismo orden que las dimensiones de los recipientes que contienen el gas, las propiedades de éste se diferencian de las que tiene a grandes presiones. Este estado del

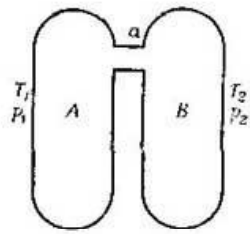


Fig. 150. Cuando los recipientes comunicantes A y B se encuentran en estado de ultraenrarecimiento y sus temperaturas T_1 y T_2 son diferentes, las presiones p_1 y p_2 que en ellos se establecen también son distintas.

gas se denomina *estado de ultraenrarecimiento*. En este estado se deja sentir, más directamente que a grandes presiones, la naturaleza cinético-molecular del gas.

Veamos lo que ocurre en dos recipientes A y B unidos entre sí por un tubo corto y recto a (fig. 150).

En condiciones normales la presión del gas en las vasijas comunicantes es igual; esto ocurre incluso cuando las temperaturas T_1 y T_2, de ambos recipientes, son distintas.

En estado de ultraenrarecimiento, cuando el recorrido libre de las moléculas es mayor que la longitud del tubo a, éstas pasan sin colisión a todo lo largo de dicho tubo, lo que conduce, como ahora veremos, a una desigualdad entre las presiones p_1 y p_2 de ambos recipientes. La condición de equilibrio se reduce a que el número de moléculas que pasan, a través del tubo a, desde el recipiente A hasta el B y el de las que lo hacen en sentido contrario, desde el recipiente B hasta el A, debe ser igual. En estado de ultraenrarecimiento, el número de moléculas que pasa por el tubo es proporcional al número de moléculas por unidad de volumen n_0 y a su velocidad media $\bar{v}$. De donde la condición de equilibrio será:

$$n_{01} \cdot \bar{v}_1 = n_{02} \cdot \bar{v}_2, \qquad (1)$$

donde n_{01} es el número de moléculas por unidad de volumen que se encuentran en el recipiente A; n_{02}, el número de moléculas por unidad de volumen que se encuentran en el recipiente B, y $\bar{v}_1$ y $\bar{v}_2$, las velocidades medias de las moléculas en los recipientes A y B respectivamente. Como $n_0 = p/kT$, la correlación (1) puede escribirse así:

$$\frac{p_1}{T_1} \cdot \bar{v}_1 = \frac{p_2}{T_2} \cdot \bar{v}_2;$$

finalmente, teniendo en cuenta que las velocidades v_1 y v_2 son respectivamente proporcionales a $\sqrt{T_1}$ y $\sqrt{T_2}$, obtenemos definitivamente la condición de equilibrio en la forma siguiente:

$$\frac{p_1}{\sqrt{T_1}} = \frac{p_2}{\sqrt{T_2}},$$

de donde

$$p_2 = p_1 \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}. \qquad (2)$$

De esta forma, cuando el gas se encuentra en estado de ultraenrarecimiento y los dos recipientes comunicantes en estado de equilibrio, las presiones existentes en estos últimos sólo serán diferentes si son distintas sus temperaturas. Cuando la densidad de los gases es grande, la presión que existe en los recipientes comunicantes se equilibra por medio de la corriente del gas que, como si fuera un medio continuo, irá desde el recipiente en que la presión es mayor al recipiente en que ésta es menor.

Examinemos otro fenómeno característico también del gas ultraenrarecido. Sea un recipiente en el que se encuentran dos láminas *1* y *2*, colocadas paralelamente entre sí (fig. 151). Supongamos que la temperatura de la lámina *1* es

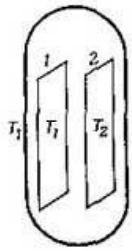


Fig. 151. Esquema del manómetro absoluto.

igual a la temperatura T_1 de las paredes del recipiente y llamemos T_2 a la temperatura de la lámina *2*. Cuando se dan las condiciones del gas ultraenrarecido, las moléculas se mueven libremente, sin chocar unas con otras.

Veamos lo que ocurre con el gas que se encuentra entre las láminas *1* y *2*. Como las moléculas no chocan, tampoco intercambian entre sí sus energías. El intercambio de energía solamente existe cuando las moléculas chocan con las láminas *1* y *2*, cuyas temperaturas, como hemos dicho, son iguales respectivamente a T_1 y T_2. Por esto, podemos considerar, que el gas que hay entre estas láminas se comporta como si estuviera constituido por dos gases diferentes: las moléculas de uno de estos gases tienen una velocidad media $\overline{v'}$, correspondiente a la temperatura T_1, mientras que las moléculas del otro tienen una velocidad media $\overline{v''}$, que corresponde a la temperatura T_2. Llamemos respectivamente n_0' y n_0'' a los números de moléculas por unidad de volumen de estos dos grupos de moléculas.

En estas condiciones, la presión p' que ejerce el gas, comprendido entre las dos láminas sobre la lámina *1*, estará integrada por las presiones ejercidas por los dos grupos de moléculas (es decir, por las moléculas de los dos gases supuestos. *N. del T.*), de donde

$$p' = \frac{1}{3} n_0' m \overline{v'^2} + \frac{1}{3} n_0'' m \overline{v''^2}, \qquad (3)$$

donde m es la masa de las moléculas.

Llamando n_0 al número de moléculas por unidad de volumen del gas contenido en el recipiente (pero que no se encuentra entre las láminas) y considerando que la velocidad de estas moléculas es igual a $\overline{v'}$, puesto que la temperatura de las paredes del recipiente, cuya superficie es considerablemente mayor que la de las láminas, coincide con la temperatura de la primera lámina, tendre-

mos, que la presión que ejercen estas moléculas sobre la lámina *1* será igual a

$$p = \frac{1}{3} n_0 m \overline{v'^2}. \tag{4}$$

La condición de equilibrio del gas ultraenrarecido consiste en que el número de moléculas que pasan por una superficie cualquiera en una dirección, debe ser igual al número de las que lo hacen en sentido contrario.

Por esto, en el espacio entre las láminas *1* y *2* deberá cumplirse la condición:

$$n'_0 \overline{v'} = n''_0 \overline{v''}. \tag{5}$$

Examinemos ahora lo que ocurre en la superficie lateral imaginaria que limita el volumen de gas comprendido entre las láminas. A través de cualquier área de esta superficie saldrán, desde el interior de dicho volumen, moléculas de los dos grupos, cuyas velocidades serán respectivamente $\overline{v'}$ y $\overline{v''}$; pero al interior de dicho volumen llegarán solamente moléculas con velocidad $\overline{v'}$, cuyo número por unidad de volumen es igual a n_0. Por consiguiente, para que exista equilibrio entre el gas comprendido entre las láminas *1* y *2* y el gas del recipiente que se encuentra fuera de ellas, será necesario que

$$n'_0 \overline{v'} + n''_0 \overline{v''} = n_0 \overline{v'}. \tag{6}$$

De las igualdades (5) y (6) hallamos:

$$n'_0 \overline{v'} = n''_0 \overline{v''} = \frac{1}{2} n_0 \overline{v'}.$$

después de lo cual, la expresión (3) para p' puede escribirse:

$$p' = \frac{1}{6} n_0 m \overline{v'} (\overline{v'} + \overline{v''}), \quad \text{o}$$

$$p' = \frac{1}{6} n_0 m \overline{v'^2} \left(1 + \frac{\overline{v''}}{\overline{v'}}\right).$$

Utilizando la fórmula (4) y teniendo en cuenta que

$$\frac{\overline{v''}}{\overline{v'}} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}, \text{ obtenemos } p' = \frac{p}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}\right).$$

De donde la diferencia de presiones que experimenta la lámina *1* será:

$$\Delta p = p' - p = \frac{p}{2} \left(\sqrt{\frac{T_2}{T_1}} - 1\right). \tag{7}$$

La fórmula (7) muestra que cuando $T_2 > T_1$, sobre la lámina *1* actúa una fuerza que tiende a separarla de la lámina *2*, mientras que cuando $T_2 < T_1$, la fuerza que actúa sobre la lámina *1* tiende a aproximarla a la lámina *2*. El valor numérico de esta fuerza es proporcional a la presión p del gas que hay en el recipiente. Este fenómeno puede servir de base para la construcción de un manómetro que sirva para medir el valor absoluto de la presión p en las condiciones propias del ultraenrarecimiento. En principio, la estructura de este manómetro coincide con el esquema de la fig. 151. Pero la lámina *1* se hace móvil, con lo cual, la fuerza que actúa sobre ella puede medirse por el ángulo de desviación que produce. Conociendo esta fuerza y las temperaturas T_1 y T_2, la presión p puede calcularse por la fórmula (7).

§ 60. Gases reales. Ecuación de Van der Waals. El modelo cinético-molecular del gas que estudiamos en el § 46 parte de la suposi-

ción de que el gas está formado por moléculas semejantes a esferas elásticas que se mueven caóticamente. Entre estas moléculas no existen más fuerzas que las que producen sus choques y, por consiguiente, son exclusivamente fuerzas elásticas de repulsión. Las dimensiones de las moléculas se consideran tan pequeñas, en comparación con las distancias medias que hay entre ellas, que pueden despreciarse. Este modelo es el del gas ideal, es decir, el de un gas que cumple exactamente las leyes de Boyle-Mariotte y de Gay-Lussac. Pero los gases reales, como ya indicamos, solamente cumplen estas leyes aproximadamente. A grandes presiones todos los gases se apartan manifiestamente de la ley de Boyle-Mariotte.

Al considerar que las moléculas son esferas, tenemos que admitir que sus radios son magnitudes del orden de 10^{-8} cm. De donde el volumen de una molécula será

$$v = \frac{4}{3}\pi r^3 \cong 4 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^3.$$

En 1 cm³ de gas, en condiciones normales, hay un número de moléculas $n_0 \cong 3 \cdot 10^{19}$, de donde el volumen total de las propias moléculas que se encuentran en 1 cm³ es igual a $V' = n_0 v \cong 10^{-4}$ cm³, es decir, que, cuando el gas está a 1 atm de presión y a la temperatura de 0° C, el volumen de las propias moléculas ocupa solamente una diezmilésima parte del volumen del gas. Pero a la presión de 5000 atm, según la ley de Boyle-Mariotte, el volumen, que inicialmente era igual a 1 cm³, debe disminuir hasta $2 \cdot 10^{-4}$ cm³ y, en este caso, la mitad del volumen del gas estará ocupada por el volumen de las propias moléculas. En estas condiciones es evidente que no sirve el modelo de gas que hemos indicado y quedan claras las divergencias entre las cualidades de los gases reales y la ley de Boyle-Mariotte. De esta forma, las causas de la discrepancia entre las cualidades de los gases reales y las de los gases perfectos se debe, en primer lugar, a que las moléculas tienen sus propias dimensiones y, en segundo, a que el carácter de las fuerzas que actúan entre las moléculas es mucho más complejo que el que existe entre las esferas elásticas.

Estas dos causas fueron tenidas en cuenta por Van der Waals. La primera, es decir, las dimensiones de las propias moléculas, influye haciendo que éstas se muevan, dentro de los recipientes en que se encuentra el gas, con menos libertad que si fueran esferas puntuales. El espacio apto para el movimiento libre de las moléculas es menor que el volumen geométrico del recipiente V en una cierta magnitud b. Esta magnitud b está relacionada con el volumen propio de las moléculas y puede considerarse constante para una cantidad de gas dada*); por esto, en la ecuación de estado debe sustituirse el volumen V por el $V - b$.

*) El volumen irreductible b de las moléculas suele llamarse covolumen. (*N. del T.*)

Para un mol de gas ideal tenemos la ecuación

$$pV_0 = RT. \quad (1)$$

Como hemos dicho, teniendo en cuenta el papel que desempeñan las dimensiones de las propias moléculas, debemos sustituir el volumen molecular V_0 por la magnitud $V_0 - b$:

$$p\,(V_0 - b) = RT \quad (2)$$

De la ecuación (1) se deduce que cuando $p \to \infty$ el volumen del gas $V_0 \to 0$, es decir, que si sobre el gas se ejerce una presión infinita, su volumen tiende a cero, cosa imposible, puesto que el gas se comprime a expensas de la disminución del espacio libre que hay entre sus moléculas, de donde se deduce que, a grandes presiones, las moléculas se encuentran unas junto a otras y, por consiguiente, la compresibilidad del gas deberá ser muy pequeña. Por la fórmula (2), cuando

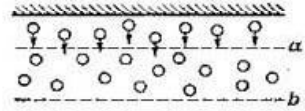


Fig. 152. Acción recíproca de las moléculas del gas.

$p \to \infty$ el volumen del gas $V_0 \to b$; de esta forma, la magnitud b representa el volumen a que tiende el mol V_0 a presiones muy altas; este volumen es igual al que ocupan todas las moléculas que integran un mol cuando están muy apretadas entre sí.

La segunda causa, es decir, la existencia de fuerzas que actúan entre las moléculas, se reduce a que éstas, cuando se encuentran a cierta distancia unas de otras, se atraen entre sí. Estas fuerzas de atracción sólo son reemplazadas por fuerzas repulsivas, más intensas que ellas, cuando las distancias entre las moléculas son muy pequeñas (es decir, en el momento del choque). Estas fuerzas de atracción entre las moléculas dan lugar a que el volumen V, que ocupa el gas, sea menor que el que le corresponde por la ley de Boyle-Mariotte, es decir, como si se encontrara sometido a una presión p' mayor que la presión exterior p que ejercen sobre él las paredes del recipiente en que se encuentra. Por lo tanto, en la expresión (2) habrá que sustituir la presión exterior p por la magnitud $p' = p + p_i$, con lo cual obtendremos:

$$(p + p_i)\,(V_0 - b) = RT. \quad (3)$$

La magnitud p_i se llama *presión interna del gas.*

El papel de las fuerzas atractivas mencionadas se deja sentir sobre las moléculas que se hallan en el interior de la masa del gas de forma diferente que sobre aquellas que están cerca de las paredes. Porque, a pesar de que las fuerzas de atracción entre las moléculas disminuyen al aumentar la distancia menos que las de repulsión, sólo

se manifiestan a pequeñas distancias. Por esto, sobre cada molécula del gas sólo actúan las fuerzas atractivas de las moléculas próximas. Dentro del gas cada molécula está rodeada de otras por todas partes y, en general, las fuerzas de atracción que actúan sobre ella se compensan entre sí. Pero junto a las paredes (fig. 152), las moléculas del gas se encuentran en otras condiciones: sobre ellas sólo ejercen atracción las moléculas que se encuentran algo más alejadas de dicha pared. Hablando en términos generales, entre las moléculas que se hallan junto a las paredes y las que forman el cuerpo de que están hechas estas últimas debe existir cierta interacción. Sin embargo, cuando entre ellas existe equilibrio térmico y siempre que las moléculas del gas no se adhieran a la pared, la energía media de las moléculas que rebotan en ésta es igual a la energía media de las que llegan a ella. Por esta razón, en términos medios, el fenómeno se desarrolla lo mismo que si los choques de las moléculas con las paredes fueran perfectamente elásticos. De esto se deduce, que la influencia de las paredes puede despreciarse.

Como quiera que las fuerzas de atracción entre las moléculas disminuyen bastante de prisa, podemos considerar, que sobre las moléculas que están junto a las paredes sólo actúan aquellas otras que se encuentran a una distancia no mayor de r, es decir, las que se encuentran dentro de la capa ab (fig. 152). El número de moléculas que hay en esta capa es proporcional al de moléculas por unidad de volumen n_0. De esta forma, la acción de las fuerzas atractivas que tienden a separar las moléculas de la pared es proporcional a n_0. Pero además, el número de moléculas que chocan con dicha pared también es proporcional a n_0. Resulta, pues, que la fuerza que actúa sobre las moléculas que se hallan junto a la pared, y que *está dirigida hacia el interior del gas*, es proporcional a n_0^2. Esta fuerza, referida a la unidad de superficie, es la que determina la presión interna del gas p_i.

La magnitud de la presión interna p_i depende también de la naturaleza de las propias moléculas que actúan entre sí, de donde se deduce que

$$p_i = a' n_0^2,$$

donde a' es una constante que depende de la clase de moléculas de que se trate. Como $n_0 = \frac{N}{V_0}$, siendo N el número de Avogadro y V_0 el volumen de un mol del gas, la expresión de p_i puede escribirse así:

$$p_i = \frac{a' N^2}{V_0^2}$$

o llamando a al producto $a' N^2$,

$$p_i = \frac{a}{V_0^2}. \qquad (4)$$

Poniendo el valor de la presión interna p_i, dado por la fórmula (4), en la expresión (3), obtenemos la ecuación de Van der Waals para un mol de gas:

$$\left(p+\frac{a}{V_0^2}\right)(V_0-b)=RT. \qquad (5)$$

Las correcciones a y b (copresión y covolumen) de Van der Waals son constantes para cada gas, con un alto grado de exactitud. Para gases distintos estas correcciones varían. Sus valores numéricos se determinan partiendo de datos empíricos. La constante R de la ecuación de Van der Waals conserva el valor de la constante de los gases.

Cuando el volumen molecular V_0 es muy grande, la corrección b puede despreciarse, en comparación con V_0, y la magnitud $\frac{a}{V_0^2}$ también se puede desestimar en comparación con p; en este caso, la ecuación de Van der Waals se convierte en la ecuación (1).

De esta forma se revela inmediatamente el carácter aproximado de la fórmula de Mendeléiev-Clapeyron, la cual puede dar buenas aproximaciones reales únicamente cuando las presiones p son pequeñas (y los volúmenes V_0, grandes); si las presiones p son grandes, hay que tener en cuenta el papel de las correcciones a y b, es decir, emplear la fórmula de Van der Waals (5).

La fórmula de Van der Waals tampoco es absolutamente exacta, pero da aproximaciones a la realidad mucho mejores que las de la fórmula de Mendeléiev-Clapeyron. En la tabla VIII se dan los

Tabla VIII

Comparación de los datos empíricos con los obtenidos por las fórmulas de Van der Waals para 1 l de nitrógeno a 0° C

Presión p en atm	pV en atm l	$\left(p+\frac{a'}{V^2}\right)(V-b')$ en atm l
1	1,0000	1,000
100	0,9941	1,000
200	1,0483	1,009
500	1,3900	1,014
1000	2,0685	0,893

resultados de la comparación de los datos obtenidos por las fórmulas de Mendeléiev-Clapeyron y de Van der Waals con los datos experimentales del nitrógeno, hasta una presión del 1000 atm.

Si el nitrógeno cumpliera exactamente la ecuación de estado de los gases perfectos, el producto de su presión p por el valor del volu-

men V, obtenido por medio de mediciones experimentales a una temperatura determinada T, debería permanecer constante para todas las presiones. Pero en realidad, como indicamos en el § 44, este producto pV no es constante, sino que toma los valores que dimos en la tercera columna de la tabla II (§ 44) y que repetimos ahora en la tabla VIII. A grandes presiones, el nitrógeno es menos compresible de lo que prevé la ley de Boyle-Mariotte. A 1000 atm el volumen real del nitrógeno es más de dos veces mayor que el que se calcula por la ecuación de estado de los gases perfectos.

En la tercera columna de la tabla VIII se incluyen los valores

$$\left(p+\frac{a'}{V^2}\right)(V-b'),$$

obtenidos para este mismo nitrógeno, a 0° C, después de poner en esta expresión los valores empíricos de V. Las correcciones a' y b' se han referido a la cantidad de nitrógeno dada (véase la letra pequeña). Para ellas se han tomado los valores $a' = 1{,}65 \cdot 10^{-3}$ atm l^2 y $b' = 1{,}36 \cdot 10^{-3}$ l. A temperatura T constante, según la fórmula de Van der Waals, esta expresión debe permanecer constante para todas las presiones p.

Los datos de la tabla VIII muestran, que la fórmula de Van der Waals, en todo el intervalo de presiones desde 1 hasta 1000 atm, concuerda mucho mejor con los datos empíricos que la de Mendeléiev-Clapeyron. La discrepancia entre los datos prácticos del nitrógeno y los que proporciona la fórmula de Van der Waals no excede de un 2%, mientras que la de la ecuación de estado de los gases perfectos a $p = 1000$ atm es mayor de un 100%.

La ecuación de Van der Waals, expresada por la fórmula (5), se refiere a un mol de gas. Veamos cómo hay que cambiarla para que pueda aplicarse a cualquier masa de gas m. De acuerdo con la denominación adoptada, V_0 es el volumen del gas correspondiente a un mol. Llamando V al volumen del gas correspondiente a la masa m, a la temperatura y presión dadas, tendremos:

$$V=\frac{m}{\mu}V_0, \tag{6}$$

donde μ es el peso molecular del gas.

Poniendo en la ecuación de Van der Waals

$$\left(p+\frac{a}{V_0^2}\right)(V_0-b)=RT$$

en lugar de V_0 su valor con relación a V por la fórmula (6), obtenemos

$$\left(p+\frac{m^2}{\mu^2}\frac{a}{V^2}\right)\left(V-\frac{m}{\mu}b\right)=\frac{m}{\mu}RT. \tag{7}$$

La expresión (7) es la fórmula de Van der Waals referida a cualquier masa m de gas, en la cual las correcciones a y b tienen el mismo valor numérico que cuando se trataba de un mol.

§ 61. Puntualización del carácter de las correcciones de Van der Waals. Examinemos más detalladamente el papel que desempeñan las dimensiones propias de las moléculas.

Al deducir las correlaciones fundamentales de la teoría cinética de los gases, en el § 46, consideramos que las moléculas se mueven libremente de una pared a otra. El tiempo Δt, que transcurre desde que una molécula dada choca con una pared hasta que vuelve a ella, lo supusimos igual al tiempo necesario para que dicha molécula recorra transversalmente el recipiente hacia adelante y hacia atrás. Pero si se tienen en cuenta los choques intermoleculares, resulta que ciertas moléculas, después de sufrir una colisión con otras,

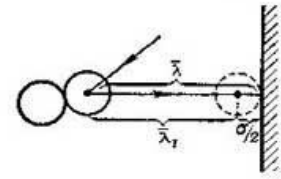


Fig. 153. Choque de una molécula con la pared.

regresan a la pared antes, mientras que otras, por el contrario, llegan más tarde, ya que a causa de los choques siguen una trayectoria en línea quebrada. El valor medio de Δt sigue siendo el mismo que si no existieran choques intermoleculares. Pero esto solamente es así mientras despreciamos las dimensiones propias de las moléculas. Veamos lo que ocurre con una molécula de diámetro σ, que después de rebotar en la pared, choca con otra molécula y retorna a la misma pared (fig. 153). Al producirse el choque, el centro de esta molécula no llega a la pared, sino que se queda a una distancia de ella igual a su radio $r = \frac{\sigma}{2}$.

A esta misma distancia $r = \frac{\sigma}{2}$ se encontrará también el centro al chocar con la otra molécula. Por lo tanto, el recorrido libre resulta disminuido en la magnitud $r + r = \sigma$. No obstante, teniendo en cuenta los choques intermoleculares oblicuos, esta disminución no es tan importante. Los cálculos realizados demuestran que es igual a $\sigma/2$.

De esta forma, el recorrido libre $\bar{\lambda}$ resulta mermado en la magnitud $\sigma/2$, es decir, será igual a $\bar{\lambda}' = \bar{\lambda} - \frac{\sigma}{2}$. De donde el recorrido libre medio de las moléculas que chocan con la pared es $\frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}'}$ veces menor, mientras que el número de choques de las moléculas con dicha pared y, por consiguiente, la presión, resultarán $\frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}'}$ veces mayores.

De aquí se deduce, que el producto pV_0, para un volumen molar dado V_0, no será igual a la magnitud RT, como prevé la ecuación

de estado de los gases perfectos, sino a una magnitud $\frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}'}$ veces mayor

$$pV_0 = RT\frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}'}. \qquad (1)$$

Y como

$$\bar{\lambda}' = \bar{\lambda} - \frac{\sigma}{2}, \text{ tendremos que } \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}'} = \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda} - \frac{\sigma}{2}} = \frac{1}{1 - \frac{\sigma}{2\bar{\lambda}}}$$

Tomando para el recorrido libre medio $\bar{\lambda}$ el valor expresado por la fórmula (4a) § 53, obtenemos

$$\frac{1}{1 - \frac{\sigma}{2\bar{\lambda}}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\pi n_0 \sigma^3},$$

donde n_0 es el número de moléculas por unidad de volumen. Como se trata de un mol de gas, cuyo volumen es igual a V_0, resulta que $n_0 = \frac{N}{V_0}$, donde N es el número de Avogadro, por lo tanto

$$\frac{1}{1 - \frac{\sigma}{2\bar{\lambda}}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\pi\frac{N}{V_0}\sigma^3}.$$

Haciendo la sustitución

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\sigma^3 N = b, \qquad (2)$$

obtenemos

$$\frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}'} = \frac{1}{1 - \frac{\sigma}{2\bar{\lambda}}} = \frac{1}{1 - \frac{b}{V_0}}.$$

Y poniendo esta expresión de $\bar{\lambda}/\bar{\lambda}'$ en (1), hallamos

$$pV_0 = RT\frac{1}{1 - \frac{b}{V_0}} \text{ o } p(V_0 - b) = RT.$$

Es decir, llegamos a la fórmula (2) del § 60, deducida allí por un método menos riguroso. Esta deducción que acabamos de hacer relaciona el valor de la constante b con las dimensiones de las moléculas σ [fórmula (2)]. Sabiendo que el volumen de una molécula v es igual a

$$v = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{6}\pi\sigma^3,$$

por la fórmula (2) tenemos:

$$b = 3\sqrt{2} \cdot vN \cong 4v \cdot N. \qquad (2a)$$

Y como quiera que vN representa de por sí el volumen de todas las moléculas contenidas en un mol de gas, por la fórmula (2a) tenemos que: *la corrección de Van der Waals al volumen molecular b es igual aproximadamente, al cuádruplo del volumen de las propias moléculas.*

La correlación (2) permite, conociendo el valor numérico de la corrección b de Van der Waals, determinar el diámetro de las moléculas σ. Efectivamente, partiendo de (2), tenemos

$$\sigma = \sqrt[3]{\frac{b\sqrt{2}}{\pi N}} \cong \sqrt[3]{\frac{1{,}4b}{\pi N}}.$$

Por ejemplo, para el oxígeno $b = 31{,}6$ m^3/mol, de donde obtenemos que, el diámetro (eficaz) de las moléculas de oxígeno es igual a

$$\sigma = \sqrt[3]{\frac{1{,}4 \cdot 31{,}6}{3{,}14 \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}}} \text{ cm} = 2{,}9 \cdot 10^{-3} \text{ cm},$$

lo cual concuerda bien con los valores de σ obtenidos por otros procedimientos

La segunda corrección de Van der Waals a está relacionada con el carácter de las fuerzas intermoleculares.

Estudiemos más detalladamente este carácter. Las moléculas son de por sí sistemas eléctricos complejos sometidos a las leyes de la mecánica cuántica. Las fuerzas intermoleculares tienen, en parte, carácter de fuerzas de Coulomb (de atracción entre cargas de signo contrario y de repulsión entre cargas del mismo signo) y, en parte, otro carácter que sólo se explica por la mecánica de los cuantos. En general, se puede suponer, que entre las moléculas (consideradas ordinariamente como dipolos eléctricos) existen simultáneamente fuerzas de atracción f_1 y fuerzas de repulsión f_2.

Llamemos por r la distancia entre dos moléculas A y B.

Ambas fuerzas, es decir, la de atracción f_1, que tomaremos como negativa, y la de repulsión f_2, que tomaremos como positiva, pueden considerarse inversamente proporcionales a ciertas potencias $\varkappa_1$ y $\varkappa_2$ de la distancia r que hay entre las moléculas.

$$f_1 = -\frac{C_1}{r^{\varkappa_1}}; \qquad f_2 = \frac{C_2}{r^{\varkappa_2}},$$

donde C_1 y C_2 son magnitudes constantes.

Cuando $\varkappa_2 > \varkappa_1$, la fuerza repulsiva f_2 disminuye más de prisa, al aumentar la distancia, que la fuerza atractiva f_1. En este caso, la fuerza total $f = f_1 + f_2$, a grandes distancias será una fuerza de atracción, mientras que a pequeñas distancias lo será de repulsión.

A las fuerzas f_1 y f_2 les corresponden las energías potenciales E_{p_1} y E_{p_2}, iguales respectivamente a

$$E_{p_1} = -\frac{C'}{r^{k_1}}, \qquad E_{p_2} = \frac{C''}{r^{k_1}}, \tag{3}$$

donde C' y C'' son unas nuevas constantes y los exponentes k_1 y k_2 son iguales respectivamente a $k_1 = n_1 - 1$ y $k_2 = n_2 - 1$. A la fuerza de atracción f_1 le corresponde una energía potencial negativa (véase el § 33), mientras que a la de repulsión f_2, una energía potencial positiva. Representemos las energías potenciales E_{p_1} y E_{p_2} gráficamente, en relación con la distancia entre las moléculas r (fig. 154, *a*). Cuando $k_2 > k_1$, la curva que representa a E_{p_2} asciende más bruscamente si las distancias r son pequeñas, mientras que

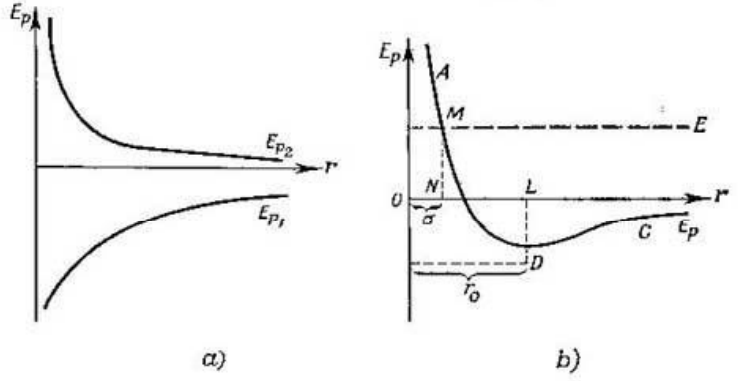


Fig. 154. a) Variación de la energía potencial de atracción E_{p_1} y de repulsión E_{p_2} entre dos moléculas; b) variación de la energía potencial total de la acción intermolecular.

la curva E_{p_1}, en estas mismas condiciones desciende menos bruscamente. La curva resultante, que da el total de la energía potencial mutua de dos moléculas $E_p = E_{p_1} + E_{p_2} = -\frac{C'}{r^{k_1}} + \frac{C''}{r^{k_2}}$, está representada por una curva continua en la fig. 154, *b*. La rama descendente CD de esta curva corresponde a las distancias r grandes, en las cuales la resultante de la interacción molecular $f = f_1 + f_2$ es una fuerza atractiva. La rama ascendente DA, por el contrario, es la correspondiente a las distancias r pequeñas, para las que la fuerza f es repulsiva. Cuando la distancia entre las moléculas es $r_0 = OL$, ambas fuerzas, es decir, la fuerza de repulsión f_2 y la de atracción f_1, son numéricamente iguales entre sí. En este punto la fuerza resultante f es igual a cero. El punto L corresponde al sitio más bajo del pozo de potencial D. Este es precisamente el punto de equilibrio. No obstante, la distancia r_0 nos da en realidad solamente la situación de equilibrio de las moléculas A y B entre sí, cuando la energía total E de estas moléculas es menor que la «profundidad» del pozo de potencial D. Como quiera que dentro de los límites del pozo

la energía potencial E_p es negativa, las dos moléculas, que al principio se encontraban a gran distancia una de otra y que después se fueron acercando, siempre tendrán una reserva de energía mayor que la «profundidad» del pozo de potencial D y, por lo tanto, no podrán juntarse por la acción de las fuerzas de Van der Waals ni formar una molécula más compleja. La unión de las moléculas formando una más compleja es posible únicamente cuando se produce un choque triple, es decir, cuando una tercera molécula se lleva el exceso de energía. Pero incluso en estos casos, si las temperaturas T no son demasiado bajas, la energía media $\frac{1}{2}kT$, correspondiente a un grado de libertad, será mayor que el valor de la energía potencial E_{p_0} en el pozo, y la molécula compleja recién formada no podrá ser mantenida por las fuerzas de Van der Waals y se volverá a desintegrar.

Designemos por E_c la energía cinética y supongamos que la energía total $E = E_c + E_p$ está representada por la recta de puntos trazada en la fig. 154*b*. Considerando que la molécula A está inmóvil y que la molécula B se mueve con relación a ella, tendremos (compárese este razonamiento con el del § 33), que la molécula B, empezando desde grandes distancias r, y hasta llegar a r_0, se mueve en dirección a la molécula A con una velocidad cada vez mayor, debido a las fuerzas atractivas que existen en este tramo. Al llegar al punto L, correspondiente a la distancia de equilibrio entre las moléculas, la B tiene una reserva de energía cinética $E_c = E - E_p$, gracias a la cual atraviesa la posición de equilibrio L y sigue aproximándose a la molécula A, venciendo las fuerzas de repulsión, hasta que toda su energía cinética se transforma en la energía potencial representada por el segmento NM. Después de perder su energía cinética, cuando $r = \sigma$, siendo $\sigma = ON$ la abscisa del punto M, la molécula B, influida por las fuerzas de repulsión, comienza a separarse de la molécula A y vuelve a pasar por todas las etapas del movimiento que hemos analizado, pero en sentido contrario. La distancia $ON = \sigma$ determina precisamente la mínima a que se aproximan entre sí los centros de las moléculas en el instante del choque. El segmento $\sigma = ON$ representa por lo tanto el diámetro eficaz (suma de los «radios») de las moléculas. Como vemos, el valor de σ depende del valor de la energía total E, es decir, de la velocidad con que la molécula B se mueve en dirección a la molécula A, cuando se encuentra a una gran distancia r de ella. Cuanto mayor sea E, tanto más alto se encontrará el punto de intersección de la recta, que representa la energía total E, con la curva que representa la energía potencial E_p y, por consiguiente, menor será σ. De esta forma, el diámetro eficaz σ de las moléculas no es una magnitud constante, sino que depende de la velocidad de las moléculas que chocan. Sin embargo, cuando en el tramo próximo al punto M la curva potencial se eleva

bruscamente, al aumentar la energía E el segmento $ON = \sigma$ varía poco, es decir, en este caso, el diámetro eficaz σ no depende mucho de la velocidad de las moléculas.

El carácter de las fuerzas que examinamos demuestra, que el proceso del choque entre moléculas no se parece, en general, al de dos esferas elásticas. El «choque» de las moléculas es el resultado de la acción de las fuerzas intermoleculares de repulsión, que dependen de la distancia r que hay entre ellas y que aumentan rápidamente al disminuir ésta.

§ 62. Isotermas de Van der Waals. Estado crítico de la substancia. La ecuación de Van der Waals.

$$\left(p+\frac{a}{V_0^2}\right)(V_0-b)=RT \qquad (1)$$

es una ecuación algébrica de tercer grado con respecto a V_0. Por consiguiente, puede dar uno o tres valores diferentes para el volumen molecular V_0, según sean los valores de p y T*). Representando gráficamente la relación entre p y V_0 de la ecuación de Van der Waals, para diferentes T, obtenemos una serie de isotermas (fig. 155). Cada una de las curvas de la fig. 155 (isotermas) corresponde a una temperatura T: cuanto mayor es esta temperatura, más a la derecha y más alta se encuentra la isoterma en la antedicha figura. Como vemos, la

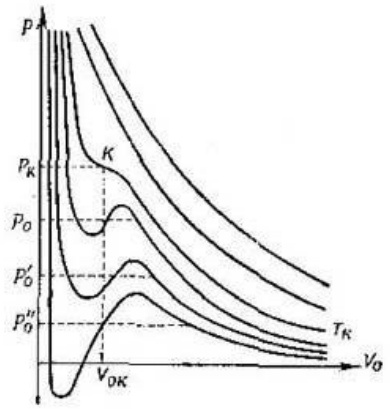


Fig. 155. Isotermas de Van der Waals.

isoterma sólo crece monótonamente al disminuir V_0 (de forma parecida a la isoterma correspondiente a la ley de Boyle-Mariotte), cuando las temperaturas T son elevadas. En esta isoterma, a cada valor de la presión p le corresponde un valor determinado del volumen molecular V_0, es decir, lo mismo que ocurre cuando el gas cumple la fórmula de Mendeléiev-Clapeyron. A temperaturas más bajas, en un campo determinado de presiones y volúmenes las isotermas presentan ondulaciones. En este campo, en términos generales, a cada presión p le corresponden tres valores del volumen V_0.

*) Toda ecuación algébrica de tercer grado con coeficientes reales y término independiente tiene siempre tres soluciones, pero dos de ellas pueden ser complejas. Como la magnitud V_0 es real tendremos para ella una o tres soluciones diferentes.

Para explicar el sentido de esta dependencia, tan extraña a primera vista, hay que recurrir a la experiencia. En la fig. 156 se representan las isotermas obtenidas experimentalmente para el anhídrido carbónico (CO_2). A altas temperaturas T, las isotermas del anhídrido carbónico se parecen a las de los gases perfectos. Pero a temperaturas más bajas el carácter de estas isotermas es completamente distinto. En la fig. 157 se muestra esquemáticamente una de las isotermas de temperatura más baja.

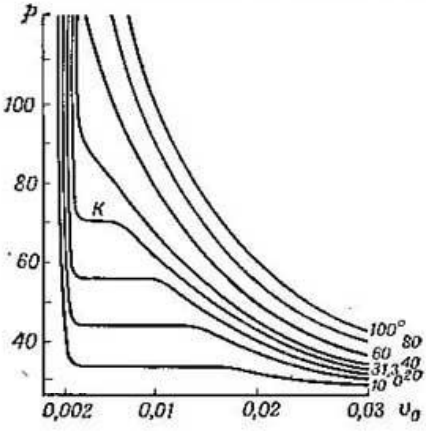


Fig. 156. Isotermas experimentales del anhídrido carbónico (CO_2).

Para mayor claridad daremos a conocer esquemáticamente el experimento en que se determinó la relación entre el volumen molecular V_0 y la presión p para el anhídrido carbónico. El esquema (fig. 158) es el siguiente: en el cilindro de paredes gruesas A, debajo del émbolo B, se encuentra un mol de anhídrido carbónico cuya temperatura T se mantiene constante durante el experimento. El volumen V_0, que ocupa el anhídrido carbónico, puede

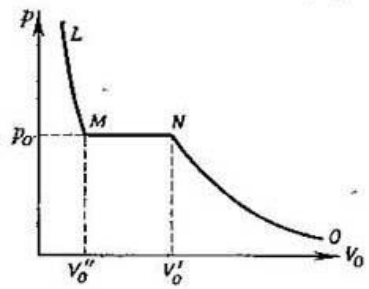


Fig. 157. Isoterma experimental.

medirse al variar la posición del émbolo. La presión correspondiente a estas variaciones de volumen se mide con el manómetro C.

Cuando los volúmenes V_0 son grandes, al bajar el émbolo B aumenta monótonamente la presión del anhídrido carbónico. A esta parte del proceso corresponde la rama ON de la isoterma representada en la fig. 157.

Hasta este momento las cualidades del anhídrido carbónico son análogas a las de un gas perfecto, aunque aquél revela una compresibilidad algo mayor que la prevista por la ley de Boyle-Mariotte. Pero al llegar a una presión determinada p_0, a la que corresponde un volumen V_0' (punto N de la isoterma), el comportamiento del anhí-

drido carbónico cambia bruscamente: al seguir bajando el émbolo, *la presión p_0 permanece constante y comienza el proceso de licuefacción del gas.* Cuanto más baja el émbolo, mayor es la cantidad de gas (que en estas condiciones suele llamarse *vapor saturado*) que pasa al estado líquido. El punto M de la isoterma, que caracteriza la presión p_0 y el volumen V_0'', corresponde a la liquidación total del anhídrido carbónico que se encuentra debajo del émbolo. En este momento debajo de dicho émbolo no hay más que líquido

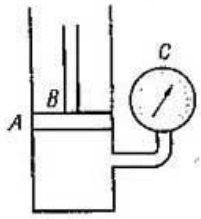


Fig. 158. Esquema del experimento para hallar las isotermas.

y para que aquél pueda continuar bajando hay que aplicar enormes esfuerzos, pues, como ya sabemos, los líquidos son muy poco compresibles. La rama ML de la isoterma corresponde al estado líquido del anhídrido carbónico.

La presión p_0, a que tiene lugar la licuefacción, se denomina *presión (tensión) del vapor saturado a la temperatura T.* Cuando la presión p es igual a la del vapor saturado p_0, la cantidad de substancia dada puede tener cualquier volumen molecular comprendido entre V_0' y V_0''. En este tramo la substancia puede encontrarse simultáneamente en forma de dos *estados de agregación* (o como suele decirse, en dos *fases*), líquido y gaseoso. Cuanto más se aproxime el valor del volumen a V_0'', mayor será la parte de la substancia que se encuentra en estado líquido y menor la que lo está en estado gaseoso (vapor).

Isotermas análogas pueden obtenerse para todas las demás substancias, dentro de la zona de temperaturas en que es posible hacerlas pasar por compresión del estado gaseoso al estado líquido.

La comparación de las isotermas experimentales con las teóricas de Van der Waals nos muestra, que el tramo ondulado de las de Van der Waals corresponde al paso de la substancia del estado gaseoso al líquido o viceversa. No obstante, este paso se realiza en realidad siguiendo no una curva ondulada, sino una recta a presión constante p_0 (la recta MN de la fig. 157).

De esta forma, las isotermas de Van der Waals no sólo reflejan más exactamente el comportamiento del gas que la isoterma del gas perfecto, sino que además abarcan el período de la licuefacción de los gases y expresan la propiedad que éstos tienen de ser muy poco compresibles.

A medida que aumenta la temperatura, el tramo ondulado de las isotermas de Van der Waals se va haciendo más estrecho, es decir, disminuye la diferencia entre los volúmenes V_0' y V_0'', donde V_0' es el volumen correspondiente al caso en que, a la presión p_0, la subs-

tancia se halla totalmente en estado gaseoso (en forma de vapor) y V_0'', el volumen en que, con la misma presión p_0, la substancia ha pasado por completo al estado líquido. En la fig. 159 se confrontan las isotermas reales de diferentes temperaturas. La zona sin rayar corresponde al estado gaseoso de la substancia; la zona punteada, al estado líquido-gas (dos fases), y la zona rayada, al estado líquido.

Entre las isotermas de Van der Waals hay una que separa entre sí las isotermas que tienen ondulaciones, de las que carecen de ellas. Esta isoterma recibe el nombre de *isoterma crítica* y su temperatura, el de *temperatura crítica* T_k (véanse las figs 155 y 159). La isoterma crítica tiene, en lugar de la ondulación, un punto de inflexión

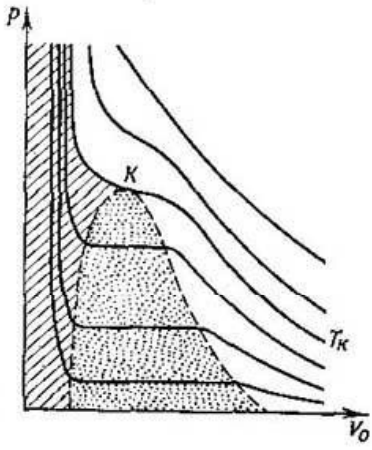


Fig. 159. Variación de las isotermas experimentales

K. En este punto la tangente a la isoterma es paralela al eje de abscisas. El punto K se llama *punto crítico* y los valores correspondientes del volumen V_k y de la presión p_k, *volumen crítico y presión crítica* respectivamente. Cada substancia tiene unos valores determinados para la temperatura, presión y volumen molecular críticos.

El concepto de temperatura crítica fue propuesto por D. Mendeléiev en el año 1861. En sus investigaciones Mendeléiev denominó temperatura crítica a la de la ebullición absoluta del líquido, considerándola como la temperatura en que desaparecen las fuerzas de cohesión entre sus moléculas y éste se convierte en vapor, independientemente de la presión y del volumen específico.

Este concepto de la temperatura crítica está completamente de acuerdo con la idea moderna del paso del estado líquido al gaseoso.

Efectivamente, como vemos en la fig. 159, en la que se delimitan los estados gaseoso y líquido y la zona de licuefacción, es evidente que:

1) a temperaturas mayores de la crítica T_k la substancia puede existir solamente en estado gaseoso. *Todo gas, cuya temperatura T sea mayor que la crítica* T_k, jamás puede *liquidarse por compresión*. En cambio, a temperaturas menores de la crítica, el estado en que se encuentra la substancia depende de la presión y puede ser gaseoso

o líquido o presentar dos fases a un mismo tiempo, es decir, la líquida y la de vapor saturado*).

2) el valor de la tensión del vapor saturado p_0 no puede ser mayor que el de la presión crítica p_k de la substancia dada;

3) el valor del volumen de la substancia en estado líquido no puede ser mayor que el del volumen crítico de la cantidad dada de dicha substancia.

M. P. Avenarius y sus discípulos A. I. Nadiózhdin, V. I. Zayonchevski y otros, estudiaron las temperaturas críticas de un gran

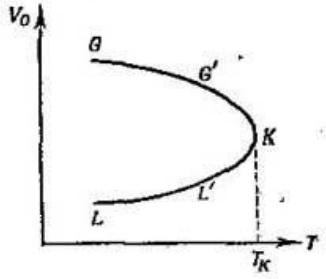


Fig. 160. Las curvas LL' y GG' representan respectivamente las variaciones de los volúmenes específicos del líquido y del vapor saturado, en función de la temperatura. Ambas curvas coinciden en el punto correspondiente a la temperatura crítica T_k.

número de líquidos y de sus mezclas. A. I. Nadiózhdin fue el primero en determinar (en 1885) la temperatura crítica del agua (374° C). El renombrado físico ruso A. G. Stoliétov también se ocupó del estado crítico de las substancias. Estudió el material experimental existente y lo confrontó con los datos teóricos.

Construyamos un diagrama (fig. 160) tomando como abscisas las temperaturas y como ordenadas los volúmenes específicos (es decir, los volúmenes de la unidad de masa) del líquido y los de su vapor saturado que se encuentra en equilibrio. Como el líquido se dilata al calentarse, la curva LL', que representa el volumen específico de dicho líquido en función de la temperatura, se eleva. A medida que va aumentando la temperatura, el volumen del líquido se va haciendo mayor con más rapidez, puesto que su coeficiente de dilatación no es constante, sino que aumenta con la temperatura. Por esto, la curva LL' se tuerce hacia arriba. El volumen específico del vapor saturado está representado por la curva GG'. Al aumentar la temperatura, una parte de líquido se evapora y hace que aumente la densidad del vapor que hay sobre él. Este aumento de la densidad del vapor supone una disminución de su volumen específico, por lo que la curva GG' se tuerce hacia abajo. Hay un cierto punto K, en el cual se confunden ambas curvas. Este punto es el correspondiente al volúmen específico máximo del líquido y, por consiguiente, es

*) Más adelante veremos que también es posible la coexistencia de tres fases, es decir, la gaseosa, la líquida y la sólida.

su punto crítico, y la temperatura que lo caracteriza es la temperatura crítica T_k. Vemos, pues, que en el punto crítico coinciden los volúmenes específicos del líquido y del vapor, es decir, *en el punto crítico desaparece toda diferencia entre el líquido y el vapor*. El paso del estado gaseoso al estado líquido es continuo en el punto crítico. El calor de vaporización del líquido se anula a la temperatura crítica. A esta temperatura también se anula el coeficiente de tensión superficial del líquido.

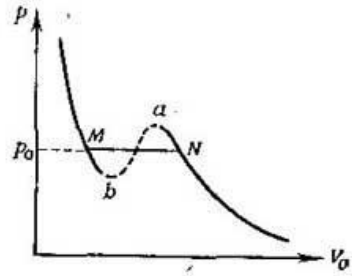


Fig. 161. Comparación de la isoterma teórica con la experimental.

En las proximidades del punto crítico, en todo el volumen del gas se forman y vuelven a desintegrarse núcleos locales de condensación; a esto se debe el enturbiamiento (llamado *opalescencia*) que se produce en la substancia al aproximarse al punto crítico.

Pero examinemos más detalladamente la diferencia que existe entre las isotermas experimentales y las teóricas de Van der Waals. En las isotermas experimentales, en lugar del tramo ondulado existe una línea recta MN, que volvemos a representar en la fig. 161. No obstante, algunos puntos del tramo ondulado pueden conseguirse, en determinadas condiciones, experimentalmente. Así, en un espacio sin polvo y carente de cargas eléctricas, se puede conseguir vapor a una presión p mayor que la tensión p_0 del vapor saturado a la temperatura dada. Este vapor se llama *sobresaturado*. El estado de vapor sobresaturado corresponde a la parte Na de la isoterma, la cual entra en la región de la ondulación. En condiciones normales, en las capas superiores de la atmósfera se forman frecuentemente grandes masas de vapor sobresaturado. Si en el espacio en que se encuentra este vapor sobresaturado irrumpen gotas de agua o partículas de polvo o con carga eléctrica, se produce una condensación que da lugar a la niebla.

De forma análoga puede conseguirse que la substancia se encuentre en estado líquido a una presión menor que la tensión del vapor saturado a la temperatura dada, sin que pase al estado gaseoso; este estado corresponde a la parte Mb de la isoterma.

Entre las isotermas de Van der Waals hay algunas que tienen partes que se encuentran por debajo del eje de abscisas, es decir, en la región de las presiones negativas (véase la fig. 155). Estos estados representan de por sí un líquido «estirado» y también pueden conseguirse prácticamente. Por ejemplo, puede hacerse que el

mercurio líquido se mantenga en un tubo manométrico a una altura mayor de 760 mm, es decir, cuando la presión del mercurio no se equilibra por completo con la presión atmosférica. Esta columna de mercurio está «estirada» por su propio peso, pero no llega a fraccionarse.

Este experimento demuestra que en los líquidos reales existen fuerzas de cohesión.

El tramo descendente *ab* (fig. 161) de las isotermas es imposible de obtener prácticamente; cabe suponer que corresponde a un estado totalmente inestable de la substancia.

§ 63. **Determinación de las magnitudes críticas. Ecuación en magnitudes reducidas.** El estudio de la ecuación de Van der Waals (5) del § 60 nos permite determinar la relación que existe entre los valores de la temperatura, presión y volumen molecular críticos, T_k, p_k y V_{0k}, y de las correcciones a y b.

Transformemos la ecuación de Van der Waals

$$\left(p+\frac{a}{V_0^2}\right)(V_0-b)=RT, \tag{1}$$

multiplicando sus dos miembros por V_0^2/p, abriendo los paréntesis y ordenando los términos según las potencias de V_0, obtenemos

$$V_0^3-\left(\frac{RT}{p}+b\right)V_0^2+\frac{a}{p}V_0-\frac{ab}{p}=0. \tag{2}$$

Aquí puede verse directamente que la ecuación de Van der Waals es una ecuación de tercer grado con respecto a V_0 *).

La ecuación de Van der Waals para la temperatura crítica $T = T_k$

$$V_0^3-\left(\frac{RT_k}{p_k}+b\right)V_0^2+\frac{a}{p_k}V_0-\frac{ab}{p_k}=0 \tag{4}$$

tiene en el punto crítico K (fig. 155) una inflexión. Por consiguiente, en este punto tiene una raíz triple V_{0k} y puede representarse de la forma

$$(V_0-V_{0k})^3=0$$

o, después de elevar al cubo,

$$V_0^3-3V_{0k}V_0^2+3V_{0k}^2V_0-V_{0k}^3=0. \tag{5}$$

*) En Algebra se demuestra, que toda ecuación de tercer grado con coeficientes reales c_1, c_2 y término independiente también real c_3:

$$x^3+c_1x^2+c_2x+c_3=0 \tag{3}$$

tiene tres raíces, x_1, x_2 y x_3, de las cuales pueden ser reales todas ellas o una sola. Utilizando estos valores de x_1, x_2 y x_3 la ecuación (3) puede representarse de la forma

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=0. \tag{3a}$$

Las ecuaciones (3) y (3a) son idénticas entre sí. En el caso particular de que las tres raíces de la ecuación (3) coincidan entre sí, es decir, $x_1 = x_2 = x_3 = x_k$ (raíz triple), la ecuación (3a) tomará el aspécto

$$(x-x_k)^3=0.$$

Las ecuaciones (5) y (4) deben ser idénticas entre sí, lo cual es posible si coinciden los coeficientes de las potencias iguales de V_0, de donde

$$\frac{RT_k}{p_k}+b=3V_{0k}, \quad \frac{a}{p_k}=3V_{0k}^2, \quad \frac{ab}{p_k}=V_{0k}^3.$$

Resolviendo estas tres ecuaciones con respecto a las incógnitas T_k, V_{0k} y p_k, tenemos:

$$T_k=\frac{8a}{27bR}, \quad V_{0k}=3b, \quad p_k=\frac{a}{27b^2}. \tag{6}$$

De esta forma, las magnitudes críticas T_k, V_{0k} y p_k se expresan directamente por medio de las correcciones a y b de Van der Waals.

Utilizando la correlación (6), puede transformarse la ecuación de Van der Waals. Para ello, introduzcamos los conceptos de *presión, volumen y temperatura reducidos* π, ω y τ, entendiéndose por ellos la relación entre la presión, volumen molecular y temperatura de la substancia y sus correspondientes magnitudes críticas:

$$\pi=\frac{p}{p_k}, \quad \omega=\frac{V_0}{V_{0k}}, \quad \tau=\frac{T}{T_k}. \tag{7}$$

En este caso, partiendo de las igualdades (6), hallamos:

$$p=\frac{a}{27b^2}\pi, \quad V_0=3b\omega, \quad T=\frac{8a}{27bR}\tau.$$

Poniendo estos valores de p, V_0 y T en la ecuación (1) y haciendo las transformaciones algébricas necesarias obtenemos:

$$\left(\pi+\frac{3}{\omega^2}\right)(3\omega-1)=8\tau. \tag{8}$$

La ecuación (8) sustituye a la de Van der Waals, referida a un mol, y se denomina *ecuación en magnitudes reducidas.*

En la ecuación (8), además de la presión, volumen y temperatura reducidos π, ω y τ, solamente entran números. No obstante, esta desaparición aparente de las constantes características del estado del gas dado obedece a que, en dicha ecuación figuran precisamente la presión, volumen y temperatura reducidos, es decir, la relación entre la presión, volumen y temperatura y las correspondientes magnitudes críticas del gas dado.

La ecuación (8) permite precisar los criterios que hacen que la ecuación de estado de los gases perfectos sea una buena aproximación a la realidad. Supongamos que el volumen molar del gas V_0 es grande en comparación con su volumen crítico V_{0k}; en este caso, por definición, el volumen reducido ω será grande con relación a la unidad, de donde la ecuación (8) se podrá escribir aproximadamente así:

$$\pi\omega=\frac{8}{3}\tau.$$

Poniendo aquí, en lugar de π, ω y τ, sus valores (7), obtenemos

$$pV_0=\frac{8}{3}\frac{p_kV_{0k}}{T_k}T, \tag{9}$$

pero, recurriendo a las correlaciones (6), se ve fácilmente, que

$$\frac{8}{3}\frac{p_kV_{0k}}{T_k}=R,$$

donde R es la constante de los gases y, por consiguiente, (9) toma el aspecto

$$pV_0 = RT,$$

que es la fórmula de Mendeléiev-Clapeyron referida a un mol. De esto modo, la ecuación de Van der Waals se transforma en la de Mendeléiev-Clapeyron en aquellos casos en que el volumen del gas es grande en comparación con su volumen crítico.

De la ecuación en magnitudes reducidas se desprende el llamado teorema de *los estados correspondientes*, cuya esencia se reduce a lo que sigue: si los estados de dos gases distintos se toman de forma que la relación entre dos de sus tres magnitudes p, V_0 y T, y las correspondientes magnitudes críticas p_k, V_{0k} y T_k son iguales para ambos, la relación entre sus terceras magnitudes y las críticas correspondientes también lo será. Por ejemplo, si dos gases se toman en unos estados para los que $\frac{p_1}{p_{k1}} = \frac{p_2}{p_{k2}}$ y $\frac{T_1}{T_{k1}} = \frac{T_2}{T_{k2}}$, se tendrá también que $\frac{V_{01}}{V_{0k1}} = \frac{V_{02}}{V_{0k2}}$. Este teorema se deduce directamente de la ecuación (8), puesto que, por ejemplo, cuando π y τ son iguales para dos gases, también tiene que serlo ω.

Cuando se trata de cuerpos químicos semejantes, cuyas temperaturas críticas no se diferencian mucho entre sí, el teorema de los estados correspondientes se cumple con máx exactitud que la que da la fórmula de Van der Waals, si comparamos sus resultados con los datos experimentales de cada uno de los cuerpos por separado. Esto indica, que las discrepancias que revelan estos cuerpos con relación a la fórmula de Van der Waals tienen el mismo carácter.

Las discrepancias cuantitativas que presentan las substancias reales, con respecto a la fórmula de Van der Waals, se hacen todavía más patentes en las proximidades del punto crítico. Partiendo de la fórmula (6) es fácil deducir, que entre las magnitudes críticas p_k, V_{0k} y T_k tiene lugar la correlación.

$$p_k V_{0k} = \frac{3}{8} RT_k \tag{10}$$

o

$$\frac{RT_k}{p_k V_{0k}} = \frac{8}{3} = 2{,}667. \tag{10a}$$

La correlación (10) sustituye a la ecuación $p_k V_{0k} = RT_k$, correspondiente a la de estado de los gases perfectos. La discrepancia entre los datos de la fórmula de V an der Waals y los de a fórmula de Mendeléiev-Clapeyron llega a ser de casi 2,7 veces. Sin embargo, los datos de la primera también están lejos de coincidir exactamente con los experimentales. La relación $K_k = \frac{RT_k}{p_k V_{0k}}$, que según la fórmula (10a) debería tener el valor de $\frac{8}{3}$ para todas las substancias, toma en realidad diferentes valores para distintos cuerpos y se diferencia bastante de $\frac{8}{3}$. En la tabla IX se dan los valores que toma K_k (*coeficiente crítico*) para algunos gases.

La diferencia es particularmente grande para el agua, hecho que se explica, porque al aproximarse al punto crítico, sus moléculas se asocian formando grupos más complejos.

Tabla IX

Valores de los coeficientes críticos K_k para algunos gases

Gas	He	H_2	N_2	Ar	O_2	CO_2	H_2O
K_k	3,13	3,03	3,42	3,43	3,42	3,486	4,46

§ 64. Energía interna de los gases reales. Efecto Joule-Thomson

Como demostramos en el § 48, la energía interna de un gas perfecto U es la energía cinética del movimiento de sus moléculas $E_c = \Sigma \overline{\omega}_c$; para una cantidad determinada de gas, esta energía es independiente del volumen y de la presión y únicamente depende de su temperatura T; para un mol de gas perfecto $U = E_c = C_V T$, donde C_V es el calor específico molar a volumen constante (véase el § 49).

En los gases reales, como hemos visto, desempeñan un papel importante las fuerzas intermoleculares. Por esto, la energía interna de un gas real está integrada por la energía cinética del movimiento de sus moléculas y por la energía potencial que existe entre ellas

$$U = E_c + E_p. \tag{1}$$

La energía potencial intermolecular depende de la distancia media que hay entre las moléculas, por lo tanto, E_p debe depender del volumen del gas. Cuando el volumen del gas varía sin que se produzca intercambio de energía con los cuerpos circundantes, su reserva total de energía interna U permanece constante y, por consiguiente, de la igualdad (1) se deduce:

$$\Delta E_p = -\Delta E_c, \tag{2}$$

es decir, que cuando varía el volumen del gas real, la energía cinética del movimiento de sus moléculas debe también variar a costa de la variación que experimenta la energía potencial.

Como quiera que para el gas real el calor específico a volumen constante C_V también depende únicamente de la energía cinética del movimiento de sus moléculas, la igualdad $E_c = C_V T$ (para un mol) seguirá en vigor y, entonces, de la expresión (2) se deduce que:

$$\Delta E_p = -C_V \cdot \Delta T. \tag{3}$$

De donde obtenemos que: al variar el volumen, sin que se realicen trabajos externos ni se produzca intercambio de calor con los cuerpos circundantes, la temperatura del gas real varía. El primer intento de descubrir este fenómeno se debe a Joule, el cual introdujo en un calorímetro con agua dos recipientes, A y B (fig. 162), unidos entre sí por un tubo provisto de la llave de paso C. En el recipiente B

se hacía el vacío, mientras que el aire del recipiente A se encontraba a cierta presión p. Cuando se abría la llave C, el aire del recipiente A irrumpía en el B, expandiéndose sin realizar trabajo exterior. Al ocurrir esto, Joule no consiguió apreciar en el calorímetro ninguna variación de temperatura. Esto le hizo llegar a la conclusión, de que, cuando el volumen del gas varía, su energía interna no sufre alteración.

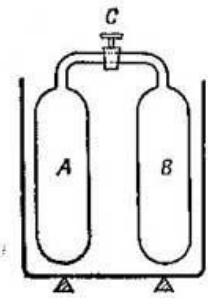


Fig. 162. Experimento de Joule.

Pero, poco tiempo después, Joule y Thomson repitieron este experimento por un procedimiento más sensible. Consistió éste en que en el tubo que unía entre sí los recipientes A y B colocaron un tapón de materia porosa C (fig. 163). El tubo fue envuelto en material termoaislante. La presión p_1 y p_2 del gas, en los recipientes A y B respectivamente, se mantuvo constante. El gas pasaba por el tubo experimentando un salto de presión en el sitio en que se encontraba el tapón. A ambos lados de este tapón había unos termómetros muy sensibles. En estas condiciones, se descubrió que entre las temperaturas que indicaban ambos termómetros existía una pequeña diferencia. Para la mayoría de los gases, la temperatura observada por el lado del tapón en que el gas se expandía, era algo más baja. Pero con el hidrógeno ocurría lo contrario, es decir, que al expandirse se calentaba. Este efecto de la variación de la temperatura del gas al expandirse (sin intercambio de calor ni realización de trabajo exterior) recibe el nombre de *efecto Joule-Thomson*. Este efecto es una consecuencia de la discrepancia que existe entre las cualidades de los gases reales y la de los gases perfectos.

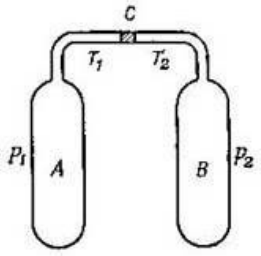


Fig. 163. Experimento de Joule-Thomson.

Cuando el efecto de Joule-Thomson consiste en un enfriamiento del gas que se expande, se ha convenido en llamarle *positivo*, y cuando consiste en un calentamiento de dicho gas, *negativo*. Posteriormente se esclareció que el signo del efecto Joule-Thomson depende de cuál de las correcciones, a o b, de la ecuación de Van der Waals es la predominante.

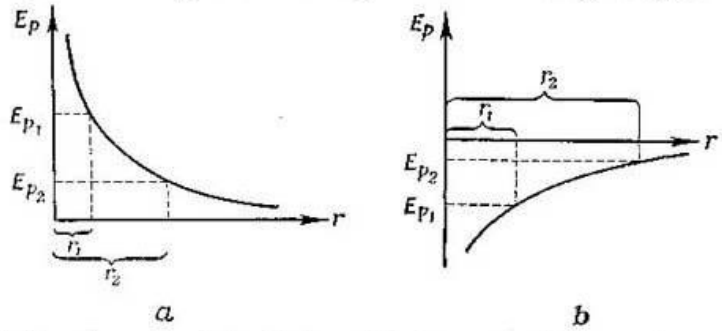
La relación entre el efecto Joule-Thomson y las correcciones a y b de la ecuación de Van der Waals

$$\left(p+\frac{a}{V_0^2}\right)(V_0-b)=RT$$

se puede establecer examinando las curvas de la energía potencial que se dieron en el § 61.

Para simplificar examinaremos dos casos concretos: 1) el de un gas cuya corrección a se puede despreciar, y 2) el de un gas cuya corrección b puede despreciarse.

Como hemos visto, la corrección a de la ecuación de Van der Waals está relacionada con la existencia de fuerzas atractivas entre las moléculas. Por lo tanto, en el primer caso habrá que considerar que las fuerzas intermoleculares atractivas son muy pequeñas y tienden a desaparecer y que hay que tener en cuenta solamente las fuerzas repulsivas. En estas condiciones, la energía potencial intermolecular E_p, como función de la distancia r entre las moléculas, podrá representarse por la curva que muestra la fig. 164, a.



a b

Fig. 164. Energías potenciales de la acción intermolecular a) cuando existen fuerzas repulsivas; b) cuando existen fuerzas atractivas.

A una presión mayor p_1 del gas le corresponde una distancia media menor entre las moléculas r_1, mientras que a una presión menor p_2 le corresponde una distancia media r_2 mayor. De donde, como se ve en la fig. 164, a, al disminuir la presión disminuye también la energía potencial interna:

$$\Delta E_p = E_{p2} - E_{p1} < 0.$$

Pero cuando $\Delta E_p < 0$, por la igualdad (3) se obtiene que $\Delta T > 0$.

De este modo llegamos a la conclusión de que: todo gas cuya corrección a, de la ecuación de Van der Waals, puede despreciarse, mientras que la b desempeña un papel apreciable, se calienta al expandirse.

El segundo caso se refiere a un gas cuyas moléculas tienen unas dimensiones tan pequeñas que pueden considerarse puntuales. Esto significa que, a distancias de alguna consideración, entre las moléculas no existen fuerzas de repulsión sensibles. Por lo tanto, hay que tener en cuenta (exceptuando los momentos de choque) únicamente las fuerzas atractivas, a las cuales corresponde la relación entre la energía potencial E_p y la distancia r que se muestra en la fig. 164, *b*.

En este caso la energía potencial es negativa y al aumentar r disminuye su valor numérico, por lo cual

$$\Delta E_p = E_{p2} - E_{p1} > 0.$$

De donde, basándonos en (3), obtenemos que $\Delta T < 0$. Es decir, todo gas cuya corrección *b*, de la ecuación de Van der Waals, puede despreciarse, mientras que la *a* juega un papel importante, se enfría al expandirse.

Un gas real produce un efecto Joule-Thomson negativo cuando la corrección *b*, que tiene en cuenta las dimensiones de las propias moléculas, es la que desempeña el papel principal; por el contrario, producirá un efecto positivo, cuando el papel principal le corresponda a la corrección *a*, que tiene en cuenta las fuerzas de cohesión intermoleculares.

El papel que juegan las correcciones *a* y *b* depende de la temperatura y de la presión y, por consiguiente, puede variar para un mismo gas. Por esto, el efecto Joule-Thomson que produce un mismo gas real puede ser positivo o negativo, dependiendo de las condiciones

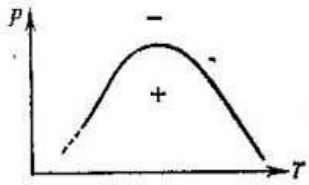


Fig. 165. Curva de inversión.

exteriores que influyen sobre él. A presiones muy altas, el papel principal lo desempeñan, en cualquier gas, las dimensiones de las propias moléculas, es decir, la corrección *b*, por lo que, en estas condiciones todos los gases producen un efecto Joule-Thomson negativo.

Para ciertos valores de la presión p y de la temperatura T, el papel de ambas correcciones, *a* y *b*, es igual; cuando el gas real se encuentra en este estado, el efecto Joule-Thomson que produce es nulo, es decir, el gas ni se calienta ni se enfría al expandirse. El estado del gas que produce un efecto Joule-Thomson nulo se denomina *punto de inversión*. El conjunto de todos los puntos de inversión forma la curva que muestra la fig. 165. Para cualquier punto,

correspondiente a unos valores de p y T dados, el signo positivo o negativo del efecto Joule-Thomson dependerá de la posición que dicho punto ocupe con relación a la curva de inversión: si el punto se encuentra por debajo de la curva, el efecto será positivo; si se encuentra por encima, el efecto será negativo.

§ 65. Licuación de los gases. El estudio de la ecuación de Van der Waals nos ha demostrado, que un gas puede licuarse por compresión únicamente cuando su temperatura T es inferior a la temperatura crítica T_k. Las isotermas del anhídrido carbónico, que dimos en la fig. 156, muestran que, a temperaturas superiores a la crítica, es decir, a 31° C, no se consigue licuar este gas ni a las presiones más altas. La inflexión correspondiente a la condensación y licuación del anhídrido carbónico sólo aparece en las isotermas cuya temperatura es inferior a 31° C.

En la tabla X se dan los valores de las temperaturas y presiones críticas, T_k y p_k de algunos gases.

Tabla X

Temperaturas y presiones críticas

Substancia	Temperatura crítica T_k en °C	Presión crítica p_k en atm
Agua, H_2O	374	217
Cloro, Cl_2	144	76
Amoníaco, NH_3	132	112
Anhídrido carbónico, CO_2	31	73
Kriptón, Kr	—62,5	54
Oxígeno, O_2	—118,8	50
Argón, Ar	—122,4	48
Nitrógeno, N_2	—147	33,5
Neón, Ne	—228	26
Hidrógeno, H_2	—240	12,85
Helio, He	—267,9	2,2

En esta tabla se ve, que los gases como el nitrógeno, el oxígeno (y por consiguiente su mezcla, es decir aire), el hidrógeno y el helio, tienen temperaturas críticas bastante bajas. Por lo tanto, únicamente pueden licuarse después de someterlos a un fuerte enfriamiento. Pictet utilizó para licuar los gases la propiedad que tienen los líquidos de enfriarse por evaporación intensiva (debido al gasto de energía interna que produce la vaporización, es decir, a la pérdida del calor de vaporización). Pictet, sometiendo a evaporación intensa anhídrido sulfuroso líquido, consiguió que la temperatura de éste disminuyera sensiblemente. Dentro del recipiente en que

tenía lugar la evaporación del anhídrido sulfuroso líquido había un serpentín, por el cual circulaba anhídrido carbónico a gran presión. En estas condiciones, el anhídrido carbónico se liquaba. Una vez convertido en líquido, este anhídrido carbónico iba a parar a otro recipiente, por el que pasaba un tubo con oxígeno comprimido,

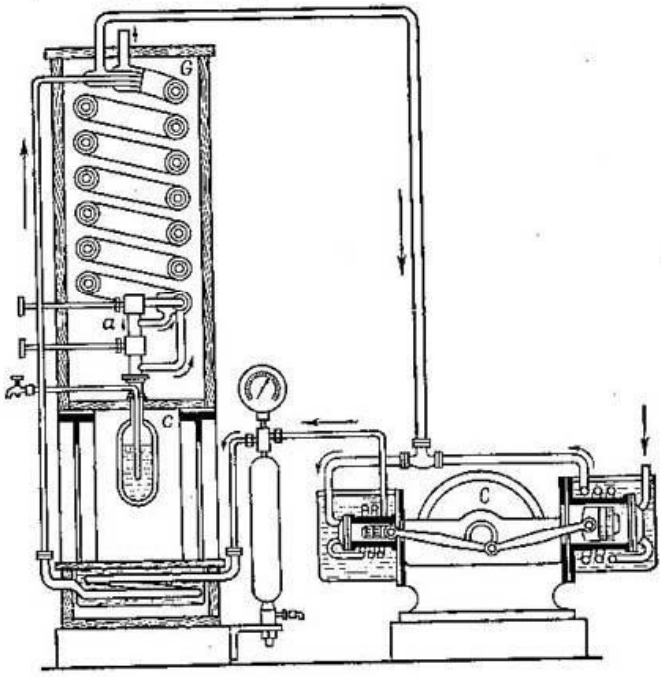


Fig. 166. Máquina de Linde.

y allí se evaporaba. Como resultado de la intensa evaporación, el anhídrido carbónico líquido se enfriaba hasta —130° C, es decir, hasta una temperatura inferior a la crítica del oxígeno, el cual podía entonces licuarse sometiéndolo a gran compresión.

En 1884 Wroblewski y Olzewski licuaron el hidrógeno comprimiéndolo hasta 190 atm al mismo tiempo que lo enfriaban con oxígeno hirviendo. A finales del siglo pasado, Dewar y Linde propusieron emplear el efecto Joule-Thomson para enfriar los gases.

El esquema de la *máquina de Linde* para obtener aire líquido se muestra en la fig. 166. Consta de un compresor *C* de dos cilindros, movido por un motor eléctrico, en el cual se comprime el aire hasta una presión de 100 atm. El aire así comprimido pasa por el tubo más delgado de un serpentín *G* (formado por varios tubos metidos

unos dentro de otros) y al llegar a la válvula *a* se expande de repente. Al ocurrir esto, su temperatura baja (puesto que el aire en estas condiciones produce un efecto Joule-Thomson positivo). La porción de aire enfriado de esta forma se eleva por el tubo exterior del serpentín y enfría la nueva porción que desciende a su encuentro por el tubo interior. Esta segunda porción de aire se enfría parcialmente antes de llegar a la válvula *a*, pero al pasar por ella y expandirse se enfría aún más por el efecto Joule-Thomson. Repitiendo esta operación un número suficiente de veces, se consigue enfriar el aire hasta temperaturas inferiores a la crítica y licuarlo. El aire líquido se recoge en un vaso de Dewar *c*, en el cual, debido al poco calor que le llega del exterior, puede conservarse durante bastante tiempo.

Como el aire está formado principalmente por nitrógeno y oxígeno, el aire líquido es una mezcla de dos líquidos. Pero el punto de ebullición de cada uno de ellos es diferente. A la presión atmosférica el nitrógeno líquido hierve a —195,7° C, mientras que el oxígeno líquido lo hace a —183° C. Por esta razón, el aire líquido se enriquece en oxígeno a medida que se evapora, puesto que el nitrógeno es el primero en hervir.

Si se evaporan dos terceras partes del aire líquido, el resto contendrá un 53% de oxígeno.

El aire líquido se emplea mucho en la actualidad, tanto en los laboratorios como en la técnica. En los primeros se utiliza para hacer el alto vacío (véase el § 60) y para otros fines. En la técnica se han extendido mucho las máquinas que proporcionan separadamente oxígeno y gitrógeno líquidos. La separación de ambos gases del aire se basa en la diferencia de sus temperaturas de licuación y ebullición.

El algodón o el carbón vegetal impregnado de oxígeno líquido son explosivos muy poderosos que se emplean en trabajos de minería. El oxígeno líquido se utiliza también en aviación, para vuelos de gran altura, durante los cuales se evapora y produce el oxígeno necesario para la respiración de los aviadores.

El procedimiento de la destilación fraccionada se utiliza también para separar del aire los gases raros, como el helio, neón, argón kriptón y xenón. El método de Dewar-Linde sólo se puede emplear directamente para licuar aquellos gases que a 20° C producen un efecto Joule-Thomson positivo.

Los gases que a la temperatura indicada producen un efecto Joule-Thomson negativo tienen que enfriarse previamente hasta un punto inferior al de inversión. Por ejemplo, el hidrógeno debe enfriarse hasta —80° C, para que al disminuir la presión desde 200 atm hasta 1 atm produzca un efecto Joule-Thomson positivo. El helio, para este mismo intervalo de presiones, tiene una temperatura de inversión de —258° C. Después de enfriados hasta temperaturas inferiores a las antedichas (lo que para el oxígeno se consigue valién-

dose del aire líquido y para el helio empleando hidrógeno también líquido) estos gases pueden licuarse por el método de Dewar-Linde.

En la actualidad todos los gases conocidos se han hecho pasar no sólo al estado líquido, sino también al sólido.

El primero que consiguió licuar el helio fue Kamerlingh Onnes, en el año 1908. Vaporizando el helio líquido a una presión muy baja, Kamerlingh Onnes alcanzó la temperatura de 0,9° K. Posteriormente, por este mismo procedimiento se han logrado temperaturas de 0,71° K y mediante la desimanación adiabática de cuerpos magnetizados se ha obtenido una temperatura inferior a 0,1° K*).

Para la licuación del aire, además del procedimiento de Dewar-Linde, se utiliza otro basado en el enfriamiento que se produce cuando el gas vence algún trabajo exterior.

En las máquinas más simples que funcionan por este procedimiento, el gas, comprimido a gran presión, entra en un cilindro (expansor) provisto de un émbolo. El gas, venciendo las fuerzas externas a costa de su energía interna, hace que retroceda este émbolo, con lo que se produce un descenso de su temperatura.

P. L. Kapitsa, utilizando este procedimiento, construyó una máquina para producir aire y otros gases líquidos, en la cual el enfriamiento se consigue a expensas del trabajo que realiza el gas moviendo una turbina.

Las posibilidades que ofrecen los gases licuados (aire, hidrógeno, helio) para enfriar cuerpos hasta temperaturas bajísimas juegan un gran papel en la Física moderna. Porque todas las cualidades de los cuerpos dependen de su temperatura y esta dependencia es mucho mayor a temperaturas muy bajas. Cuando la temperatura se aproxima al cero absoluto se produce una serie de fenómenos nuevos cualitativamente. En el § 42 ya hicimos mención de la superfluidez del helio líquido. En el tomo II hablaremos del fenómeno de la superconductividad, que consiste en que la resistencia óhmica de muchos metales puros y de ciertas aleaciones se anula prácticamente a temperaturas del orden de 1 a 7° K. A bajas temperaturas cambian mucho las cualidades magnéticas de las substancias. El calor específico de los cuerpos también tiende a cero cuando la temperatura se aproxima al cero absoluto. La rama de la Física que estudia todos estos fenómenos se denomina Física de las bajas temperaturas.

---

*) De los razonamientos teóricos generales se deduce, que es imposible alcanzar una temperatura igual exactamente al cero absoluto. Cuanto más nos aproximamos a esta temperatura, tanto más difícil es conseguir enfriamientos mayores.

CAPITULO VIII

Principios de Termodinámica

§ 66. Descripción cinético-molecular y energética de los procesos. La teoría cinético-molecular se propone explicar las cualidades macroscópicas de los cuerpos estudiando detalladamente los procesos moleculares que les sirven de base. *Las magnitudes macroscópicas físicas tienen en esta teoría el sentido de los valores medios de las magnitudes que caracterizan el proceso molecular o atómico correspondiente.* Así, la presión que ejerce un gas sobre las paredes del recipiente que lo contiene, se debe a los choques que dichas paredes experimentan por parte de cada una de las moléculas del gas. La estabilidad de la presión en unas condiciones dadas es el resultado de que, al medirla, hallamos el efecto medio que producen los choques de un enorme número de moléculas durante un espacio de tiempo bastante grande en comparación con el que corresponde a cada choque.

Al examinar el fenómeno de la difusión de los gases vimos que también tiene el sentido de cierto efecto medio, que se produce como consecuencia del movimiento desordenado de las moléculas. Lo mismo puede decirse de los fenómenos del rozamiento interno de los gases y de la conductividad térmica.

El desorden en que se realiza el movimiento de las moléculas no es óbice, en general, para la existencia de determinadas regularidades. La fórmula de la distribución de las velocidades de Maxwell demuestra, que, en medio del desorden en que se distribuyen las velocidades, existe una velocidad más probable, es decir, una velocidad de la cual hay pocas que se diferencien mucho. La energía cinética del movimiento de cada molécula toma los valores más diversos para un estado dado de equilibrio de la substancia, pero la energía media correspondiente a un grado de libertad tiene, en estas condiciones, un valor perfectamente determinado. Este valor medio de la energía es el que determina la temperatura del cuerpo. La suma de las energías cinética y potencial del movimiento desordenado de las moléculas constituye la reserva de energía interna de la substancia.

De esta forma, el hecho de que las magnitudes macroscópicas tengan valores determinados se explica únicamente porque éstos son *los valores medios de un número enorme de procesos elementales*

aislados. Si los fenómenos se observan en pequeña escala, es decir, cuando el número de moléculas es pequeño, pueden encontrarse discrepancias con respecto a los valores medios establecidos.

Estas discrepancias, llamadas *fluctuaciones* (véase el § 76), se observan en realidad. Como ejemplo de ellas puede servir el movimiento browniano.

El método que se emplea para explicar las cualidades macroscópicas de los cuerpos, desde el punto de vista de su constitución molecular, es en esencia un método *estadístico.* En la actualidad este método está tan difundido, que toda la parte de la Física teórica que lo emplea se denomina *Física estadística.*

No obstante, para describir estos fenómenos puede utilizarse otro procedimiento. En el § 26 señalábamos, que el comportamiento de los cuerpos puede explicarse sin necesidad de entrar en un estudio detallado de aquellos procesos que en estas circunstancias se desarrollan. Esta explicación es posible gracias a la introducción de los conceptos de energía, de sus transformaciones y de los procedimientos para transmitirla, y al establecimiento de aquellas leyes fundamentales a que están sujetas estas transformaciones de la energía de unas formas a otras.

La parte de la Física que estudia los procesos desde este punto de vista energético recibe el nombre de *Termodinámica.* La Termodinámica, sin entrar en el estudio microscópico de los procesos, permite sacar toda una serie de conclusiones, respecto a su desarrollo general, tan fidedignas como las leyes fundamentales que le sirven de base.

El método que se sigue en los razonamientos de la Termodinámica, por referirse a la parte energética de los procesos, no sólo tiene una importancia extraordinaria como principio, sino también prácticamente. Desde el punto de vista de la Termodinámica puede estudiarse toda una amplísima categoría de problemas técnicos relacionados con la transformación de la energía y con la producción de trabajo a costa de la energía.

Las leyes en que se basa la Termodinámica se conocen con la denominación *de principios de la Termodinámica.* Estos principios fueron establecidos como resultado de la generalización de datos experimentales; su exactitud se confirma por el hecho de que un gran número de deducciones sacadas de ellos coincidieron posteriormente con los resultados de otros experimentos.

§ 67. Equivalente mecánico del calor. Antes de pasar a formular el primer principio de la Termodinámica examinemos más detalladamente cómo se transmite la energía de unos cuerpos a otros mediante la realización de trabajo y de la transmisión de calor. El concepto de trabajo fue estudiado ya en el § 25. La idea de la transmisión de cierta cantidad de calor a un cuerpo cualquiera, también

la hemos utilizado en más de una ocasión. Ahora se trata de hacer un examen más profundo de este concepto de la transmisión del calor.

La idea primitiva del estado térmico de los cuerpos surgió como consecuencia de las sensaciones subjetivas que pueden producir los cuerpos calientes. Estas sensaciones están determinadas por un conjunto de hechos relacionados no sólo con el cuerpo cuyo grado de calentamiento apreciamos, sino también con el propio órgano que los percibe, que suele ser la piel de las manos. La sensación de calor o de frío que nos produce un cuerpo dado no sólo depende de su temperatura, sino también de su conductividad térmica y del estado en que se encuentran nuestras manos. Para valorar objetivamente el estado térmico de los cuerpos se utiliza el hecho de que todos ellos, al ponerse en contacto mutuo durante un plazo de tiempo suficientemente largo y formando un grupo aislado en el que no ocurren más variaciones que las de carácter térmico, acaban por estar a la misma temperatura. En esto se basa precisamente la medición de la temperatura; por ejemplo, un termómetro puesto en contacto con un cuerpo durante un tiempo suficiente, adquiere su temperatura. Para medir la temperatura puede emplearse cualquier magnitud física que dependa de ella. La escala empírica o de hidrógeno, por ejemplo (véase el § 44), mide la temperatura por la variación que experimenta la presión de dicho gas a volumen constante.

En la primera mitad del siglo XVIII algunos científicos opinaban, que la elevación de la temperatura de los cuerpos se debía a movimientos moleculares. Esta idea fue desarrollada por M. Lomonósov, el cual consideró que los fenómenos térmicos eran el resultado del movimiento de rotación de las moléculas. Lomonósov relacionaba este estado térmico de los cuerpos precisamente con el movimiento de rotación de las moléculas, porque consideraba que este movimiento es el único común a todos los estados de agregación de la substancia. La teoría de Lomonósov, expuesta el año 1744 en el tratado «Reflexiones sobre las causas del calor y el frío», a pesar de la restricción que se indica, contenía todos los rasgos fundamentales de la teoría cinético-molecular del calor. En calidad de argumento principal en pro de la teoría cinético-molecular del calor, Lomonósov mencionaba el calentamiento de los cuerpos por fricción. Este mismo hecho fue utilizado por él para refutar la teoría del calórico, que era la generalmente admitida en aquel tiempo.

Esta hipótesis del calórico apareció en el siglo XVIII y llegó a estar muy difundida. *Según la teoría calórica, el calor es de por sí una substancia (el fluido calórico), que no se crea ni se destruye.* Se consideraba que el calórico solamente podía pasar de los cuerpos más calientes a los más fríos, puesto que aquéllos contenían más calórico que éstos. A pesar de que esta teoría no explicaba el calen-

tamiendo de los cuerpos por fricción, se mantuvo hasta mediados del siglo XIX.

Sobre la base de la teoría del calórico se desarrolló el método de las mediciones calorimétricas y se estableció el concepto de cantidad de calor cedida Q. Las primeras mediciones calorimétricas fueron efectuadas en los años 1750-1751, en San Petersburgo, por G. V. Richman. El concepto de la cantidad de calor cedida puede introducirse al examinar, por ejemplo, el siguiente experimento: se toman dos recipientes absolutamente iguales, que contengan la misma cantidad de agua a igual temperatura T_0. Después, se calientan hasta una temperatura T, mayor que T_0, dos cuerpos diferentes, por ejemplo, uno de hierro y otro de plomo, pero de igual masa m. Si cada uno de estos cuerpos se introduce en uno de los recipientes antedichos y se espera el tiempo necesario para que sus temperaturas se igualen con las del agua, notaremos que el líquido del recipiente en que se encuentra el hierro se habrá calentado más que el del recipiente en que se halla el plomo. Este hecho puede interpretarse en el sentido de que el hierro cedió al agua más cantidad de calor ΔQ que el plomo. Haciendo experimentos semejantes con cuerpos iguales, puede llegarse a la conclusión de que la cantidad de calor cedida al agua será tanto mayor cuanto mayor sea la masa del cuerpo y más alta la temperatura inicial a que se calienta. Sobre la base de estos experimentos se aceptó, que la cantidad de calor ΔQ cedida o ganada por el cuerpo es proporcional a la variación de su temperatura ΔT y a su masa m:

$$\Delta Q = cm\,\Delta T. \tag{1}$$

La magnitud c recibió el nombre de calor específico. Como unidad de cantidad de calor cedida (caloría) se adoptó la cantidad de calor que hay que comunicar a 1 g de agua para elevar su temperatura en 1° C. Cuando la medición de la cantidad de calor cedida se hace en calorías, el calor específico del agua es igual a la unidad.

Fundándonos en lo expuesto, la medición de la cantidad de calor cedida ΔQ se puede efectuar de la forma siguiente: el cuerpo se pone en contacto con el agua de manera, que el intercambio de calor tenga lugar exclusivamente entre aquél y ésta, entonces, de acuerdo con (1), tendremos:

$$\Delta Q = cm\,\Delta T = c_0 m_0\,\Delta T_0, \tag{2}$$

donde c_0 y m_0 son respectivamente el calor específico y la masa del agua, y ΔT_0 la variación de su temperatura debida al intercambio de calor con el cuerpo dado. Como quiera que m_0 y ΔT_0 pueden medirse directamente, aplicando la fórmula (2) se puede hallar ΔQ.

A finales del siglo XVIII y comienzos del XIX, a medida que se iba acumulando material experimental, se fue acusando cada vez más que la teoría del calórico no servía para explicar el calentamiento de los cuerpos por el trabajo que producen las fuerzas de rozamiento.

Rumford observó el calentamiento continuo que experimentan las virutas cuando se taladra un metal. Davy, a finales del siglo XVIII, demostró la posibilidad de producir calentamiento por frotación de dos trozos de hielo. Joule, después de una numerosa serie de trabajos, realizados desde el año 1843 hasta el 1878, demostró que para conseguir que un cuerpo se caliente lo mismo que cuando se le comunica una cantidad de calor igual a una caloría, es necesario realizar un trabajo igual a $4{,}18 \cdot 10^7$ ergios, y viceversa, si se realiza un trabajo mecánico a costa del calor ganado a un cuerpo cualquiera, por cada caloría se obtiene un trabajo mecánico igual a $4{,}18 \cdot 10^7$ ergios. Así se estableció el equivalente mecánico del calor, que posteriormente fue confirmado por multitud de experimentos realizados de formas diferentes.

§ 68. Primer principio de la Termodinámica. El equivalente mecánico del calor permite generalizar el principio de la conservación de la energía mecánica. Como dijimos en el § 28, la variación que experimenta la energía mecánica de un sistema de cuerpos es proporcional al trabajo realizado por las fuerzas exteriores que se le aplican y a las fuerzas de rozamiento interno. Entonces omitimos los agentes térmicos*).

Pero en el caso general, la variación de la energía del sistema depende no sólo del trabajo realizado, sino también del intercambio de calor y de otros agentes (por ejemplo, de la absorción de luz).

Examinemos ahora un sistema cualquiera y hagámoslo pasar de un estado a otro. Por ejemplo, una cantidad determinada de gas puede comprimirse por la acción de fuerzas externas y, simultáneamente, calentarse, como resultado de haberle cedido cierta cantidad de calor. Cada uno de los estados del sistema puede definirse, desde el punto de vista macroscópico, por medio de unas magnitudes determinadas que caractericen dicho estado. Estas magnitudes se llaman *parámetros*. Los parámetros característicos del estado de un gas perfecto pueden ser una pareja cualquiera de valores de las tres magnitudes siguientes: el volumen V, la presión p y la temperatura T, puesto que el estado de una cantidad dada de gas perfecto se determina unívocamente por cualquier pareja de las que pueden formarse con las tres magnitudes antedichas (por ejemplo, con la presión p y la temperatura T).

*) Con esto tácitamente supusimos que las fuerzas exteriores no son de rozamiento, puesto que si lo fueran comunicarían calor al sistema.

El cambio de estado de un sistema se efectúa bajo la acción de agentes exteriores, entre los cuales no sólo puede figurar el trabajo ΔA que realizan las fuerzas externas, sino también la transferencia de cierta cantidad de calor ΔQ y otros. La transmisión de calor y el trabajo, como vimos anteriormente, son siempre equivalentes entre sí. Los experimentos realizados demuestran que, para todos los demás agentes, también se consigue establecer los equivalentes mecánicos correspondientes. Por medio de experimentos se demuestra asimismo que si un sistema, influenciado por agentes exteriores, pasa de un estado determinado *I* a otro estado determinado *II*, *cualquiera que sea el camino seguido en la transición, la suma de los equivalentes mecánicos de los agentes exteriores permanece invariable.*

Esta suma de los equivalentes mecánicos de los agentes exteriores $\Sigma \Delta A_i$ es la que determina la variación de la energía

$$U_{II} - U_I = k \sum_i \Delta A_i, \qquad (1)$$

donde U_I y U_{II} son respectivamente las energías del sistema correspondientes a los estados *I* y *II*, y k, un coeficiente de proporcionalidad.

Por lo antedicho vemos, que la *diferencia* entre las energías de los estados es la que tiene sentido físico, mientras que la energía de por sí únicamente se puede determinar cuando la correspondiente a uno de dichos estados se toma, convencionalmente, igual a cero (o se le atribuye un valor determinado cualquiera). Pero si en el sistema dado atribuimos a uno cualquiera de sus estados un valor determinado de la energía, por ejemplo, al estado *I* le atribuimos el valor U_I, la energía U_{II} del estado *II*, por la fórmula (1) será

$$U_{II} = U_I + k \sum_i \Delta A_i.$$

Pero como hemos dicho que $\sum_i \Delta A_i$ no depende del camino seguido para pasar del estado *I* al estado *II*. resultará, que para el estado *II* la energía tendrá también un valor determinado U_{II}. Esto quiere decir, que *la energía es una función unívoca del estado, o sea, una función que se define por los mismos parámetros que determinan el estado.* Si por cualquier circunstancia el sistema pasa primero del estado *I* al estado *II* y luego retorna al estado *I*, su energía toma *el valor inicial.* Por consiguiente, el principio de la conservación y variación de la energía, en su forma más general, puede formularse de la forma siguiente: *la variación de la energía de un sistema, al pasar de un estado a otro, es proporcional a la suma de los equivalentes mecánicos de todos los agentes exteriores que influyen en la transformación del sistema. Cuando se trata de una transformación cerrada,*

es decir, *si el sistema vuelve a su estado inicial, la suma de los equivalentes mecánicos de todos los agentes externos es igual a cero y, por consiguiente, la energía permanece constante.*

El principio de la conservación de la energía expresado de esta forma tan amplia, recibe el nombre de *primer principio de la Termodinámica.*

Como de hecho la transmisión de la energía por conductividad térmica juega un papel muy importante, destacaremos aquellos agentes que se reducen a comunicar una cantidad de calor ΔQ; en este caso, podemos escribir el primer principio de la Termodinámica de la forma siguiente:

$$\Delta U = k\Delta A + k'\Delta Q, \tag{2}$$

donde ΔU es la variación que experimenta la energía interna del sistema; ΔQ, la cantidad de calor que gana el sistema, y ΔA, la suma de los equivalentes mecánicos de los demás agentes exteriores. Si estos otros agentes se reducen a acciones mecánicas, ΔA representará el trabajo de las fuerzas externas aplicadas al sistema.

En vista de la equivalencia existente entre la cantidad de calor cedida y el trabajo, esta cantidad de calor ΔQ se puede medir en las mismas unidades que el trabajo (en ergios, julios, kgm, etc.); en estas mismas unidades se mide también la energía. Si todas las magnitudes que intervienen en la fórmula (2) se miden en las mismas unidades, ambos coeficientes k y k' se hacen iguales a la unidad y la fórmula (2) toma la forma:

$$\Delta U = \Delta A + \Delta Q. \tag{2a}$$

Considerando la variación de la energía interna como infinitamente pequeña, podemos escribir la ecuación (2a) en la forma

$$dU = dA + dQ. \tag{2b}$$

Como quiera que la energía U es función del estado y cuando la transformación es cerrada, su variación es igual a cero, tenemos que dU representa de por sí *una diferencial total.* Pero en todos aquellos casos en que se produce calentamiento, el trabajo realizado siguiendo un camino cerrado no es igual a cero. De donde se deduce, que dA no es en este caso una diferencial total. Pero entonces resulta, de (2b), que *la cantidad de calor cedida dQ tampoco es una diferencial total.*

De aquí deducimos, que ni el trabajo ni la cantidad de calor cedida pueden identificarse con la energía, pero tienen el sentido de que su suma determina las variaciones de aquélla.

Junto al trabajo ΔA que realizan las fuerzas exteriores aplicadas al sistema, se puede estudiar el trabajo $\Delta A'$ que realizan sus fuerzas propias aplicadas a los cuerpos externos. De acuerdo con la ter-

cera ley de Newton $\Delta A' = -\Delta A$. Incluyendo en la fórmula (2a) $\Delta A'$, la escribiremos así:

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta A'. \tag{3}$$

El primer principio de la Termodinámica, escrito de esta forma, afirma que *la cantidad de calor que se comunica al sistema se gasta en aumentar su energía interna y en el trabajo que realizan las fuerzas de dicho sistema aplicadas a cuerpos exteriores.*

El primer principio de la Termodinámica ha sido confirmado por los experimentos en que se basó el establecimiento de la equivalencia entre el calor y el trabajo, y, además, por el hecho de que un número extraordinariamente grande de deducciones sacadas de él coinciden con las observaciones prácticas.

Históricamente, el establecimiento del principio de la conservación de la energía (o primer principio de la Termodinámica) está relacionado con los fracasos en la realización de una máquina capaz de efectuar trabajo sin consumir ninguna forma de energía ni recibir calor exterior. En Termodinámica esta máquina se conoce con el nombre de móvil perpetuo (o «perpetuum mobile») de primera especie. Como hemos dicho, al volver el sistema al estado inicial, su energía toma el valor primitivo. Por esto, en las máquinas de funcionamiento periódico al final de cada ciclo $\Delta U = 0$. Estas máquinas únicamente pueden producir trabajo a expensas de la cantidad de calor ΔQ, o de otra energía cualquiera, que reciban de fuentes externas. Pero como la transmisión de calor lo es también de energía, podemos hablar en general de energía cedida y formular el principio de la conservación de la energía (o primer principio de la Termodinámica) de la forma siguiente: *la construcción de un móvil perpetuo de primera especie es imposible, es decir, no es posible construir un motor de funcionamiento periódico que produzca en cada ciclo una cantidad de trabajo mayor que la cantidad de energía que percibe del exterior.*

Al hablar del principio de la conservación de la energía tiene importancia indicar que pueden existir transformaciones de sistemas de un estado determinado I a otro estado diferente II, en los cuales la suma de los equivalentes mecánicos de los agentes exteriores resulte igual a cero. En estos casos, por la fórmula (1), las energías de ambos estados, I y II, deben ser iguales entre sí, es decir, $U_{II} = U_I$. Esto significa, que en el sistema se desarrolla un proceso en el cual sus parámetros varían, mientras la energía permanece constante. Puede servir de ejemplo la expansión isotérmica de un gas perfecto, en la cual, como la temperatura del gas no varía, su energía tampoco variará. No obstante, los parámetros que definen el estado de dicho gas (el volumen V y la presión p) cambian. Al ocurrir esto se realiza un trabajo externo y el gas recibe cierta can-

tidad de calor, pero la suma del trabajo exterior y del equivalente mecánico del calor recibido es igual a cero.

Cuando el sistema está aislado, los agentes exteriores no actúan sobre él. Pero aún en este caso, a expensas de la acción mutua entre las distintas partes del sistema, en él pueden desarrollarse procesos, y algunas formas de la energía (cinética, potencial, etc.) pueden variar. Pero la energía total del sistema se conserva invariable. Como ejemplo, examinemos un sistema de cuerpos aislados que tenga una reserva determinada de energía cinética y potencial. Supongamos, que, como resultado de la acción mutua entre los cuerpos que forman el sistema, se realiza un trabajo para vencer las fuerzas de rozamiento. En este caso, como indicábamos en el § 28, la energía mecánica del sistema, suma de las energías potenciales y cinéticas de los cuerpos, disminuirá. Pero, a consecuencia del trabajo realizado para vencer las fuerzas de rozamiento, los cuerpos se calientan y su energía interna (térmica) aumenta. Por lo tanto, la energía total del sistema permanece invariable y lo único que ocurre es que algunas de sus formas se transforman en otras.

El valor del equivalente mecánico del calor fue deducido teóricamente por Robert Mayer (1814-1878), W. Thomson (1824-1907), R. Clausius (1822-1888) y muchos otros físicos.

El principio de la conservación de la energía se vaticinó hace mucho tiempo. En 1748, M. V. Lomonósov, al formular el principio de la conservación de la materia, enunció también el principio de la conservación del movimiento en la naturaleza. He aquí lo que él escribió: «En todos los cambios que tienen lugar en la Naturaleza todo lo que pierde un cuerpo lo gana otro... Esta ley natural es general y se extiende a las reglas propias del movimiento; porque cuando un cuerpo, con su misma fuerza, hace que se mueva otro, pierde tanta fuerza como le comunica al que recibe el movimiento». La formulación cuantitativa del principio de la conservación de la energía fue dada 100 años más tarde por Robert Mayer (1814-1878) y Helmholtz (1821-1894) después de haber sido descubiertos muchos procesos relacionados con transformaciones mutuas de diferentes formas de la energía. Mayer descubrió el principio de la conservación de la energía como resultado de razonamientos generales, basados en observaciones fisiológicas. Subrayó el hecho de que formas de energía cualitativamente distintas se transforman unas en otras, y de que estas transformaciones se realizan siempre en proporciones cuantitativas determinadas (equivalentes). Helmholtz introdujo el concepto de energía cinética y potencial y, basándose en el estudio de un sistema en el cual actuaban fuerzas centrales de atracción y de repulsión, estableció que la suma de las energías cinética y potencial de un sistema cerrado es una cantidad constante. De esta forma, según Helmholtz, el principio de la conservación de la energía se limitaba a tener un carácter mecanicista.

El carácter general del principio de la conservación y transformación de la energía y su importancia extraordinaria para las ciencias naturales fueron puestos de manifiesto por Engels. El movimiento, entendiendo por tal todo cambio en general, es la forma de existencia de la materia. El movimiento, en este sentido tan general, no puede ni desaparecer ni crearse de la nada; en la naturaleza sólo pueden ocurrir cambios en la forma de existencia de la materia, sus transformaciones, que tienen lugar en proporciones cuantitativas determinadas. Este es el enunciado general de la ley de la conservación, sin relacionarla con su formulación física, la cual puede variar de acuerdo con los nuevos descubrimientos. Engels escribía: «...toda forma de movimiento resultó tener la posibilidad y la necesidad de convertirse en otra forma cualquiera de movimiento. Llegada a esta forma, la ley alcanza su última expresión. Por medio de nuevos descubrimientos podremos proporcionarle nuevas confirmaciones y enriquecer su contenido. Pero a la propia ley, tal como queda expuesta aquí, nada podremos añadirle»*).

El principio de la conservación y transformación de la energía permite también explicar más profundamente la naturaleza de la magnitud física que denominamos trabajo. Como hemos visto, la energía del sistema puede variar a costa del trabajo realizado. Por consiguiente, el trabajo es la medida de la variación de la energía. Este sentido del trabajo fue señalado por Engels, el cual escribía: «...el trabajo es la variación de la forma del movimiento considerada desde el punto de vista cuantitativo»**).

El trabajo y «la cantidad de calor cedida», aunque son medidas de la variación de la energía, no pueden identificarse con ella. Efectivamente, la energía caracteriza al sistema, es *función unívoca del estado del sistema* (véase el § 26). El sistema posee una energía determinada incluso cuando en él no se desarrollan ningunas variaciones. El concepto de trabajo y de «cantidad de calor cedida», por el contrario, únicamente tienen sentido cuando se realiza un proceso tendiente a variar el estado del sistema, como resultado del cual varía su energía. Ni el trabajo ni la «cantidad de calor cedida» son funciones del estado del sistema.

A pesar de que una vez establecida la equivalencia entre la cantidad de calor cedida y el trabajo (equivalente mecánico del calor) la teoría del calórico fue abandonada por completo, aún se emplea la palabra «calor» en el sentido que antes tenía. Así, por una parte, «calor» se emplea en el sentido de «cantidad de calor cedida» que, como hemos visto, es equivalente al trabajo y, por consiguiente, medida de la variación de la energía, y por otra parte, por «calor», contenido en un cuerpo, se entiende la energía térmica del mismo, de la cual hablaremos más adelante. Este empleo multiforme de la palabra «calor» puede inducir fácilmente a confusiones, que pueden agravarse debido a que, según la errónea teoría del calórico, a veces se entiende que la cantidad de «calor» contenida en el cuerpo se determina por la «cantidad de calor cedida». La falsedad de esta afirmación se deduce indudablemente del hecho de que la cantidad de calor que hay que comunicarle a un cuerpo para que pase de un estado inicial determinado *I* a otro estado perfectamente determinado *II*, puede ser diferente

*) F. Engels, *Dialéctica de la Naturaleza*, ed. en ruso, 1950, pág. 178.
**) Idem, pág. 70.

y depende de la forma en que se realice la transición. Tomemos, por ejemplo, 1 mol de gas perfecto, que debe pasar del estado I, caracterizado por la presión p_1 y la temperatura T_1, al estado II, cuyas características son una presión mayor p_2 y una temperatura más elevada T_2. Este paso podemos realizarlo de diferentes formas. Por ejemplo: 1) calentando el gas hasta la temperatura T_2, mientras se mantiene constante la presión p_1 [para lo cual comunicaremos al gas una cantidad de calor $\Delta Q = C_p\,(T_2 - T_1)$, donde C_p es el calor molecular del gas a presión constante], y comprimiéndolo después isotérmicamente hasta la presión p_2; 2) calentando el gas a volumen constante hasta la temperatura T_2 [para lo cual le comunicaremos la cantidad de calor $\Delta Q' = C_V\,(T_2 - T_1)$, donde C_V es el calor molecular a volumen constante], y comprimiéndolo después isotérmicamente hasta la presión p_2. En ambos casos el gas habrá pasado del estado I al estado, perfectamente determinado, II, pero las cantidades de calor comunicadas al cuerpo, ΔQ y $\Delta Q'$, no serán iguales entre sí, puesto que $C_p \neq C_V$.

Cuando el gas se calienta a volumen constante, no se trata más que de comunicarle una cantidad de calor, la cual se invierte totalmente en aumentar su energía interna. Pero cuando el calentamiento se efectúa a presión constante, el proceso tiene un carácter más complicado, puesto que al mismo tiempo que se comunica la cantidad de calor se realiza el trabajo producido por la expansión del gas.*) Es decir, la variación de la energía interna del cuerpo sólo puede calcularse unívocamente cuando se tienen en cuenta a la vez el trabajo y la cantidad de calor cedida.

De aquí se deduce claramente que carece de sentido hablar de la «cantidad de calor contenida» en un cuerpo, *determinándola por la «cantidad de calor cedida»*.

El grado de calentamiento de los cuerpos, caracterizado por la temperatura, depende de la intensidad del movimiento desordenado de sus moléculas.

Como vimos en el § 48, la temperatura T del cuerpo, por la escala de Kelvin, se determina unívocamente por la energía media $\overline{w}_0$ correspondiente a un grado de libertad de sus moléculas: $T = \frac{2}{k}\overline{w}_0$, donde k es la constante de Boltzmann. La energía total del movimiento desordenado de las moléculas (de traslación, rotación y vibratorio), junto con las posibles formas de la energía no mecánica potencial, constituyo la reserva de energía interna del cuerpo. La suma de la energía de todas las formas del movimiento *desordenado* de las partículas suele denominarse a veces *energía calorífica* del cuerpo dado. Sin embargo, la energía calorífica sólo podría calcularse separadamente de la energía interna total del cuerpo partiendo de una teoría cinético-molecular suficientemente completa del cuerpo dado, que tuviera en cuenta todas las formas posibles de los movimientos desordenados de sus partículas y la relación que existe entre estos movimientos y la temperatura. Como indicamos en el § 49, esta teoría no puede basarse exclusivamente en los conceptos de la Mecánica clásica, sino que debe tener en cuenta el carácter cuántico del movimiento de las moléculas.

Este cálculo separado de la energía calorífica puede efectuarse únicamente en los casos idealizados más simples. Así, como vimos en el § 48, en los gases perfectos la energía potencial entre sus partículas es igual a cero. Por consiguiente, en un gas de este tipo la energía calorífica coincide con su energía interna. Veamos otro ejemplo. Tomemos un gas diatómico idealizado, cuyas moléculas, independientemente de la temperatura, tengan cinco grados de libertad y cumplan el principio de la equipartición de la energía entre dichos

*) El calor de un cuerpo a presión constante se llama *entalpía* y se designa con la letra I:

$$I = U + APV$$

donde U es la energía interna; A, el equivalente térmico del trabajo; P, la presión, y V, el volumen (*N. del R.*).

grados de libertad. Para este gas la energía calorífica será igual a $\frac{5}{2} kTN$, donde N es el número de moléculas del gas. Pero para los cuerpos reales no es posible hacer este cálculo separado de la energía calorífica. Por esta razón, en adelante nos limitaremos a estudiar la energía interna total de los cuerpos, sin determinar las diferentes formas de energía de que consta.

La equivalencia entre la cantidad de calor cedida y el trabajo, junto con sus particularidades específicas, se ponen de manifiesto con especial claridad cuando se examinan desde el punto de vista cinético-molecular algunos fenómenos aislados. Supongamos, por ejemplo, que un martillo descarga su golpe sobre un muelle y lo comprime. En este caso la energía cinética del movimiento *ordenado* del martillo, como resultado del trabajo realizado por las fuerzas elásticas, se convierte en energía potencial del muelle comprimido. Veamos otro ejemplo: una cantidad determinada de gas se calienta $\Delta T°$ por conductividad térmica, al ponerse en contacto con otra cantidad de gas cuya temperatura es más elevada. Este proceso, desde el punto de vista macroscópico, se reduce a que el gas más caliente cede cierta cantidad de calor al más frío, y desde el punto de vista cinético-molecular, es un proceso de igualación de las energías cinéticas medias del movimiento *desordenado* de las moléculas de ambos gases. Más adelante volveremos a ocuparnos de estas peculiaridades de la transmisión de energía mediante la realización de trabajo (como resultado de la existencia de un movimiento ordenado) y por medio de la transferencia de calor (como resultado de la existencia del movimiento desordenado de las moléculas).

Tiene importancia señalar que al medir la cantidad de calor cedida por medio de las cantidades equivalentes de trabajo realizado quedó establecido que los calores específicos de los cuerpos, y entre ellos el agua, no son magnitudes constantes por completo, sino que dependen hasta cierto punto de la temperatura. Por esto, la «cantidad de calor cedida» ΔQ, determinada por la correlación (1)

$$\Delta Q = cm\,\Delta T,$$

no puede servir por sí sola para medir la energía de un sistema. Esta medida podría utilizarse solamente después de establecer los equivalentes mecánicos para cada intervalo de temperaturas ΔT y de determinar de qué forma el calor específico depende de la temperatura T. El trabajo mecánico es siempre la «medida primaria» de la variación de la energía de un sistema. Esto confirma una vez más la opinión de Engels, citada en la pág. 296 de que «el trabajo es la variación de la forma del movimiento considerada desde el punto de vista cuantitativo». *).

Como quiera que el calor específico del agua, lo mismo que el de todos los demás cuerpos, depende de la temperatura, es necesario concretar la definición de caloría. En la actualidad se admite, que caloría es la cantidad de calor que, a presión constante, hay que comunicar a 1 g de agua para elevar su temperatura desde 19,5° C hasta 20,5° C.

§ 69. Transformaciones cerradas (ciclos). Al estudiar un proceso cualquiera desde el punto de vista de la Termodinámica podemos desentendernos de las substancias que constituyen el sistema, pero necesitamos saber cuántas y cuáles son las magnitudes físicas que pueden determinar unívocamente el estado en que se encuentra dicho sistema.

Las magnitudes que sirven para determinar el estado de un sistema, y que pueden variar influenciadas por causas exteriores, como

*) F. Engels, *Dialéctica de la Naturaleza*, ed. en ruso, 1950, pág. 70.

dijimos anteriormente, se llaman *parámetros*. La cantidad de parámetros necesaria para determinar unívocamente el estado de un sistema depende de su grado de complejidad. En Termodinámica, para establecer el grado de complejidad de un sistema se introduce el concepto de *fase*. Se entiende por fase todo cuerpo físico homogéneo o conjunto de cuerpos idénticos y físicamente homogéneos. Por ejemplo, un sistema formado por agua, sobre la que hay vapor de agua saturado, es un sistema de dos fases: una fase es el agua y otra el vapor saturado. De la misma forma, si en el agua flotan trozos de hielo tendremos también un sistema de dos fases: una fase será el agua y otra el conjunto de los trozos de hielo.

El sistema más simple es el formado por una cantidad determinada de gas perfecto; éste será un sistema monofásico. Los parámetros que determinan unívocamente el estado de este sistema pueden ser dos de las magnitudes siguientes: el volumen V, la presión p y la temperatura T (la masa del gas m es un dato del problema y por lo tanto no es un parámetro en este caso). Las magnitudes V, p y T están relacionadas entre sí por la ecuación de estado, que para los gases perfectos es la fórmula de Mendeléiev-Clapeyron.

Una cuestión muy importante es saber si el sistema dado está *en equilibrio o en desequilibrio*. Se dice que un sistema se encuentra en estado de equilibrio cuando los parámetros que lo caracterizan tienen unos valores determinados, que permanecen invariables todo el tiempo necesario, mientras no influyan sobre ellos causas exteriores. Si estas condiciones no se cumplen, el sistema se encuentra en estado de desequilibrio. Citaremos algunos ejemplos: un sistema formado por el líquido y el vapor saturado contenidos en un recipiente de volumen dado V, que tenga todas sus partes a una misma temperatura T, se encontrará en estado de equilibrio; aquí todas las partes del sistema se encuentran a una misma presión. De esta forma p y T, lo mismo que los demás parámetros (cantidades relativas de líquido y de vapor saturado), tienen para este sistema valores determinados permanentes e invariables con el tiempo. Este mismo sistema, pero con la temperatura del líquido diferente de la del vapor, se encontrará en estado de desequilibrio, puesto que la magnitud T no tendrá para él un valor determinado y las cantidades relativas de líquido y gas variarán. En calidad de otro ejemplo de sistema en estado de desequilibrio puede citarse una varilla metálica cuyos extremos se mantienen desde fuera a temperaturas diferentes. En este caso, la temperatura de cada punto dado de la varilla será constante (régimen estacionario), pero, en primer lugar, esta constancia sólo es posible mientras existan causas externas que mantengan los extremos de la varilla a las temperaturas dadas y, en segundo lugar, la temperatura de las diversas partes de la varilla es distinta.

El estado de un sistema puede representarse gráficamente por un punto (punto figurativo) tomando sobre los ejes de coordenadas los valores de los parámetros que caracterizan dicho sistema. Por ejemplo, si el estado del sistema se caracteriza por su volumen V y la presión p, tomando como abscisas los volúmenes y como ordenadas las presiones, tendremos que el estado del sistema caracterizado por los valores de p y V dados estará representado por el punto A (fig. 167), cuyas coordenadas son las correspondientes a p y V. Con un punto

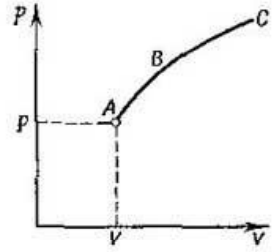


Fig. 167. Todo estado de equilibrio se representa por un punto. Las transformaciones equilibradas se representan por una curva.

solamente pueden representarse los estados de equilibrio del sistema, puesto que los estados de desequilibrio no corresponden a valores determinados de los parámetros.

Toda transformación que se cumpla en un sistema está siempre relacionada con una serie de estados de desequilibrio. Pero podemos figurarnos una transformación que se realice de tal forma, que, en cada instante, cada uno de sus parámetros tenga un valor determinado y que las variaciones de estos parámetros con el tiempo sean tan lentas que, durante un pequeño espacio de tiempo Δt tomado arbitrariamente, el sistema pueda considerarse en equilibrio. *Las transformaciones que se efectúan infinitamente despacio* se denominan *equilibradas y pueden considerarse integradas por una serie de estados de equilibrio sucesivos*. Hablando rigurosamente, ninguna transformación real puede ser equilibrada, pero cuanto más despacio se cumpla, tanto más se aproximará a serlo. La transformación equilibrada se representa gráficamente por una curva continua (la curva ABC de la fig. 167).

Se dice que *una transformación es reversible cuando puede realizarse en ambas direcciones, pero si se cumple primero en un sentido y después en el contrario el sistema deberá volver a su estado inicial, sin que ocurra variación alguna en los cuerpos que lo rodean*. Toda transformación equilibrada es reversible, puesto que está integrada por una serie continua de estados de equilibrio, los cuales pueden sucederse unos a otros tanto en un sentido como en el contrario. Las transformaciones desequilibradas son siempre irreversibles, de donde se deduce, que las transformaciones reales, rigurosamente hablando, también son siempre irreversibles, aunque pueden aproximarse a

las reversibles cuando se desarrollan infinitamente despacio. A continuación estudiaremos con más detalle algunos casos de transformaciones reversibles e irreversibles.

Figurémonos una transformación consistente en la variación del volumen V, la presión p y la temperatura T, de una cantidad dada de substancia. Determinemos el trabajo que se realiza el pasar del estado C_1 al estado C_2 (fig. 168), considerando que la transfor-

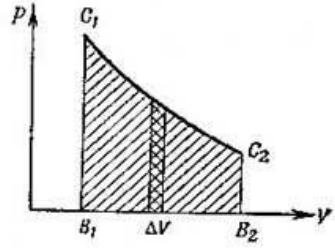


Fig. 168. El trabajo de la expansión está representado por el área de la figura $C_1C_2B_2B_1$.

mación se efectúa infinitamente despacio, es decir, que se trata de una transformación equilibrada.

En el § 49 indicamos que cuando el gas se expansiona a presión constante p realiza un trabajo

$$A = p\,(V_2 - V_1), \tag{1}$$

donde $V_2 - V_1$ es la variación del volumen. Esta expresión es justa no sólo para la expansión de un gas, sino para la de cualquier substancia, que llamaremos agente de transformación, siempre que la presión p permanezca constante durante la expansión.

Pero ahora vamos a examinar el caso más general, en el que la presión no permanece constante. Por esto, comenzaremos por estudiar previamente una variación infinitesimal del volumen ΔV, para la cual la presión p puede considerarse constante; en este caso, el trabajo elemental ΔA se realiza por una expansión también infinitesimal igual a

$$\Delta A = p\Delta V. \tag{2}$$

Este trabajo elemental ΔA se representa gráficamente por el área de la columna rayada en cruz de la figura 168. La presión p es numéricamente igual a la fuerza aplicada por parte del agente de transformación a la unidad de superficie de las paredes del recipiente. Por esto, el trabajo ΔA de la fórmula (2) representa el que realizan las fuerzas aplicadas por parte del sistema a los cuerpos exteriores, es decir, el trabajo que en la fórmula (3) del § 68 se designó por $\Delta A'$. Poniendo este valor de ΔA en dicha fórmula (3) del § 68, obtenemos la expresión del principio de la conservación de la energía referido al proceso elemental dado:

$$\Delta Q = \Delta U + p\Delta V, \tag{3}$$

donde ΔQ es la cantidad de calor cedida al agente de transformación y ΔU, la variación de su energía interna. Si la substancia se expande ($\Delta V > 0$), el trabajo será positivo, es decir, $\Delta A > 0$; este trabajo se realiza a costa de la cantidad de calor cedida desde el exterior al agente de transformación ($\Delta Q > 0$), o de la disminución de la energía interna de la substancia U, o a costa de estas dos fuentes a la vez. Cuando el volumen del agente de transformación disminuye ($\Delta V < 0$), lo que puede ocurrir si existen fuerzas exteriores que lo comprimen, el trabajo $\Delta A = p\Delta V$ será negativo; esto conduce a que el agente de transformación ceda a los cuerpos exteriores cierta cantidad de calor ($\Delta Q < 0$), o a que aumente la reserva de energía interna del cuerpo U, o a que estos dos procesos se realicen simultáneamente.

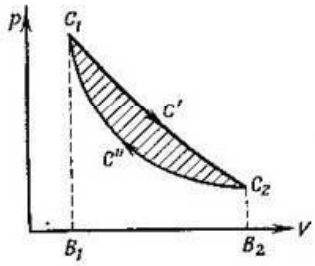


Fig. 169. El trabajo realizado durante un ciclo es igual al área de la figura comprendida dentro de la curva cerrada.

El trabajo total realizado al evolucionar el estado de la substancia desde el punto C_1 al punto C_2, será igual a la suma de los trabajos:

$$A = \sum \Delta A = \sum p\Delta V; \qquad (4)$$

este trabajo se representa gráficamente por el área rayada $C_1C_2B_2B_1$, de la fig. 168.

Supongamos que el agente de transformación, que al expansionarse pasó del estado C_1, al estado C_2 (fig. 169), después, por haber sido sometido a presión, vuelve de nuevo al estado C_1. Sea la curva $C_1C'P_2$ la representación del proceso de expansión. La compresión puede realizarse a lo largo de esta misma curva $C_2C'C_1$, pero recorriéndola en sentido contrario. Pero también puede efectuarse dicha compresión por otro camino, por ejemplo, por el que representa la curva inferior $C_2C''C_1$, para lo cual, mientras se comprime la substancia habrá que mantenerla a otra temperatura T_2 diferente de la T_1 de la carrera de expansión. Para todas las substancias que tienen coeficiente de dilatación cúbica positivo, $T_2 < T_1$, puesto que para dichas substancias, a volúmenes iguales, las mayores presiones se conseguirán cuando las temperaturas sean más elevadas. En adelante estudiaremos únicamente este tipo de substancias.

Todo el proceso representado por la curva cerrada $C_1C'C_2C''C_1$ recibe el nombre de *transformación cerrada o ciclo*. Calculemos ahora la suma de los trabajos realizados durante este ciclo.

El trabajo A_1 realizado por la substancia al expansionarse, se representa por el área de la figura $C_1C'C_2B_2B_1$; este trabajo es positivo, es decir, $A_1 > 0$.

El trabajo A_2, realizado durante la compresión, se representa por el área de la figura $C_1C''C_2B_2B_1$; este trabajo es negativo, es decir, $A_2 < 0$.

La suma de estos trabajos

$$A = A_1 + A_2$$

será igual a *la diferencia de las áreas* de las figuras $C_1C'C_2B_2B_1$ y $C_1C''C_2B_2B_1$, de donde se deduce que es igual al área rayada de la figura 169, contenida dentro de la curva $C_1C'C_2C''C_1$. Este trabajo es también positivo.

Llamando U_1 a la energía interna de la substancia en el estado C_1; U_2, a la correspondiente al estado C_2; Q_1, a la cantidad de calor *cedida a la substancia* (*agente de transformación*) durante la expansión $C_1C'C_2$; y Q_2, a la *cedida a esta misma substancia* durante la compresión $C_2C''C_1$ (durante la expansión la substancia *recibe* una cantidad de calor $Q_1 > 0$, mientras que durante la compresión *cede* una cantidad de calor $Q_2 > 0$, es decir, recibe una cantidad de calor igual a $-Q_2$), tendremos, que por el primer principio de la Termodinámica

$$Q_1 = U_2 - U_1 + A_1; \qquad -Q_2 = U_1 - U_2 + A_2.$$

Sumando miembro a miembro estas igualdades obtenemos que el trabajo A, realizado por el agente de transformación contra las fuerzas exteriores durante el ciclo, es igual a

$$A = A_1 + A_2 = Q_1 - Q_2. \tag{5}$$

Este trabajo del ciclo, representado en la fig. 169, como ya dijimos, es positivo. Por lo tanto, como resultado del proceso representado por el ciclo $C_1C'C_2C''C_1$ tendremos: que la substancia recibió del exterior una cantidad de calor Q_1 y cedió a su vez la cantidad de calor Q_2, menor que Q_1; a expensas de la diferencia entre estos valores de las cantidades de calor, $Q_1 - Q_2$, la substancia realizó un trabajo A contra las fuerzas exteriores. *Los ciclos* de este tipo se llaman *directos*. Como quiera que a costa de la cantidad de calor comunicada, $Q_1 - Q_2$, se realizó un trabajo A, este proceso, representado por el ciclo directo, es el *de una máquina térmica*.

Vemos, pues, que no todo el calor Q_1, comunicado a la substancia durante la primera mitad de esta transformación cerrada, se convierte en trabajo, puesto que una parte del calor, Q_2, vuelve a cederse al exterior. Como el calor únicamente puede pasar de modo espontá-

neo de un cuerpo más caliente a otro más frío, lógicamente tendrá que haber un cuerpo más caliente que le comunique a la substancia la cantidad de calor Q_1 (foco caliente) y otro más frío al que la substancia pueda cederle la cantidad de calor Q_2 (foco frío).

Cuando se obtiene trabajo a costa de la cantidad de calor comunicada, naturalmente, se cumple el principio de la conservación de la energía, es decir, la diferencia entre los valores de las cantidades de calor absorbida y cedida, $Q_1 - Q_2$, será igual al trabajo realizado A. Desde el punto de vista práctico es interesante saber, qué parte del calor tomado del foco caliente, Q_1, se convierte en trabajo A, puesto que la cantidad de calor Q_2, que se

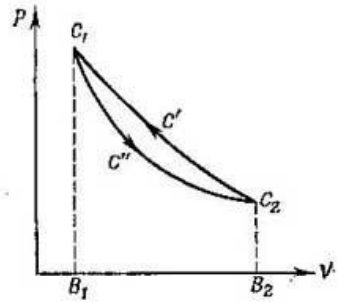


Fig. 170. Ciclo inverso.

cede al foco frío, no se aprovecha. Por esto es lo que se estudia el rendimiento, coeficiente económico o eficiencia

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}. \qquad (6)$$

Para determinar el rendimiento hay que examinar un ciclo concreto y calcular los trabajos que se producen en él. Esto es precisamente lo que haremos en el § 73.

Pero ahora comparemos un ciclo *inverso* con el representado en la fig. 169. En *el ciclo inverso* (fig. 170), la expansión de la substancia se efectúa por la curva $C_1C''C_2$, realizando un trabajo positivo A_1, numéricamente igual al área de la figura $C_1C''C_2B_2B_1$. La compresión se lleva a cabo por la curva $C_2C'C_1$, realizando un trabajo negativo A_2, numéricamente igual al área de la figura $C_1C'C_2B_2B_1$. El trabajo total $A' = A_1 + A_2$ es *negativo*, puesto que el valor absoluto de A_2 es mayor que el de A_1. El valor numérico de este trabajo total viene representado por el área comprendida dentro de la curva cerrada $C_1C'C_2C''C_1$. El trabajo realizado por las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema será positivo, $A = -A'$.

Supongamos que durante la expansión la substancia absorbe del exterior una cantidad de calor Q_2, mientras que durante la compresión cede una cantidad de calor Q_1. En este caso, todo el proceso se reducirá a lo siguiente: las fuerzas aplicadas al sistema, por parte de los cuerpos exteriores, realizan un trabajo positivo A y el sistema recibe del exterior una cantidad de calor Q_2 y cede una cantidad de calor Q_1, mayor que Q_2. La cantidad de calor cedida Q_1 será igual a la

suma del calor recibido Q_2 y el trabajo realizado por las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema.

$$Q_1 = Q_2 + A.$$

Una máquina que funcione por este ciclo puede servir *de refrigerador*, puesto que la expansión $C_1C''C_2$ se realiza a temperatura más baja que la compresión $C_2C'C_1$ y, por lo tanto, la cantidad de calor Q_2 puede tomarse de un cuerpo más frío, y la Q_1 cederse a uno más caliente. La máquina refrigerante funciona a costa de las fuerzas exteriores y «transporta» cierta cantidad de calor Q_2 desde un cuerpo más frío (enfriándolo aún más) a otro más caliente.

§ 70. Transformaciones adiabáticas. Ecuación de la adiabática. Se dice que *una transformación* del estado de un sistema *es adiabática o se realiza por vía adiabática* cuando durante ella *no existe intercambio de calor entre dicho sistema y los cuerpos que lo rodean*. Durante la transformación adiabática el sistema ni recibe calor del exterior ni lo cede a los cuerpos circundantes. Por lo tanto, para que pueda realizarse una transformación adiabática, el sistema debe estar rodeado de paredes que no conduzcan en absoluto el calor. Pero como este tipo de paredes no existe, las transformaciones reales solamente pueden aproximarse más o menos a la adiabática. Prácticamente se aproximan a ella las transformaciones que se efectúan tan rápidamente que no dan tiempo a que se produzca intercambio de calor apreciable con los cuerpos exteriores.

El carácter adiabático de una transformación se expresa matemáticamente por $\Delta Q = 0$, de donde el principio de la conservación de la energía tomará en este caso la forma:

$$\Delta U + \Delta A = 0. \tag{1}$$

En las transformaciones adiabáticas el trabajo ΔA puede producirse exclusivamente a costa de la energía interna del sistema. Si el sistema realiza un trabajo positivo ($\Delta A > 0$) su energía interna disminuye; si, por el contrario, son las fuerzas exteriores las que efectúan el trabajo sobre el sistema ($\Delta A < 0$), la energía interna de éste aumenta.

Examinemos la expansión adiabática de un gas perfecto. El trabajo ΔA, como siempre, será

$$\Delta A = p\Delta V, \tag{2}$$

donde p es la presión del gas y ΔV la variación que experimenta su volumen. La energía interna del gas perfecto, como indicamos en el § 48, es igual a la energía cinética del movimiento de sus moléculas; de donde la energía interna de un mol de dicho gas será

$$U = \frac{i}{2} kT \cdot N = \frac{i}{2} RT,$$

donde k es la constante de Boltzmann; N, el número de Avogadro, y R, la constante de los gases. Introduciendo el calor específico molar del gas a volumen constante $C_V = \frac{i}{2} R$, tendremos que

$$U = C_V \cdot T,$$

de donde la variación de la energía interna del gas perfecto será

$$\Delta U = C_V \cdot \Delta T. \tag{3}$$

Poniendo en (1) el valor de ΔA, según (2), y el de ΔU, según (3), obtenemos la expresión del primer principio de la Termodinámica referido a un mol de gas perfecto:

$$C_V \Delta T + p \Delta V_0 = 0. \tag{4}$$

Por la correlación (4) tenemos que durante la expansión adiabática ($\Delta V_0 > 0$) el gas se enfría ($\Delta T < 0$) y durante la compresión adiabática ($\Delta V_0 < 0$) se calienta ($\Delta T > 0$). Por lo tanto, cuando el volumen del gas varía por vía adiabática su temperatura no permanece constante. El cálculo correspondiente (véase la letra pequeña de la pág. 308) nos permite relacionar esta variación de la temperatura T del gas con la variación que experimenta su volumen V. Suponiendo que el gas, cuando ocupaba el volumen V_1, tenía la temperatura T_1, al variar por vía adiabática el volumen hasta un valor V_2 la temperatura tomará el valor T_2, y se verificará la correlación seguiente:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1}, \tag{5}$$

donde $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$, es decir, que γ es la relación de los calores específicos, a presión y volumen constante, del gas (véase la letra pequeña de la pág. 308).

Aplicando la fórmula de Mendeléiev-Clapeyron, que se cumple para cada estado concreto del gas, obtenemos

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{T_1}{T_2};$$

poniendo este valor de $\frac{V_1}{V_2}$ en (5), tendremos

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}}. \tag{6}$$

La fórmula (6), que por su sentido es idéntica a la (5), relaciona las variaciones que experimenta la temperatura, durante el proceso adiabático, con las variaciones de la presión del gas.

Comparemos ahora la transformación adiabática del estado del gas con su transformación isoterma (o isotérmica). Para que la expan-

sión del gas pueda realizarse por vía *isoterma*, es decir, a temperatura constante, desde el exterior hay que comunicarle calor constantemente, para compensar así la caída de la energía interna que se produce cuando el gas realiza un trabajo positivo. Por el contrario, para que la compresión del gas se haga por vía isoterma, éste debe ceder calor constantemente, para que no aumenten ni su reserva de energía interna ni su temperatura. Una transformación isoterma sólo es posible cuando existe un intercambio de calor idealmente perfecto entre el gas y los cuerpos exteriores. Prácticamente es posible aproximarse al proceso isotermo haciendo que la transformación transcurra tan despacio, que la temperatura del gas tenga tiempo de igualarse con la de los cuerpos exteriores que lo rodean.

Por lo tanto tenemos:

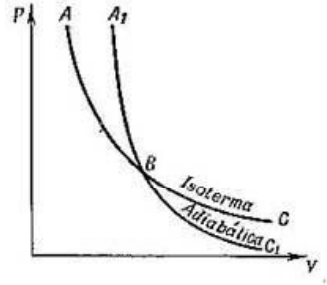


Fig. 171. La pendiente de la adiabática es mayor que la de la isoterma.

1) que *la variación del volumen del gas por vía isoterma* es posible siempre que exista un intercambio de calor idealmente perfecto con los cuerpos exteriores; el trabajo realizado al expansionarse el gas, por la fuerza que éste ejerce sobre los cuerpos externos, se efectúa a costa del calor absorbido del exterior; el trabajo que realizan las fuerzas externas durante la compresión, va acompañado de la transmisión de calor correspondiente, que en este caso cede el gas a los cuerpos exteriores;

2) que *la variación del volumen del gas por vía adiabática* es posible si existe un aislamiento térmico perfecto; el trabajo del gas, en este caso, se realiza a costa de su energía interna; durante la expansión se enfría el gas y durante la compresión se calienta.

La variación isoterma del estado del gas cumple la ley de Boyle-Mariotte:

$$pV = \text{const}$$

para la cantidad de gas dada. Supongamos que esta dependencia está representada en la fig. 171 por la isoterma ABC. Si partiendo de un estado determinado B comenzamos a comprimir el gas por vía adiabática, su temperatura, de acuerdo con lo dicho anteriormente, comenzará a elevarse; gracias a esto, todos los valores numéricos del producto pV serán mayores que en el caso de la compresión isoterma; de aquí se deduce, que la compresión adiabática estará representada por una curva BA_1, cuya elevación será más brusca que la de la rama de la isoterma BA. De la misma forma,

si partiendo del punto B comenzamos a provocar la expansión del gas por vía adiabática, su temperatura empezará a descender y, a consecuencia de esto, la expansión estará representada por una curva BC_1, cuyo descenso será más brusco que el de la rama BC de la isoterma. La curva A_1BC_1 se denomina *adiabática.* Por lo tanto, *cuando el volumen del gas varía por vía adiabática no se cumple la ley de Boyle-Mariotte.* La curva que representa la expansión adiabática del gas (adiabática) es más pendiente que la que representa la variación isoterma del volumen del mismo (isoterma).

La ecuación de la adiabática puede obtenerse partiendo de las expresiones (5) y (6); igualando entre sí sus segundos miembros, tenemos

$$\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}},$$

de donde

$$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma}, \qquad (7)$$

es decir, que cuando la variación del volumen es adiabática, la presión p del gas varía en razón inversa a la potencia γ del volumen. Por la fórmula (7) tenemos, que para las transformaciones adiabáticas

$$pV^{\gamma} = \text{const.} \qquad (7a)$$

Esta fórmula (7a), que en las transformaciones adiabáticas hace las veces de ley de Boyle-Mariotte, recibe el nombre *de fórmula de Poisson.*

En la práctica las transformaciones no tienen un carácter puramente adiabático o isotérmico, ya que no es posible conseguir que sean perfectos ni el aislamiento térmico ni el intercambio de calor. Las transformaciones reales tienen un carácter intermedio entre el isotérmico y el adiabático. Un caso particular de las transformaciones reales son las llamadas transformaciones *politrópicas*, a las que son aplicables las fórmulas de las adiabáticas con la única diferencia de que γ tiene un valor intermedio entre C_p/C_V y la unidad. En este caso γ recibe el nombre *de exponente politrópico.*

Cuanto más se aproxima el exponente politrópico al valor de C_p/C_V, tanto mayor es la aproximación del proceso al adiabático; cuanto más se aproxima el exponente politrópico a la unidad, tanto mayor es la aproximación del proceso al isotérmico.

La expresión (5) puede deducirse escribiendo el primer principio de la Termodinámica (4) en forma diferencial:

$$C_V\,dT + p\,dV_0 = 0, \text{ de donde } p\,dV_0 = -C_V\,dT.$$

Dividiendo miembro a miembro esta igualdad por la que expresa el estado de los gases perfectos,

$$pV_0 = RT,$$

obtenemos

$$\frac{dV_0}{V_0} = -\frac{C_V}{R}\cdot\frac{dT}{T}, \quad \text{o} \quad \frac{R}{C_V}\cdot\frac{dV_0}{V_0} = -\frac{dT}{T}.$$

Como R/C_V es una magnitud constante, la última igualdad puede escribirse en la forma:

$$d\left(\frac{R}{C_V}\ln V_0\right) = -d(\ln T).$$

Pero cuando las diferenciales de dos magnitudes son iguales entre sí, la diferencia entre las propias magnitudes solamente puede ser una constante aditiva arbitraria:

$$\frac{R}{C_V}\ln V_0 = -\ln T + \text{const}, \text{ de donde } \ln\left(V_0^{\frac{R}{C_V}}\cdot T\right) = \text{const}.$$

Y como la magnitud, cuyo logaritmo es constante, también es constante, tendremos

$$V_0^{\frac{R}{C_V}}\cdot T = \text{const}. \tag{8}$$

Para transformar esta expresión podemos emplear la fórmula (5) del § 49, según la cual

$$\frac{R}{C_V} = \frac{C_p - C_V}{C_V} = \frac{C_p}{C_V} - 1 = \gamma - 1.$$

Y poniendo este valor de $\frac{R}{C_V}$ en (8), hallamos

$$V_0^{\gamma-1}T = \text{const},$$

es decir, cuando el proceso es adiabático, el producto de la temperatura T por $V_0^{\gamma-1}$ permanece constante, por consiguiente

$$T_1V_1^{\gamma-1} = T_2V_2^{\gamma-1}, \text{ de donde } \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}$$

lo que coincide con la fórmula (5).

Para formarnos una idea concreta de la diferencia que existe entre los procesos isotérmicos y adiabáticos, examinemos varios ejemplos.

Ejemplo 1. Cierta cantidad de nitrógeno, que se encuentra a una temperatura de 27° C y a una presión de 1 atm, se comprime por vía adiabática hasta alcanzar un volumen 5 veces menor que el inicial. ¿A qué temperatura y presión se encontrará el nitrógeno después de comprimido? Compárese esta presión con la que tendría si la compresión hubiera sido isotérmica.

Solución. Por la fórmula de Poisson (7):

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma}, \text{ de donde } p_2 = p_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma}.$$

En nuestro caso $p = 1$ atm, $\frac{V_1}{V_2} = 5$, y como quiera que el nitrógeno es un gas diatómico, tendremos (véase el § 49):

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{7}{5} = 1{,}4.$$

De donde

$$p_2 = 1 \cdot 5^{1,4} \text{ atm} = 9,5 \text{ atm}.$$

Si la compresión hubiera sido isotérmica, la presión se determinaría por la ley de Boyle-Mariotte:

$$p_2 = p_1 \cdot \frac{V_1}{V_2} = 1 \cdot 5 \text{ atm} = 5 \text{ atm}.$$

La temperatura T_2 del gas, después de la compresión adiabática, se determina por la correlación (5):

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1}, \text{ de donde } T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1} = 300 \cdot 5^{0,4} = 571° \text{K},$$

o, pasando a la escala centígrada, obtenemos: $t = 298°$ C. Por lo tanto, durante la compresión adiabática que examinamos tendrá lugar un calentamiento considerable (desde 27 hasta 298° C) y la presión del gas será casi el doble que la que tendría después de la compresión isotérmica.

Ejemplo 2. En un matraz, cuyas paredes están envueltas en material termoaislante, hay aire a una presión p_1, mayor que la atmosférica, y a la temperatura T_1. Abriendo la llave de paso C (fig. 172), se deja que la presión del aire del matraz se iguale rápidamente con la de la armósfera H y se vuelve a cerrar la llave de paso. Cuando la temperatura del aire contenido en el matraz vuelve a alcanzar la temperatura T_1, la presión dentro de éste resulta ser igual a p_2.

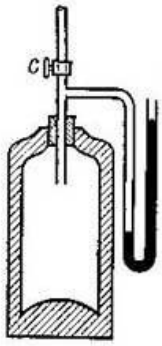


Fig. 172. Esquema del experimento para hallar la razón C_p/C_V del aire.

Valiéndose de estos datos, determinar la relación γ entre los calores específicos del aire a presión y volumen constantes.

Solución. Llamemos V_1 al volumen del aire que cabe en el matraz y supongamos que la parte de aquél que queda en dicho matraz después de abrir la llave ocupaba, antes de hacer esta operación, un volumen V_2 y tenía la presión p_1 y la temperatura T_1.

Al abrir la llave, una parte del aire se escapa; el aire restante ocupa todo el volumen V_1 y su presión se hace igual a la de la atmósfera H.

Este proceso de expansión puede considerarse adiabático, puesto que se desarrolla rápidamente y las paredes del matraz conducen mal el calor. Por lo tanto, según la fórmula de Poisson:

$$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma} = \frac{H}{p_1}. \tag{9}$$

Como resultado de esta expansión adiabática, el aire se enfría hasta cierta temperatura T_2. Una vez que la temperatura dentro del matraz vuelve a elevarse hasta su valor inicial T_1, la presión del gas toma un valor p_2, mayor que el de la atmósfera H. Al ocurrir esto, el volumen del aire sigue siendo V_1.

Como en este estado final la temperatura del aire es la misma que al principio, las magnitudes V_2, V_1, p_1 y p_2, están relacionadas entre sí por la ley de Boyle-Mariotte:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_2}{p_1}. \tag{10}$$

Igualando las expresiones (9) y (10), obtenemos

$$\frac{H}{p_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\gamma}.$$

Tomando logaritmos, hallamos

$$\lg H - \lg p_1 = \gamma(\lg p_2 - \lg p_1), \text{ de donde } \gamma = \frac{\lg H - \lg p_1}{\lg p_2 - \lg p_1}.$$

Por consiguiente, midiendo las presiones H, p_1 y p_2, se puede hallar el valor de γ para el aire.

Este ejemplo no es más que un esquema del experimento para determinar la relación de los calores específicos C_p y C_V de los gases.

§ 71. Trabajo durante las variaciones adiabáticas e isotérmicas del volumen de un gas. Determinemos el trabajo que se realiza durante la expansión adiabática de un gas. Este trabajo ΔA, como ya dijimos, se lleva a cabo a costa de la variación de la energía interna del gas.

Partiendo de la correlación (4) del § 49, para un mol de gas perfecto, tenemos

$$\Delta A = p\Delta V_0 = -C_V \Delta T.$$

Como C_V es constante, esta correlación también será justa para la variación final de la temperatura. Sea T_1 la temperatura inicial del gas y T_2 la final, entonces, $\Delta T = T_2 - T_1$, y el trabajo realizado A será

$$A = -C_V(T_2 - T_1) = C_V T_1 \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right).$$

Sustituyendo la relación T_2/T_1 por $\left(\frac{V_{01}}{V_{02}}\right)^{\gamma-1}$, según la fórmula (5) del § 70, obtenemos

$$A = C_V T_1 \left[1 - \left(\frac{V_{01}}{V_{02}}\right)^{\gamma-1}\right]. \quad (1)$$

Esta fórmula nos da el trabajo que se realiza cuando el volumen de un mol de gas varía adiabáticamente desde un valor V_{01} hasta otro valor V_{02}; la temperatura T_1 corresponde al volumen V_{01}.

La fórmula (1) puede modificarse haciendo uso de la correlación (5) del § 49:

$$C_p - C_V = R,$$

de donde

$$C_V = R\frac{C_V}{R} = R\frac{C_V}{C_p - C_V} = R\frac{1}{\gamma - 1}.$$

Poniendo esta expresión de C_V en (1), hallamos

$$A = \frac{RT_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{V_{01}}{V_{02}}\right)^{\gamma-1}\right]. \quad (1a)$$

Cuando el gas se expansiona *por vía isotérmica*, el trabajo se realiza a costa del calor comunicado desde el exterior. Por esta razón, no puede ser determinado por el mismo procedimiento que el trabajo producido durante la expansión adiabática. Según la fórmula (2) del § 69, el trabajo elemental que realiza el gas al aumentar su volumen en una magnitud infinitesimal ΔV, será igual a

$$\Delta A = p\Delta V.$$

El trabajo total A, efectuado al variar el volumen del gas desde un valor V_1 hasta otro V_2, puede obtenerse sumando todos los trabajos elementales:

$$A = \sum p\Delta V;$$

este trabajo se representa gráficamente por el área rayada de la fig. 173. En realidad, la suma indicada se reduce a una integración,

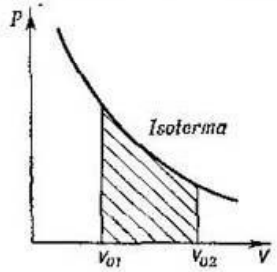


Fig. 173. El trabajo realizado durante una expansión isotérmica está representado por el área de la figura rayada.

cuyo resultado (véase la letra pequeña de la pág. 313), para un mol de gas nos da:

$$A = RT \ln \frac{V_{02}}{V_{01}} \qquad (2)$$

Como durante la transformación isotérmica se cumple la ley de Boyle-Mariotte, tendremos

$$\frac{V_{02}}{V_{01}} = \frac{p_1}{p_2},$$

de donde la expresión (2) puede escribirse también de la forma:

$$A = RT \ln \frac{p_1}{p_2}. \qquad (2a)$$

Generalizando las fórmulas (1a) y (2) para cualquier masa m de un gas, obtendremos que:

1) *el trabajo A, que realiza una masa de gas m al variar adiabáticamente* su volumen desde V_1 hasta V_2 es igual a

$$A = \frac{RT_1}{\gamma - 1} \cdot \frac{m}{\mu} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right]; \qquad (1b)$$

donde μ es el peso molecular del gas y T_1 su temperatura cuando el volumen es V_1;

2) *el trabajo A, que realiza una masa de gas m al variar por vía isotérmica* su volumen desde V_1 hasta V_2, es igual a

$$A = RT \frac{m}{\mu} \ln \frac{V_2}{V_1}, \tag{2b}$$

donde T es la temperatura constante de la variación isotérmica dada del volumen del gas.

La expresión del trabajo cuando varía el volumen puede calcularse de la forma siguiente: el trabajo elemental

$$dA = p\, dV. \tag{3}$$

El trabajo total, cuando el volumen varía desde un valor V_1 hasta otro V_2, se expresa por la integral definida

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p\, dV. \tag{4}$$

Esta expresión es válida tanto cuando la transformación es isotérmica como cuando es adiabática.

En la transformación isotérmica, para un mol de gas se cumple la fórmula de Mendeléiev-Clapeyron:

$$pV_0 = RT,$$

donde la temperatura T tiene un valor constante. Expresando la presión p por medio de V_0 y T, obtenemos

$$p = \frac{RT}{V_0}.$$

Poniendo este valor de p en (4) y sacando R y T fuera del signo de integración, puesto que son constantes, hallamos que:

$$A = RT \int_{V_{01}}^{V_{02}} \frac{dV_0}{V_0} = RT \ln \frac{V_{02}}{V_{01}},$$

fórmula que nos da el trabajo realizado por un mol de gas cuando su volumen varía por vía isoterma desde V_{01} hasta V_{02} [compárese con la fórmula (2) del texto básico].

Utilicemos ahora la fórmula (4) para deducir otra vez la exprosión del trabajo realizado durante la variación adiabática del volumen. Cuando la transformación es adiabática se cumple la fórmula de Poisson

$$pV_0^{\gamma} = p_1 V_{01}^{\gamma},$$

donde p_1 y V_{01} son la presión y el volumen iniciales de un mol de gas, de aquí

$$p = \frac{p_1 V_{01}^{\gamma}}{V_0^{\gamma}}.$$

Poniendo este valor de p en (4) y sacando $p_1 V_{01}^{\gamma}$ fuera del signo integral, puesto que son magnitudes constantes, obtenemos

$$A = p_1 V_{01}^{\gamma} \int_{V_{01}}^{V_{02}} \frac{dV_0}{V_0^{\gamma}} = \frac{p_1 V_{01}^{\gamma}}{\gamma - 1} \left(\frac{1}{V_{01}^{\gamma-1}} - \frac{1}{V_{02}^{\gamma-1}} \right);$$

y sacando fuera del paréntesis $\frac{1}{V_{01}^{\gamma-1}}$, hallamos

$$A = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p_1 V_{01}^{\gamma}}{V_{01}^{\gamma-1}} \left[1 - \left(\frac{V_{01}}{V_{02}} \right)^{\gamma-1} \right] = \frac{p_1 V_{01}}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_{01}}{V_{02}} \right)^{\gamma-1} \right].$$

Valiéndonos de la ecuación de estado de los gases perfectos, tendremos

$$p_1 V_{01} = R T_1,$$

donde T_1 es la temperatura del gas cuando su volumen era V_{01} y se encontraba a la presión p_1, de donde

$$A = \frac{R T_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_{01}}{V_{02}} \right)^{\gamma-1} \right],$$

lo que coincide con la fórmula (1a).

A continuación ofrecemos un ejemplo de cálculo del trabajo correspondiente a la compresión de un gas.

Ejemplo. 10 l de nitrógeno, que se encuentran a una presión $p_1 = 1$ atm, se comprimen hasta la presión $p_2 = 100$ atm. Determinar el trabajo correspondiente a la compresión en los dos casos siguientes: 1) cuando la compresión se realiza por vía isoterma; 2) cuando la compresión es adiabática.

Solución. 1) Cuando la compresión es isotérmica, el trabajo, según la fórmula (2b), será igual a

$$A = RT \frac{m}{\mu} \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Teniendo en cuenta que $\frac{m}{\mu} RT = p_1 V_1$ y $\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2}$, escribiremos la expresión anterior en la forma siguiente:

$$A = p_1 V_1 \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

Para resolver el ejemplo en unidades del sistema *CGS*, reduciremos la presión a barias y el volumen a centímetros cúbicos; entonces, $p_1 = 1$ atm $\cong$ $\cong 10^6$ barias y $V_1 = 10$ l $= 10^4$ cm^3, de donde

$$A = 10^6 \cdot 10^4 \ln \frac{1}{100} \text{ ergios} \cong -4{,}6 \cdot 10^{10} \text{ ergios} = -4{,}6 \cdot 10^3 \text{ julios}.$$

2) Cuando la compresión es adiabática, por la fórmula (1b):

$$A = \frac{R T_1}{\gamma - 1} \cdot \frac{m}{\mu} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right].$$

Volviendo a utilizar aquí la correlación $\frac{m}{\mu} R T_1 = p_1 V_1$ y teniendo en cuenta que por la fórmula de Poisson

$$\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma} = \frac{p_2}{p_1}, \text{ de donde } \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}},$$

hallamos

$$A = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right].$$

Como en el primer caso tendremos que $p_1 \cong 10^6$ barias, $V_1 = 10^4$ cm^3 y, además, como el nitrógeno es un gas diatómico, $\gamma = 1{,}4$, de donde

$$A = \frac{10^6 \cdot 10^4}{1{,}4 - 1}\left[1 - 100^{\frac{1{,}4-1}{1{,}4}}\right] \text{ ergios} = -6{,}8 \cdot 10^{10} \text{ ergios} =$$

$$= -6{,}8 \cdot 10^3 \text{ julios}.$$

El trabajo es negativo en ambos casos, lo cual corresponde lógicamente a la esencia del trabajo de compresión, puesto que está realizado por las fuerzas exteriores. En este caso el trabajo es mayor cuando la compresión es adiabática que cuando es isoterma.

§ 72. Segundo principio de la Termodinámica. Al estudiar en el § 69 el ciclo directo realizado por un agente de transformación cualquiera, vimos que podía utilizarse en las máquinas térmicas, puesto que a costa de una cantidad de calor Q_1, recibida de una fuente exterior cualquiera, el agente de transformación realizaba un trabajo A. Al mismo tiempo, una cantidad de calor Q_2 se cedía al foco frío. De esta forma, el ciclo tenía un carácter complejo consistente en que del foco caliente se tomaba una cantidad de calor Q_1, el agente de transformación realizaba un trabajo A, menor que la cantidad de calor recibida Q_1, y la cantidad de calor restante, $Q_2 = Q_1 - A$, se cedía al foco frío. Como quiera que en la mayoría de los casos tiene interés, desde el punto de vista práctico, conocer qué parte del calor tomado del foco caliente Q_1 se aprovecha en el trabajo A, la relación

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$$

como ya dijimos, puede denominarse rendimiento o eficiencia de la máquina térmica.

Evidentemente, la máquina será tanto más ventajosa cuanto más se aproxime η a la unidad, es decir, cuanto mayor sea la parte de la cantidad de calor recibida que se convierte en trabajo A.

Un motor térmico que tuviera un rendimiento $\eta = 1$ sería extraordinariamente ventajoso. Esto se explica, puesto que dicho motor no necesitaría dos focos, uno más caliente (caldera) y otro más frío (condensador), y podría funcionar a expensas del enfriamiento de cualquiera de los cuerpos que nos rodean, por ejemplo, de la corteza terrestre o de los océanos, hasta temperaturas más bajas que las de los cuerpos circundantes más fríos. Este tipo de motor recibió el nombre de *móvil perpetuo de segunda especie*. Como quiera que este móvil no contradice el principio de la conservación de la

energía (o primer principio de la Termodinámica), no es evidente la imposibilidad de su construcción. Sin embargo, cuantos intentos se han hecho para construir una máquina térmica de acción periódica cuyo funcionamiento se reduzca a transmitir al agente de la transformación una cantidad de calor Q_1, procedente de un foco determinado, y a obtener un trabajo $A = Q_1$, se han visto frustrados.

El primero que planteó de forma general el problema de producir trabajo a expensas de una cantidad de calor tomada de un foco calorífico fue Sadi Carnot, en su obra «Reflexiones sobre la fuerza motriz del fuego», publicada en el año 1824. Carnot llegó a la conclusión de que, en todo proceso cerrado que conste de transformaciones adiabáticas o isotérmicas del volumen de un gas perfecto, es imposible evitar el paso de calor desde el foco caliente al frío, siempre que este último tenga una temperatura superior a la del cero absoluto.

Posteriormente, las deducciones de Carnot fueron generalizadas por Clausius y W. Thomson, los cuales enunciaron *el principio de la imposibilidad de conseguir un proceso periódico cuyo efecto único sea el de convertir íntegramente en trabajo la cantidad de calor tomada de un foco calorífico.*

Este es el llamado *segundo principio de la Termodinámica.*

También puede enunciarse como el principio de la imposibilidad de construir un móvil perpetuo de segunda especie, es decir, un motor de funcionamiento periódico que produzca trabajo enfriando un foco caliente.

La validez del segundo principio de la Termodinámica ha sido confirmada por la enorme cantidad de conclusiones sacadas de él que coinciden exactamente con los resultados experimentales.

§ 73. Ciclo de Carnot. Rendimiento de una máquina térmica. Examinemos ahora la transformación cerrada que abordó por primera vez Carnot y que se conoce con el nombre *de ciclo de Carnot.*

Este ciclo es una transformación reversible cerrada, limitada por dos isotermas y dos adiabáticas. Para efectuar este ciclo hay que disponer de un foco caliente, que comunique al agente de transformación la cantidad de calor necesaria para su expansión isotérmica, y de un foco frío que absorba de dicha substancia la cantidad de calor correspondiente durante la compresión isoterma.

Lo mismo que en el § 69, designaremos por Q_1 la cantidad de calor *cedida* por el foco caliente *al agente de transformación* y por $-Q_2$ la cantidad de calor que *dicho agente recibe* del foco frío (se considera positivo el calor Q_2 que *cede la substancia* al foco frío). El trabajo lo designaremos por A (sin ningún signo) en todos los casos. Aunque el trabajo que realiza el agente de transformación durante la expansión es positivo, $A_1 > 0$, y el que realiza durante la compresión es negativo, $A_2 < 0$.

Para el estudio del ciclo de Carnot tomaremos como agente de transformación un mol de gas perfecto, que en el momento inicial se encontrará en el estado (*1*), caracterizado por un volumen V_{01}, una presión p_1 y una temperatura T_1 (fig. 174). Provoquemos la expansión de este gas por vía isotérmica hasta que ocupe un volumen V_{02} a la presión p_2 [estado (*2*)]. Durante esta expansión isotérmica el gas recibe del foco caliente una cantidad de calor Q_1 y realiza un trabajo $A_1=Q_1$.

A partir del estado (*2*), dejamos que el gas se expansione por vía adiabática hasta el estado (*3*), caracterizado por un volumen V_{03} y una presión p_3. Durante esta expansión la temperatura del gas baja hasta un valor igual a T_2.

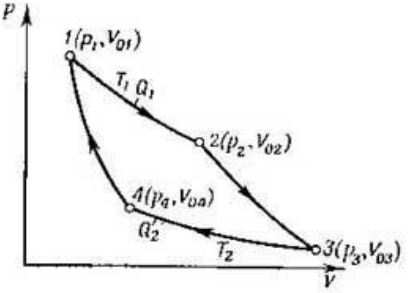


Fig. 174. Ciclo de Carnot.

Cuando el gas se encuentra en el estado (*3*) comenzamos a comprimirlo por vía isoterma (conservando constante la temperatura T_2) hasta llegar al estado (*4*), cuyas características son el volumen V_{04} y la presión p_4. Al ocurrir esto el gas cedo al foco frío una cantidad de calor Q_2 y realiza el trabajo $A = -Q_2$.

Finalmente, partiendo del estado (*4*), comprimimos el gas adiabáticamente hasta conseguir que adquiera el volumen V_{01} y la presión p_1 iniciales y que se caliente hasta la temperatura T_1, también inicial.

Demostremos, en primer lugar, que un proceso de este tipo, limitado por dos isotermas y dos adiabáticas, puede realizarse en forma de ciclo cerrado. Para esto nos valdremos de la fórmula (5) del § 70, según la cual, durante la expansión adiabática (2) → (3) se cumple la correlación:

$$\left(\frac{V_{02}}{V_{03}}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_2}{T_1}. \qquad (1)$$

Pero la condición necesaria para que la transformación sea cerrada es, que durante la compresión adiabática desde el estado (*4*) hasta el estado (*1*) se eleve la temperatura del gas desde el valor T_2 hasta el valor T_1, es decir, que se cumpla la correlación:

$$\left(\frac{V_{01}}{V_{04}}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_2}{T_1}. \qquad (2)$$

Comparando entre sí las expresiones (*1*) y (*2*) vemos que deberá cumplirse la condición:

$$\frac{V_{02}}{V_{03}} = \frac{V_{01}}{V_{04}}. \tag{3}$$

Y como esta condición puede cumplirse, quiere decir, que el proceso que examinamos puede realizarse en forma de transformación cerrada (ciclo).

Determinemos ahora el rendimiento del ciclo de Carnot. Como dijimos en el § 69, el rendimiento η de una transformación cerrada es igual a

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}, \tag{4}$$

donde A es el trabajo total realizado durante el transcurso de todo el ciclo; Q_1, la cantidad de calor recibida del foco caliente y Q_2, la cantidad de calor cedida al foco frío.

La cantidad de calor Q_1, recibida por el agente de transformación, es igual al trabajo A_1, realizado por el mol de gas durante la expansión isoterma (*1*) → (*2*). Aplicando la fórmula 2 del § 71, hallamos que

$$Q_1 = A_1 = RT_1 \ln \frac{V_{02}}{V_{01}}.$$

De igual forma, la cantidad de calor $-Q_2$, *recibida* del foco frío, es igual al trabajo A_2, realizado por el gas durante la compresión isotérmica (*3*) → (*4*):

$$-Q_2 = A_2 = RT_2 \ln \frac{V_{04}}{V_{03}} = -RT_2 \ln \frac{V_{03}}{V_{04}}.$$

Poniendo estos valores de Q_1 y $-Q_2$ en la expresión (4), hallamos que

$$\eta = \frac{T_1 \ln \frac{V_{02}}{V_{01}} - T_2 \ln \frac{V_{03}}{V_{04}}}{T_1 \ln \frac{V_{02}}{V_{01}}}.$$

Pero de la condición necesaria para que la transformación sea cerrada (3) se deduce que

$$\frac{V_{03}}{V_{04}} = \frac{V_{02}}{V_{01}}, \text{ de donde } \eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \tag{5}$$

donde T_1 es la temperatura del gas a que tiene lugar la expansión isoterma (*1*) → (*2*) y T_2 es la temperatura a que se desarrolla la compresión isoterma (*3*) → (*4*). Al expansionarse isotérmicamente, el gas recibe del foco caliente una cantidad de calor Q_1, mientras que al ser comprimido por vía isoterma cede al foco frío una canti-

dad de calor Q_2. La temperatura del foco caliente debe ser igual a T_1 y la del foco frío igual a T_2, puesto que si el primero tuviera una temperatura mayor, o el segundo una menor, el proceso no podría desarrollarse equilibradamente.

El ciclo directo de Carnot que hemos estudiado *es el de una máquina térmica ideal. El rendimiento de esta máquina* η *depende exclusivamente de la temperatura* T_1 *del foco caliente y de la* T_2 *del foco frío.*

Durante cada ciclo el gas realiza un trabajo

$$A = Q_1 - Q_2 = \eta Q_1, \tag{6}$$

donde η es el rendimiento, que se determina por la fórmula (5). Al realizar este trabajo el gas absorbe del foco caliente una cantidad de calor Q_1 y cede al foco frío otra cantidad de calor Q_2,

$$Q_2 = Q_1 - A = (1 - \eta)\, Q_1. \tag{7}$$

Cuanto mayor es la temperatura del foco caliente T_1 y menor la del foco frío T_2, más alto es el rendimiento η, mayor la fracción del calor Q_1 que se transforma en trabajo y menor la cantidad de calor Q_2 que se cede al foco frío. El rendimiento η puede ser igual a la unidad únicamente cuando $T_2 = 0$, es decir, cuando la temperatura del foco frío sea igual a la del cero absoluto.

La figura 175 representa el esquema del funcionamiento de un ciclo directo de Carnot (de una máquina térmica ideal).

Como el ciclo de Carnot es reversible puede desarrollarse en sentido contrario al que acabamos de examinar. Este *ciclo de Carnot inverso es el de una máquina frigorífica.* Efectivamente, durante el ciclo de Carnot inverso las fuerzas exteriores realizan sobre el gas un trabajo positivo A', igual al trabajo A que realizaba el gas en el ciclo directo. Al ocurrir esto, se absorberá del foco frío una cantidad de calor Q_2, la cual, de acuerdo con las fórmulas (6) y (7), puede expresarse de la forma

$$Q_2 = \frac{1-\eta}{\eta} A.$$

Y al foco caliente se le cederá una cantidad de calor

$$Q_1 = \frac{A}{\eta}.$$

El esquema del funcionamiento del ciclo de Carnot inverso (de la máquina frigorífica ideal) está representado en la fig. 176.

Todos estos resultados los hemos obtenido partiendo de la suposición de que el ciclo de Carnot se efectúa con un gas perfecto. No obstante, apoyándonos en el segundo principio de la Termodinámica, podemos decir, que *el ciclo reversible de Carnot tendrá el mismo rendimiento cualquiera que sea la substancia que constituya el agente*

de transformación. Para demostrarlo, supongamos que un ciclo de Carnot reversible, efectuado por una substancia determinada, tiene un rendimiento η' mayor que el rendimiento η de otro ciclo de Carnot realizado por un gas perfecto: $\eta' > \eta$.

Haciendo que el primero de estos ciclos transcurra *en sentido directo* (como en una máquina térmica) n veces, entre un foco caliente cuya temperatura sea T_1 y un foco frío con temperatura T_2, obtendremos un trabajo igual a nA. Al mismo tiempo se absorberá del foco caliente una cantidad de calor nQ_1 y se cederá al foco frío otra cantidad de calor nQ_2. Basándonos en las correlaciones (6) y (7), que son valederas no sólo para el ciclo de

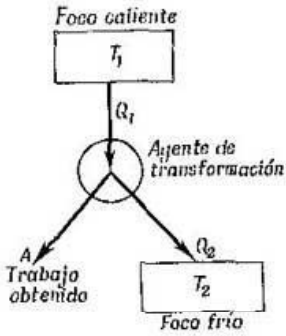


Fig. 175. Esquema del funcionamiento de una máquina térmica.

Carnot con gas perfecto, sino para cualquier ciclo de este tipo (siempre que se entienda por η el rendimiento del ciclo que se examina), podemos escribir:

$$nA = \frac{\eta'}{1-\eta'} nQ_2. \tag{8}$$

Si efectuamos después el ciclo de Carnot con el gas perfecto *en sentido contrario* (como en una máquina frigorífica) m veces, entre los mismos focos frío y caliente que el ciclo anterior, tendremos que realizar un trabajo mA'; del foco frío se absorberá una cantidad de calor mQ_2' y se cederá al foco caliente otra cantidad de calor mQ_1'. En este caso se cumplirá la correlación:

$$mA' = \frac{\eta}{1-\eta} mQ_2'. \tag{9}$$

Los números n y m podemos elegirlos de tal forma, que

$$nQ_2 = mQ_2'. \tag{10}$$

Entonces, según (8) y (9) y teniendo en cuenta que $\eta' > \eta$, obtendremos

$$\frac{nA}{mA'} = \frac{\dfrac{\eta'}{1-\eta'}}{\dfrac{\eta}{1-\eta}} > 1,$$

es decir, que como resultado de la realización del ciclo directo n veces y del inverso m veces, se obtiene un trabajo nA que resulta

ser mayor que el trabajo gastado mA' y, según (10), la cantidad de calor cedida al foco frío es igual a la que se recibió de él. De esta forma, ambos ciclos tomados conjuntamente constituirían un móvil perpetuo de segunda especie, es decir, el trabajo se obtendría exclusivamente a expensas del calor absorbido del foco caliente, sin ceder al foco frío ninguna cantidad de calor. Pero como sabemos, el segundo principio de la Termodinámica niega la posibilidad del móvil perpetuo de segunda especie. De aquí se deduce, que tenemos que renunciar a la suposición de que $\eta' > \eta$.

Nos queda suponer que $\eta' < \eta$. Pero entonces, efectuando el ciclo de Carnot con el gas perfecto, en sentido directo, y con la otra substancia, en sentido inverso, podríamos realizar el móvil perpetuo de segunda especie.

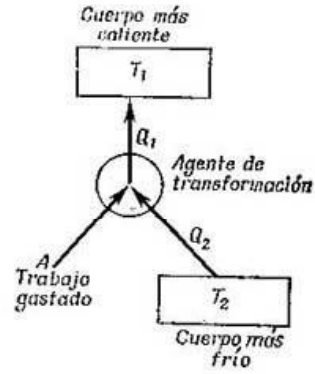


Fig. 176. Esquema del funcionamiento de una máquina frigorífica.

Es decir, esta segunda suposición también debe ser desechada. Por consiguiente, sólo queda una posibilidad real, la de que $\eta' = \eta$.

Veamos ahora lo que ocurre con un ciclo de Carnot *irreversible* (cuyas variables no están en equilibrio en todo momento), realizado en sentido directo, es decir, actuando como el de una máquina térmica. Sea su rendimiento η''. Si este ciclo tiene lugar entre unos focos, caliente y frío, dados y se hace que entre estos mismos focos se realice un ciclo de Carnot reversible, como el de una máquina frigorífica, basándonos en razonamientos idénticos a los expuestos con anterioridad, obtendremos que $\eta'' \leqq \eta$, donde η es el rendimiento del ciclo de Carnot reversible.

Pero cuando se trata de un ciclo de Carnot irreversible, no puede demostrarse que su rendimiento η'' no puede ser al mismo tiempo menor que η, puesto que según las condiciones no puede ser reversible, es decir, no puede utilizarse como el de una máquina frigorífica. Por consiguiente tendremos que limitarnos a sacar la conclusión de que *el rendimiento del ciclo de Carnot irreversible no puede ser mayor que el del reversible.*

Estos resultados pueden hacerse extensivos a cualquier transformación cerrada.

Figurémonos ahora un ciclo reversible cualquiera, como el representado gráficamente por la curva cerrada $ABCDA$ (fig. 177). Este

ciclo puede dividirse aproximadamente en un número infinito de ciclos de Carnot infinitamente estrechos. Al efectuarse todos estos ciclos de Carnot, una parte de cada adiabática, que se recorre una vez en un sentido y otra en el contrario, se anula, quedando solamente las isotermas y los fragmentos extremos de las adiabáticas, los cuales, en su conjunto, forman una línea quebrada cerrada. En el límite, esta línea nos da el contorno en que está comprendido el ciclo

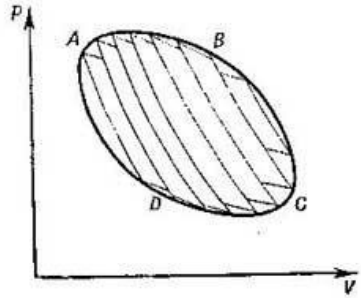


Fig. 177. Toda transformación cerrada $ABCDA$ puede dividirse en ciclos elementales de Carnot.

$ABCDA$. Cada uno de estos ciclos de Carnot se realiza entre las temperaturas T'_k y T_k, diferentes para cada ciclo. Según la fórmula (5) el rendimiento de un ciclo k de Carnot será

$$\eta_k = \frac{T'_k - T_k}{T'_k}.$$

Llamando T_1 a la temperatura máxima del ciclo $ABCDA$, y T_2 a la mínima, tendremos que el rendimiento de cada uno de los ciclos elementales de Carnot será:

$$\eta_k \leqslant \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

De donde el rendimiento total del ciclo $ABCDA$ también satisfará la condición:

$$\eta''' \leqslant \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \qquad (11)$$

De esta forma llegamos a la conclusión de que, *cualquiera que sea el ciclo reversible directo (máquina térmica), su rendimiento* η''' *no puede ser mayor que el del ciclo de Carnot (máquina térmica ideal) que se efectúe entre las temperaturas* T_1 y T_2.

Si la transformación cerrada que se estudia no es reversible, es decir, si tiene tramos irreversibles que no pueden representarse en la fig. 177, puede demostrarse que se divide en un número infinito de ciclos de Carnot, de los cuales una parte tampoco será reversible.

Como quiera que el rendimiento del ciclo de Carnot irreversible η'_k no puede ser mayor que el del ciclo reversible, la fórmula (11) será cierta para *cualquier transformación cerrada irreversible directa*.

El segundo principio de la Termodinámica afirma que es imposible toda transformación cuyo único efecto sea el de convertir en trabajo la cantidad de calor tomada de un foco determinado. Ahora veremos que el proceso que acompaña a la obtención de trabajo, a expensas del calor absorbido, puede ser la transmisión de calor de un cuerpo caliente a otro más frío.

Por las fórmulas (6) y (7) tenemos, que si el cuerpo que realiza un ciclo de Carnot reversible efectúa un trabajo $A = \eta Q_1$ y recibe del foco caliente una cantidad de calor Q_1, tiene que ceder al foco frío una cantidad de calor

$$Q_2 = (1 - \eta)\, Q_1,$$

donde η es el rendimiento determinado por la fórmula (5).

Poniendo en esta correlación el valor de η según la expresión (5), obtenemos

$$Q_2 = \frac{T_2}{T_1} Q_1, \tag{12}$$

donde T_1 es la temperatura del foco caliente (o cuerpo del que se toma calor) y T_2 es la temperatura del foco frío (o cuerpo al que se cede calor).

Cualquier otra transformación que se realice entre estos mismos focos caliente y frío (cuyo rendimiento no puede ser mayor que el del ciclo de Carnot reversible) producirá el mismo trabajo A (a costa de una cantidad de calor equivalente tomada del foco caliente) siempre que transporte del foco caliente al frío una cantidad de calor que no sea menor que (12).

De esta forma, *el estudio del ciclo de Carnot reversible nos proporciona un criterio cuantitativo que permite establecer la cantidad de calor mínima Q_2, que hay que transportar del cuerpo caliente al frío, cualquiera que sea el ciclo de funcionamiento, para obtener la cantidad de trabajo dada A, a expensas de la cantidad de calor equivalente $Q_1 - Q_2$ tomada del cuerpo caliente.*

Detengámonos también en otra consecuencia importante del examen del ciclo de Carnot. En el § 44 indicamos que la escala de temperaturas es una cosa arbitraria, puesto que, como empírica que es, depende de la substancia termométrica que se utilice. Unicamente las deducciones sacadas de la teoría cinética de los gases permitieron establecer la relación existente entre la temperatura y la energía cinética del movimiento de las moléculas, que es general para todas las substancias. El estudio del ciclo de Carnot permite también, como señaló Kelvin, establecer una escala de temperaturas independiente de las propiedades de la substancia termométrica que se elija. El procedimiento para establecer esta escala, llamada también *escala termodinámica de temperaturas*, es el siguien-

te: por la fórmula (12) tenemos que

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}.$$

En esta igualdad vemos, que la relación entre las temperaturas T_1/T_2 puede medirse por medio de la razón que existe entre los calores Q_1/Q_2, donde Q_1 es el calor que absorbe la substancia del foco calorífico durante el ciclo de Carnot reversible, y Q_2 es el calor que dicha substancia cede al foco frío. Como vimos anteriormente, el rendimiento η del ciclo de Carnot no depende de las propiedades de la substancia que recorre el ciclo. De donde, la relación Q_1/Q_2 tampoco dependerá de dicha substancia y, por consiguiente, puede servir para establecer la escala de temperaturas, independientemente de la substancia termométrica que se tome.

La escala termodinámica de temperaturas coincide con la escala absoluta determinada por el termómetro de gas perfecto.

§ 74. Ciclos técnicos. En el § 73 demostramos que el rendimiento máximo posible es el que proporciona el ciclo de Carnot reversible, para el que

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

donde T_1 es la temperatura del foco caliente y T_2 la del foco frío.

No obstante, este ciclo es imposible de realizar; las aproximaciones al ciclo de Carnot pueden conseguirse únicamente en procesos que se realizan muy despacio y que, desde el punto de vista técnico, no tienen aplicación. Los ciclos que se utilizan en las máquinas térmicas de aplicación técnica son irreversibles y, en realidad, no son cerrados, puesto que la substancia que los realiza (vapor o mezcla quemada) se arroja al exterior después de terminar el ciclo. Sin embargo, la ciencia tiende a crear ciclos cuyo rendimiento se aproxime lo más posible al del ciclo de Carnot. Examinemos algunos de los ciclos técnicos más utilizados.

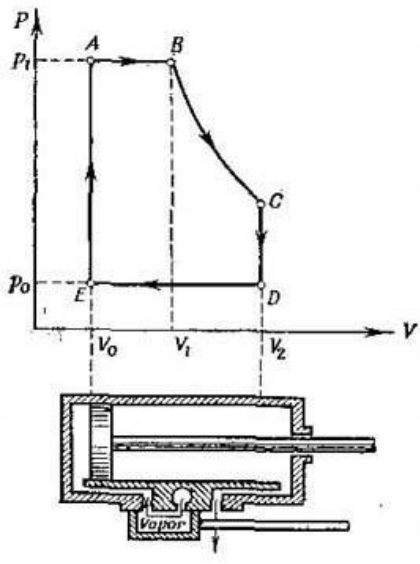


Fig. 178. Ciclo de una máquina de vapor a pistón.

1. Ciclo de funcionamiento de una máquina de vapor a pistón, ideal. Este ciclo se reduce a lo siguiente (fig. 178):

a) el vapor de la caldera comienza a llegar al cilindro; la presión en éste se eleva desde el valor p_0 (correspondiente a la presión del vapor en el condensador) hasta el valor p_1 (correspondiente a la presión del vapor en la caldera); todo este proceso puede considerarse que se realiza a volumen constante V_0 (línea EA);

b) a medida que el vapor va entrando en el cilindro, el pistón se desplaza de izquierda a derecha y, por consiguiente, el volumen aumenta, a una presión constante p_1, desde V_0 hasta V_1 (línea AB);

c) el pistón sigue desplazándose hacia la derecha pero cesa la entrada de vapor en el cilindro y, como resultado, tiene lugar una expansión adiabática del vapor desde el volumen V_1 hasta el volumen V_2 (línea BC);

d) el pistón llega a su posición extrema derecha, el distribuidor abre la lumbrera de salida del vapor y éste pasa al condensador; se produce una rápida caída de la presión hasta el valor p_0 (prácticamente a volumen constante V_2; línea CD);

e) el pistón se mueve en sentido contrario, empujando a los restos de vapor con una presión constante p_0, y el volumen de éstos disminuye desde V_2 a V_0.

Determinemos el trabajo total que realiza esta máquina de vapor durante un ciclo. El trabajo correspondiente a las ramas EA y CD del diagrama es igual

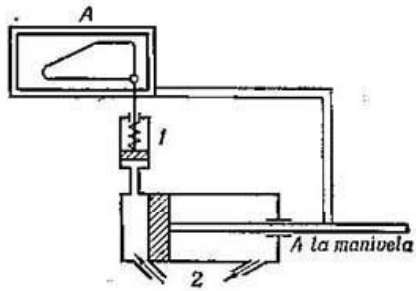


Fig. 179. Esquema de un indicador.

a cero, por lo tanto, el trabajo total estará integrado por los siguientes trabajos parciales:

1) por el trabajo A_1 de la expansión isobárica AB

$$A_1 = p_1 (V_1 - V_0);$$

2) por el trabajo A_2 de la expansión adiabática BC

$$A_2 = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right];$$

3) por el trabajo A_3 de la compresión isobárica DE

$$A_3 = -p_0 (V_2 - V_0);$$

de donde el trabajo total será:

$$A = p_1 (V_1 - V_0) - p_0 (V_2 - V_0) + \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right].$$

El ciclo real de las máquinas de vapor a pistón se diferencia algo del que acabamos de estudiar. Para trazar el diagrama del ciclo de las máquinas de vapor reales se emplea un aparato llamado *indicador*.

El esquema de este aparato está representado en la fig. 179. El desplazamiento de su pasador portapluma es proporcional a la presión del vapor en el cilindro. La hoja de papel A, sobre la que se dibuja la curva, se mueve junto con el pistón; de esta forma se consigue que su desplazamiento sea proporciona al volumen que ocupa el vapor. La curva que se obtiene con este aparato recibe el nombre de *diagrama del indicador*. El trabajo que realiza la máquina durante un desplazamiento del pistón está representado por el área comprendida dentro de la curva del diagrama.

En la fig. 180 se ofrece una comparación de las curvas *1*, del ciclo teórico, y *2*, del diagrama del ciclo de una máquina real obtenido con el indicador. Como puede verse, la curva proporcionada por el indicador está comprendida total-

mente dentro de la del ciclo teórico. Por lo tanto, el trabajo que realiza la máquina real es menor también que el teórico. Además, en toda máquina de vapor real existe toda una serie de pérdidas de calor, en el hogar y en otros puntos de la misma. Esto hace que el rendimiento de las máquinas de vapor no sea elevado. Las mejores máquinas de vapor consumen cerca de 0,5 kg de carbón por CV hora. Como el poder calorífico del carbon es de 7000 kcal por kg, resulta que estas

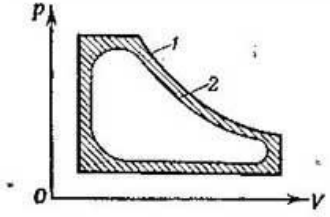


Fig. 180. Comparación del ciclo teórico de una máquina de vapor con su diagrama del indicador.

máquinas consumen por cada CV hora una energía igual a $0{,}5 \cdot 7000 \times 427$ kgm y realizan un trabajo $A = 75 \cdot 60 \cdot 60$ kgm, de donde su rendimiento será:

$$\eta' = \frac{75 \cdot 60 \cdot 60}{0{,}5 \cdot 7000 \cdot 427} = 0{,}18.$$

Expresándolo en tantos por ciento, tenemos que $\eta' = 18\%$.

La temperatura de la caldera en estas máquinas es de cerca de 200° C, mientras que la del condensador es aproximadamente igual a 30° C. Si entre estas dos temperaturas se realizara un ciclo de Carnot reversible, tendría un rendimiento

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{170}{473} \cong 0{,}36,$$

o expresado en tantos por ciento, $\eta = 36\%$. La comparación de los rendimientos η' y η muestra que en las máquinas de vapor a pistón reales solamente se utiliza la mitad, aproximadamente, del límite teórico de aprovechamiento de la energía producida al quemarse el combustible. Una de las causas de que el rendimiento de las máquinas de vapor a pistón sea tan pequeño es que su ciclo de

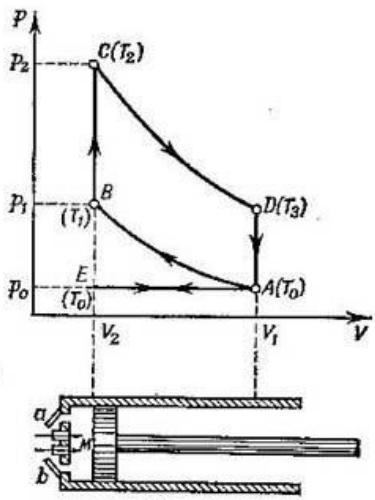


Fig. 181. Ciclo de funcionamiento de un motor de combustión interna.

funcionamiento se diferencia del ciclo reversible ideal por tener pérdidas perniciosas. Estas últimas pueden disminuirse perfeccionando las máquinas.

En las turbinas de vapor se consigue un rendimiento del 20% e incluso algo mayor.

2. Ciclo del motor de combustión interna de cuatro tiempos. Este ciclo consta de los siguientes procesos (fig. 181):

a) la primera carrera del émbolo, de izquierda a derecha (primer tiempo), durante la cual el combustible (vapores de gasolina mezclados con aire) es aspirado y entra por la válvula a. Esta aspiración puede considerarse que, aproximadamente, se realiza a una presión constante p_0, igual a la presión atmosférica; durante este tiempo el volumen aumenta desde V_2 hasta V_1 (rama EA de la curva);

b) la segunda carrera (segundo tiempo; rama AB), durante la cual el émbolo, desplazándose hacia la izquierda, comprime adiabáticamente la mezcla aspirada en el primer tiempo, haciendo que su volumen disminuya desde V_1 hasta V_2, al mismo tiempo que su temperatura se eleva desde T_0 hasta T_1 y su presión desde p_0 hasta p_1;

c) la explosión de la mezcla comprimida, provocada por una chispa eléctrica que salta entre los electrodos de la bujía M, da lugar al comienzo del tercer tiempo. Al comenzar este tiempo se produce un aumento casi instantáneo de la presión (sin que varíe el volumen; véase la rama BC de la curva), hasta el valor p_2, y de la temperatura, hasta T_2, a expensas del calor que produce la explosión. Después el émbolo se desplaza de izquierda a derecha y tiene lugar una expansión del gas, aproximadamente adiabática, hasta que éste ocupa el volumen V_1; esta expansión va acompañada de un descenso de temperatura desde T_2 hasta T_3 (rama CD). Cuando el émbolo llega a su posición extrema derecha, correspondiente al punto D, se abre la válvula de escape b y la presión desciende a volumen constante V_1 hasta el valor p_0 (rama DA); la temperatura también desciende hasta el valor T_0;

d) el cuarto y último tiempo, durante el cual el émbolo se desplaza hacia la izquierda y empuja los gases quemados expulsándolos a través de la válvula de escape b (rama AE).

Calculemos el trabajo total realizado durante este ciclo. Los trabajos realizados durante los tiempos primero y último son iguales entre sí y de signo contrario, cosa que se desprende del hecho de que estos dos tiempos se representen por una misma línea recta AE, recorrida en sentidos opuestos. Durante los procesos isocoros (en que el volumen no varía) BC y AD, el trabajo es igual a cero. De esta forma, el trabajo que se realiza durante el ciclo es la suma de los producidos al recorrer las ramas AB y CD de la curva. Durante la compresión adiabática AB se efectúa un trabajo

$$A_1 = \frac{RT_0}{\gamma - 1} \cdot \frac{m}{\mu} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right],$$

donde m es la masa del gas que se encuentra en el cilindro y μ, su peso molecular.

Durante la expansión adiabática CD se realiza el trabajo

$$A_2 = -\frac{RT_3}{\gamma - 1} \cdot \frac{m}{\mu} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right],$$

de donde el trabajo total será

$$A = A_1 + A_2 = \frac{R}{\gamma - 1} \cdot \frac{m}{\mu} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right] (T_0 - T_3). \qquad (1)$$

En los motores reales, ni la compresión AB ni la expansión CD son adiabáticas perfectas. En el caso concreto de una transformación politrópica, en la expresión (1) deberá entenderse por γ, no la razón de los calores específicos C_p/C_V, sino el exponente politrópico, el cual, como dijimos en el § 70, es menor que la relación C_p/C_V.

La expresión (1) puede transformarse. Por la fórmula (5) del § 70, tenemos que

$$\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} = \frac{T_2}{T_3} = \frac{T_1}{T_0}, \qquad (2)$$

y además

$$\frac{R}{\gamma-1}=C_V.$$

Utilizando estas correlaciones podemos escribir (1) de la forma siguiente:

$$A=\frac{m}{\mu}C_V\left(1-\frac{T_2}{T_3}\right)(T_0-T_3),$$

de donde basándonos en la relación

$$\frac{T_2}{T_3}=\frac{T_1}{T_0} \text{ obtenemos que } A=\frac{m}{\mu}C_V\left(1-\frac{T_1}{T_2}\right)(T_2-T_3). \quad (3)$$

Determinemos ahora el rendimiento del ciclo. La cantidad de calor Q_1 que se desprende al quemarse el combustible dentro del cilindro (rama BC de la curva) es igual a

$$Q_1=\frac{m}{\mu}C_V(T_2-T_1). \quad (4)$$

Partiendo de (3) y (4) hallamos el rendimiento

$$\eta'=\frac{A}{Q_1}=\frac{T_2-T_3}{T_2}.$$

Hay que advertir que la temperatura máxima que se alcanza en el ciclo es igual a T_2, mientras que la mínima es T_0; el ciclo de Carnot que se efectuara entre estas mismas temperaturas, T_0 y T_2, tendría un rendimiento

$$\eta=\frac{T_2-T_0}{T_2}\text{ ; y como } T_0<T_3, \text{ tendremos que } \eta'<\eta,$$

es decir, que el rendimiento del motor de combustión interna que hemos estudiado es menor que el del ciclo de Carnot, lo que era de esperar teniendo en cuenta los razonamientos que aportamos en el § 73.

Haciendo uso de la correlación (2), la fórmula del rendimiento puede expresarse de la forma siguiente:

$$\eta'=1-\frac{1}{\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}}.$$

La magnitud V_1/V_2 se llama «razón de compresión». Por consiguiente, el rendimiento del ciclo está determinado totalmente por la «razón de compresión» y por el exponente politrópico γ.

La expresión (3) del trabajo total realizado durante el ciclo, fue obtenida estudiando los trabajos efectuados en sus distintas ramas. Pero a este mismo resultado puede llegarse partiendo del principio de la conservación de la energía. El trabajo A puede expresarse como

$$A = Q_1 - Q_2,$$

donde Q_1 es la cantidad de calor producida durante la explosión de la mezcla combustible y Q_2 la cantidad de calor cedida.

La cantidad de calor Q_1 se expresa por la fórmula (4). La cantidad de calor Q_2 se cede durante el enfriamiento isocoro respresentado por la rama DA de la curva, de donde

$$Q_2=\frac{m}{\mu}C_V(T_3-T_0).$$

Utilizando estas expresiones de Q_1 y Q_2, hallamos

$$A = Q_1 - Q_2 = \frac{m}{\mu} C_V [(T_2 - T_1) - (T_3 - T_0)],$$

que, evidentemente, coincide con (3).

Los motores de cuatro tiempos que funcionan siguiendo el ciclo indicado se emplean mucho; los motores de gasolina para los automóviles son de este tipo. Generalmente, sobre un mismo árbol actúan varios cilindros (cuatro o más). La fase activa de cada uno de estos cilindros se adelanta, con respecto a la del cilindro siguiente, en una misma fracción de período, con lo que se consigue que la marcha del motor sea suave.

3. Ciclo del motor Diesel de cuatro tiempos. El motor Diesel funciona, hasta cierto punto, de forma semejante al motor de gasolina de cuatro tiempos que acabamos de examinar. La principal diferencia que hay entre ellos consiste en que, en el motor Diesel, se emplea un grado de compresión bastante más elevado (que alcanza 30-35 atm o más). Como esta compresión se efectúa, aproximadamente, por vía adiabática, durante ella se produce una gran elevación de la temperatura. Este aumento de la temperatura es suficiente para inflamar la mezcla combustible sin necesidad de chispa eléctrica. La mezcla combustible

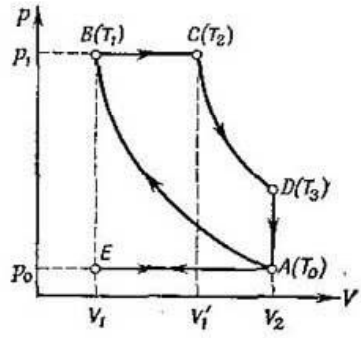


Fig. 182. Ciclo de funcionamiento de un motor Diesel.

se inyecta paulatinamente en el cilindro al finalizar la compresión, lo que da lugar a que su combustión sea relativamente lenta y la primera parte de la carrera de expansión se verifique a presión casi constante. Estas peculiaridades del motor Diesel hacen que su rendimiento sea mayor que el de los motores de cuatro tiempos con encendido por chispa. Además, este motor es más económico, puesto que funciona con combustibles más pesados (petróleo).

El ciclo del motor Diesel se compone de los siguientes tiempos:

a) primer tiempo, durante el cual el pistón, al desplazarse, hace que el aire atmosférico penetre en el cilindro (carrera de admisión). Este proceso se desarrolla a presión constante, igual a la atmosférica p_0 (línea EA, fig. 182);

b) segundo tiempo, durante el cual el pistón comprime adiabáticamente el aire aspirado en el tiempo anterior (línea AB) hasta una presión p_1, dando lugar a que la temperatura se eleve desde T_0 hasta otra, considerablemente mayor, T_1;

c) tercer tiempo, a cuyo comienzo se inyecta el combustible en el cilindro; este combustible se inflama en el aire caliente y se quema, con lo cual hace que el pistón se desplace a presión constante p_1; en estas condiciones se eleva la temperatura, a expensas de la combustión, desde T_1 hasta T_2 (línea BC). Después, la mezcla formada por los gases de la combustión y el aire se expande por vía adiabática (línea CD). Al finalizar el tercer tiempo (punto D) se abre la válvula de escape y la presión que hay dentro del cilindro desciende, a volumen constante V_2, hasta igualarse con la atmosférica p_0 (línea DA);

d) cuarto y último tiempo, durante el cual la mezcla de los gases de la combustión se barre del cilindro (línea AE).

Para determinar el trabajo total A que se realiza durante el ciclo Diesel, emplearemos el principio de la conservación de la energía:

$$A = Q_1 - Q_2,$$

donde Q_1 es el calor que se desprende al quemarse la mezcla, y Q_2, el calor que se cede al espacio circundante.

Como según las condiciones dadas la combustión tiene lugar a presión constante, tendremos que

$$Q_1 = \frac{m}{\mu} C_p (T_2 - T_1).$$

La transformación relacionada con la cesión de calor (línea DA) se cumple por vía isocora, de donde

$$Q_2 = \frac{m}{\mu} C_V (T_3 - T_0).$$

Partiendo de estas expresiones de Q_1 y Q_2, obtenemos

$$A = \frac{m}{\mu} C_V [\gamma (T_2 - T_1) - (T_3 - T_0)].$$

El rendimiento del ciclo Diesel es igual a

$$\eta_D = \frac{A}{Q_1} = 1 - \frac{1}{\gamma} \frac{T_3 - T_0}{T_2 - T_1}.$$

Empleando las ecuaciones de las adiabáticas y de las isobaras, podemos dar a la expresión anterior la forma siguiente:

$$\eta_D = 1 - \frac{\left(\frac{V_1'}{V_1}\right)^{\gamma} - 1}{\gamma \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} \cdot \left(\frac{V_1'}{V_1} - 1\right)},$$

donde V_1' es el volumen correspondiente al punto C (fig. 182). De esta forma, el rendimiento del ciclo Diesel se determina por los valores de las dos razones de compresión, V_2/V_1 y V_1'/V_1, y por el exponente politrópico γ.

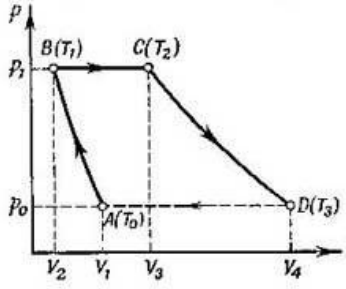


Fig. 183. Ciclo de funcionamiento de un motor pulsorreactor.

El rendimiento de los motores Diesel llega a alcanzar un 35%.

4. Ciclo del motor pulsorreactor. En el § 41 dimos el esquema del motor pulsorreactor. El funcionamiento de este motor también puede equipararse a un ciclo determinado (fig. 183). El aire que entra por el difusor A (véase la fig. 100, del § 41), pasa de la parte delantera, que es más estrecha, a otra más ancha, con lo cual disminuye su velocidad. Al ocurrir esto, de acuerdo con la

ecuación de Bernoulli (§ 40), la presión del aire aumenta desde su valor inicial p_0 hasta un cierto valor final p_1. Así se produce la compresión del aire representada en la fig. 183 por la adiabática (o más exactamente, politrópica) AB. En la cámara de combustión la mezcla activa se calienta a presión constante p_1 (línea BC), adquiriendo una cantidad de calor Q_1; la temperatura de esta mezcla se eleva desde T_1 hasta T_2, y su volumen aumenta de V_2 a V_3. En la tobera C continúa la expansión adiabática y los gases son lanzados al exterior a mayor velocidad, lo que origina una fuerza de reacción. Prácticamente este ciclo no se cierra, pero el esquema puede considerarse cerrado, suponiendo que la substancia que transporta el calor (el aire) vuelve a comprimirse hasta ocupar el volumen V_1, a la presión constante p_0 (segmento DA), cediendo al foco frío una cantidad de calor Q_2. El rendimiento de este ciclo será:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}.$$

Tanto la combustión como el enfriamiento de la mezcla se realizan a presión constante, de donde tendremos que

$$Q_1 = \frac{m}{\mu} C_p (T_2 - T_1),\ Q_2 = \frac{m}{\mu} C_p (T_3 - T_0),\ \text{de donde}$$

$$\eta = 1 - \frac{T_3 - T_0}{T_2 - T_1}.$$

De las ecuaciones de las adiabáticas AB y CD, tenemos:

$$\frac{T_1}{T_0} = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}};\quad \frac{T_2}{T_3} = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}};\quad \text{de donde}$$

$$\frac{T_3}{T_0} = \frac{T_2}{T_1}.$$

Empleando estas correlaciones entre las temperaturas podemos expresar el rendimiento de la forma siguiente:

$$\eta = 1 - \frac{T_3 - T_0}{T_2 - T_1} = 1 - \frac{T_0}{T_1}.$$

Es decir, las temperaturas intermedias T_3 y T_2 no representan ningún papel y el rendimiento depende exclusivamente de los valores que tengan las temperaturas T_0 y T_1.

La relación entre las temperaturas T_0/T_1 puede sustituirse por la razón de los volúmenes V_1/V_2, partiendo de la ecuación de la adiabática AB:

$$\frac{T_1}{T_0} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1},\quad \text{de donde } \eta = 1 - \frac{1}{\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}}.$$

Esta última expresión nos muestra que el rendimiento del motor pulsorreactor depende únicamente de la razón de compresión V_1/V_2 y del exponente politrópico γ. Como la razón de compresión de los reactores construidos según este esquema no es muy grande, su rendimiento es pequeño.

§ 75. Transformaciones reversibles e irreversibles. Hemos llamado reversibles a aquellas transformaciones que pueden efectuarse en ambos sentidos, de modo, que si la transformación se cumple primero

en un sentido y luego en el contrario, el sistema deberá volver a su estado inicial *sin que en los cuerpos que lo rodean ocurran variaciones algunas.*

He aquí un ejemplo de transformación reversible. Sea una bola pesada y perfectamente elástica, que se encuentra sujeta en el punto

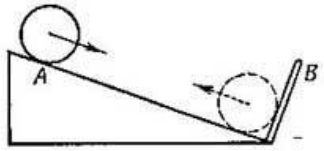


Fig. 184. Descenso reversible de una bola perfectamente elástica.

A (fig. 184) de un plano inclinado. En el extremo inferior del plano inclinado hay una pared fija B, perpendicular a él, y también perfectamente elástica. Si soltamos la bola, bajará rodando por el plano inclinado, chocará con la pared B, rebotará elásticamente en ella

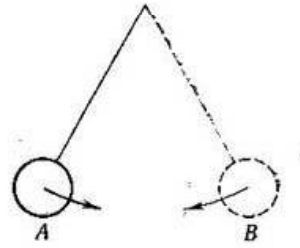


Fig. 185. Balanceo reversible de un péndulo.

y volverá a subir por el plano hasta llegar al punto A. En este ejemplo, la transformación correspondiente al descenso de la bola fue totalmente reversible y la bola volvió a ocupar el punto A, sin que los cuerpos circundantes experimentaran ninguna variación.

También puede servir de ejemplo de transformación reversible el movimiento de un péndulo que oscila sin rozamiento: el camino recorrido por el péndulo durante el primer semiperíodo, desde el punto A hasta el punto B (fig. 185) es el mismo que, en sentido contrario, recorre durante el segundo semiperíodo, y el péndulo vuelve al punto A sin que los cuerpos que lo rodean sufran ninguna variación. En general, puede decirse que todas aquellas transformaciones puramente mecánicas que se realizan sin rozamiento y sin que se produzcan choques inelásticos, son reversibles.

Tomando como ejemplo el ciclo ideal de Carnot vimos, que cierta cantidad de calor $Q_1 - Q_2$ puede transformarse reversiblemente en un trabajo A, aunque esta transformación sea solamente un eslabón de otra transformación más compleja, puesto que va acompañada del paso de la cantidad de calor Q_2 desde el foco caliente hasta el frío. Utilizando este mismo ciclo de Carnot reversible en una máquina frigorífica, podemos recuperar la cantidad de calor $Q_1 - Q_2$,

a expensas del trabajo A, y volver a transportar la cantidad de calor Q_2 desde el foco frío al caliente. Pero subrayamos, que esto únicamente es posible *cuando las variables están en equilibrio en todo momento*, es decir, *cuando el ciclo de Carnot se realiza infinitamente despacio, lo que prácticamente es irrealizable.* Pero toda transformación real de trabajo en calor es irreversible, puesto que dicho proceso puede cumplirse de por sí, es decir, sin que se produzca otro proceso, mientras que la transformación del calor en trabajo siempre va acompañada de algún otro proceso.

Se dice que *una transformación es irreversible cuando su inversa se puede efectuar únicamente como uno de los eslabones de otro proceso más complejo.*

Por consiguiente, en los procesos irreversibles tiene gran importancia *el sentido en que se efectúan.* En uno, que llamaremos «*positivo*», se producen «de por sí», es decir, de manera que pueden ser la *única* transformación que se cumple en un sistema cerrado, mientras que en el sentido opuesto, que llamaremos «*negativo*», pueden realizarse exclusivamente cuando van acompañados de otro proceso «positivo» cualquiera. De esta forma, el trabajo se transforma en calor «de por sí» en todas partes y constantemente. En todos aquellos procesos en que toman parte las fuerzas de rozamiento o tienen lugar acciones inelásticas entre diferentes cuerpos, se produce calor a expensas del trabajo realizado. Pero la transformación del calor en trabajo se observa únicamente como parte de otro proceso más complejo. Cuando se realiza un ciclo de Carnot u otro cualquiera semejante, la transformación del calor en trabajo va acompañada de un proceso «positivo» de transporte de calor desde un foco caliente hasta otro más frío.

El transporte de calor de un cuerpo caliente a otro frío (fenómeno de la conductividad térmica) es también un proceso irreversible. Este proceso, que tiende a igualar las temperaturas de los cuerpos, también se realiza «de por sí», es decir, puede ser el proceso único que se efectúe en un sistema cerrado. Pero el proceso «negativo», es decir, el de transporte de calor de un cuerpo más frío a otro más caliente, no se realiza «de por sí». Cuando valiéndonos de una máquina frigorífica transportamos calor de un cuerpo más frío a otro más caliente, este proceso se realiza paralelamente a otro «positivo», que consiste en el gasto de un trabajo A, el cual se transforma en la cantidad de calor ηQ_1 que se cede al foco caliente.

Como un ejemplo más de proceso irreversible podemos citar el de la expansión de un gas en el vacío. Figurémonos un recipiente que, por medio de un tabique C, está dividido en dos partes iguales A y B (fig. 186). Supongamos que la parte A está llena de gas y que en la B se ha hecho el vacío. Si quitamos el tabique C, el gas se expansionará inmediatamente «de por sí», llenará la parte B y se distribuirá homogéneamente por todo el recipiente. Para volverlo a com-

primir en la parte A no hay más remedio que realizar un trabajo a expensas de las fuerzas exteriores. Como consecuencia de este trabajo el gas se calienta, es decir, el proceso «negativo» de la compresión irá acompañado del proceso «positivo» de la transformación del trabajo en calor.

El proceso «positivo» de la expansión del gas puede ser el mismo que acompaña a la transformación del calor en trabajo. Así, cuando el gas se expande isotérmicamente, toda la cantidad de calor Q, que se comunica a dicho gas desde el exterior, se transforma en el

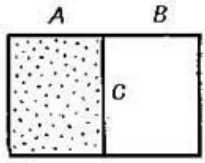


Fig. 186. Distribución del gas entre las dos mitades del recipiente.

trabajo A; en este caso no se produce ningún transporte de calor del cuerpo más caliente al más frío, pero se realiza una expansión irreversible («positiva») del gas. Es decir, que todo proceso «negativo» se compensa necesariamente con un proceso «positivo» cualquiera.

§ 76. Esencia estadística del segundo principio de la Termodinámica. Ahora nos planteamos la pregunta siguiente: ¿cómo es posible conciliar la irreversibilidad de las transformaciones reales con la teoría cinético-molecular de la substancia, según la cual, todas las transformaciones son consecuencia del movimiento mecánico (y, por consiguiente, reversible) de las moléculas?

De acuerdo con la teoría cinética todo gas es un conjunto de moléculas que se mueven desordenadamente y que experimentan choques elásticos entre sí y con las paredes.

El movimiento de cada una de estas moléculas, tomado aisladamente, es reversible. Cabe, pues, preguntarse, ¿por qué es irreversible entonces el movimiento del conjunto de las moléculas?

La respuesta a esta pregunta se basa en el concepto de la probabilidad de los fenómenos aislados y en el cálculo estadístico de los estados más probables.

Para formarnos una idea del concepto de probabilidad, examinaremos el ejemplo más sencillo, es decir, el de un dado. Sea un dado cúbico regular y homogéneo, en cuyas caras estén marcadas las cifras del 1 al 6. El echar el dado representa de por sí un proceso complejo. Como quiera que las condiciones en que se echa son irregulares, la obtención de una cifra u otra es un fenómeno *casual*. Sin embargo si el dado se echa un número suficientemente grande de veces, cada una de las cifras saldrá, aproximadamente, igual número de veces.

Supongamos que el número de jugadas ha sido N y que una cualquiera de las cifras ha salido m veces; entonces, la relación m/N, siempre que el número de jugadas N sea grande, tenderá a un valor determinado (en nuestro caso 1/6). En el límite esta relación m/N, cuando $N \to \infty$, determina *la probabilidad* p de que salga la cifra dada:

$$p = \lim_{N \to \infty} \frac{m}{N}. \qquad (1)$$

Este concepto de la probabilidad puede generalizarse refiriéndolo a cualquier suceso, considerando que si se realizan N ensayos y el número de casos favorables en que se manifiesta este suceso es igual a m, la probabilidad p del mismo también puede expresarse por la igualdad (1).

La probabilidad expresa objetivamente de por sí cierta propiedad real de un fenómeno dado: nos da la característica numérica del grado de posibilidades de que ocurra un suceso determinado en unas condiciones de ensayo también determinadas, las cuales pueden repetirse un número ilimitado de veces. Pero hay que tener presente que, cuando el número de ensayos es limitado, aunque sea grande, el resultado de los mismos *no puede predecirse exacta, sino sólo aproximadamente*, aunque el grado de aproximación aumentará a medida que aumente el número de sucesos.

Los valores de las probabilidades permiten determinar el valor *medio* de diversas magnitudes, cuando se realizan numerosos ensayos. Supongamos, por ejemplo, que al echar el dado queremos hallar el valor medio de las cifras que salen. Si después de N tiradas la cifra n_1 sale m_1 veces, la cifra n_2 sale m_2 veces, etc., tendremos que el valor medio de las cifras que han salido será igual a:

$$\bar{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i m_i}{N},$$

donde k es el número de cifras diferentes que tiene el dado (en nuestro caso $k = 6$).

Cuando $N \to \infty$, por definición, $m_i/N \to p_i$, donde p_i es la probabilidad de que salga la cifra n_i. De esta forma, cuando el número de tiradas es muy grande, el valor medio de las cifras tiende a

$$\bar{n}_\infty = \sum_{i=1}^{k} p_i n_i.$$

En el caso que examinamos todos los

$$p_i = 1/6 \text{ y } \bar{n}_\infty = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3{,}5.$$

Vemos, pues, que esta manera de calcular el valor medio tiene *un carácter estadístico.*

Como indicábamos en el § 66, las magnitudes macroscópicas que caracterizan la substancia tienen carácter de valores medios, obtenidos al promediarse la acción desordenada de todas las moléculas. De hecho no podemos determinar el movimiento de cada una de las moléculas, que en este sentido es casual. No obstante, como su número es enorme, los valores medios carecen de elementos casuales y toman, para las condiciones dadas, valores determinados. Supongamos que se observa una serie de diversos estados macroscópicos de un gas. Cada uno de ellos se presenta, no como consecuencia de un estado determinado del movimiento de las moléculas, sino de muchos. Es evidente que el estado macroscópico que resulte del mayor número de posibles estados del movimiento de las distintas moléculas se producirá con más frecuencia, es decir, será más probable. Para que esto quede más claro, volvamos al ejemplo del gas distribuido entre las dos mitades de un recipiente.

Supongamos primeramente que el gas consta sólo de cuatro moléculas y que todas ellas se encuentran en la parte *A* del recipiente (fig. 186); en la parte *B* del recipiente se ha hecho el vacío. Quitemos el tabique *C*. Al ocurrir esto, algunas moléculas, al moverse desordenadamente, penetrarán en la parte *B* del recipiente, lo que equivale a decir que el gas se ha axpandido. Posteriormente las cuatro moléculas comenzarán a moverse por todo el recipiente, lo que no implica la necesidad de que estas moléculas se distribuyan de tal forma, que en cada una de las mitades de aquél haya dos moléculas. El propio carácter desordenado de su movimiento puede originar distribuciones en las cuales, en una de las partes se encuentren tres moléculas, mientras que en la otra no haya más que una. Puede ocurrir también que, casualmente, las cuatro moléculas vuelvan a trasladarse a la parte *A* del recipiente; si en este momento cerramos el tabique *C*, todo el gas resultará concentrado en esta parte. De esta forma vemos que, cuando el gas tiene sólo cuatro moléculas, es posible que éste, después de expansionarse al principio, vuelva después a comprimirse de por sí. Por lo tanto, el proceso de la expansión del gas resulta reversible.

Sin embargo, este estado en que gracias a su movimiento desordenado todas las moléculas se encuentran en una mitad del recipiente es menos probable que aquellos en los cuales hay cierta cantidad de moléculas en ambas partes. Designemos las cuatro moléculas que estudiamos con las letras *a*, *b*, *c*, *d*, respectivamente. Veremos que son posibles las siguientes 16 distribuciones diferentes entre las dos mitades del recipiente (véase la tabla).

Como el movimiento de las moléculas es desordenado, cualquiera de estos estados puede presentarse con igual frecuencia. Vemos, pues, que el número de casos en que hay moléculas en las dos mitades

es igual a 14, mientras que el número de casos en que una de las mitades se encuentra vacía es igual a 2. Por consiguiente, la distribución según la cual todas las moléculas vuelven a hallarse en la parte A se presenta con una frecuencia 16 veces menor que las demás distribuciones; su probabilidad es igual a 1/16. No obstante, como la velocidad de las moléculas es muy grande, estos estados se suceden entre sí muy de prisa y, evidentemente, no habrá que esperar mucho para que el gas expansionado vuelva a comprimirse «de por sí». Pero esto puede ocurrir solamente cuando el número de moléculas es muy pequeño.

Distribución de las moléculas	Mitad del recipiente A	Mitad del recipiente B	Número de estados
	0	abcd	2
	abcd	0	
	a	bcd	8
	b	acd	
	c	abd	
	d	abc	
	bcd	a	
	acd	b	
	abd	c	
	abc	d	
	ab	cd	6
	ac	bd	
	ad	bc	
	bc	ad	
	bd	ac	
	cd	ab	
Total			16

Puede demostrarse, que el número total de las distribuciones posibles de n moléculas entre las dos mitades de un recipiente es igual a $z = 2^n$. De este número total solamente una de las distribuciones corresponde al caso en que todas las moléculas se encuentran en la mitad A y no hay ni una sola en la mitad B. Pero en la práctica se opera siempre con un enorme número de moléculas n. Si suponemos que la mitad A del recipiente tiene una capacidad igual a 1 cm^3 y que el gas se encuentra en condiciones normales, tendremos que $n = 3 \times 10^{19}$ y, por lo tanto, el número de distribuciones posibles será $z = 2^{30\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000}$, y tan sólo uno de estos z estados corresponde al caso en que todo el gas vuelve de por sí a concentrarse en la parte A del recipiente. La probabilidad de este acontecimiento es tan insignificante que, prácticamente, puede considerarse imposible. De esta forma llegamos a un deducción muy importante: la de que la irreversibilidad de la expansión del gas en el vacío tiene carácter estadístico, es decir, que el proceso «negativo» de la compresión espontánea del gas es muy poco probable.

Este resultado puede generalizarse de la siguiente forma: *es irreversible todo aquel proceso cuyo contrario es poco probable.* El caso en que un proceso contrario al «positivo» se realice como transformación única, en un sistema cerrado, no es imposible en principio. Pero prácticamente no se observa, debido a que la probabilidad de que ocurra es extraordinariamente pequeña. *Todas las transformaciones que tienen lugar en un sistema cerrado se cumplen en el sen-*

tido en que aumenta la probabilidad del estado de dicho sistema.

Todo lo dicho se refiere también al caso en que se cede a un cuerpo cierta cantidad de calor a expensas del trabajo realizado. Este proceso representa la transformación del movimiento macroscópico del cuerpo, realizado bajo la influencia de fuerzas exteriores, en un movimiento desordenado de moléculas. Por consiguiente, este proceso se reduce a la transformación de un *movimiento ordenado en otro desordenado*, es decir, se trata de una transformación probable.

Por el contrario, la obtención de trabajo a expensas de una cantidad de calor absorbida, representa la transformación de un *movimiento desordenado de moléculas en un movimiento ordenado de un cuerpo macroscópico*, transición que es poco probable.

De esta forma, el segundo principio de la Termodinámica, que señala la irreversibilidad de la transformación del trabajo en calor, está relacionado con el hecho de que la transformación del calor en trabajo representa el paso de un estado más probable a otro menos probable. La teoría cinético-molecular de la substancia no sólo no contradice el concepto sobre la irreversibilidad y el segundo principio de la Termodinámica, sino que les da un significado más profundo e indica los límites de su aplicación.

La regularidad expresada por el segundo principio de la Termodinámica tiene, pues, como vemos, un carácter estadístico. De lo antedicho se desprende claramente que toda regularidad estadística se diferencia de cualquier regularidad mecánica (dinámica) de la mecánica clásica, en la cual, para cada proceso individual, partiendo del valor de unas magnitudes físicas se pueden determinar otras unívoca y tan exactamente como se desee. No obstante, la regularidad estadística señala el comportamiento del sistema en su conjunto y, en este sentido, refleja sus cualidades objetivas. Cada fenómeno aislado es casual, pero una gran cantidad de fenómenos casuales conduce a una necesidad objetiva. La regularidad estadística es un ejemplo práctico de la unidad dialéctica que existe entre la casualidad y la necesidad.

Las leyes estadísticas son aproximadas en el sentido de que los resultados que se obtienen sobre su base coinciden tanto mejor con los experimentales cuanto mayor es el número de acontecimientos aislados sobre los cuales se toma el promedio. Cuando se opera en pequeñas escalas pueden observarse discrepancias con las leyes estadísticas.

De aquí se deduce, que el concepto de irreversibilidad de los procesos tiene sentido mientras se trata de cuerpos macroscópicos, es decir, compuestos de un gran número de moléculas. Pero este mismo concepto no es aplicable a conjuntos donde el número de éstas es escaso. En el ejemplo del «gas» compuesto por cuatro moléculas vimos que era posible la compresión espontánea de dicho «gas». Cuando el

número de partículas es pequeño son posibles estados que difieren del más probable. Desde el punto de vista macroscópico, por ejemplo, el estado más probable del gas es el correspondiente a una densidad igual en todas sus partes. Pero si dentro del gas tenemos dos volúmenes contiguos, tan pequeños que sólo puedan contener un número muy reducido de moléculas, en ellos podremos apreciar casos de distribución heterogénea de éstas. El cálculo de la distribución de las cuatro moléculas entre los dos volúmenes iguales demuestra que, en estas condiciones, es más frecuente el estado en que en uno de los volúmenes se encuentran tres moléculas y en el otro una, que aquel en que hay dos moléculas en ambos volúmenes.

Este tipo de discrepancias de los valores medios, que se producen cuando se opera con escalas pequeñas, recibe el nombre de *fluctuación*. Toda magnitud física que sea resultado medio de la acción de muchas moléculas *está sujeta a fluctuaciones*. Estas fluctuaciones se aprecian en muchos fenómenos. Por ejemplo, las fluctuaciones de la densidad de los gases, como veremos en la parte dedicada a la Optica (tomo III), son motivo del color azul del cielo.

La desigualdad de los choques de las moléculas, que se manifiesta cuando las escalas son pequeñas, da lugar a fluctuaciones de la presión. Estas fluctuaciones condicionan el movimiento de las partículas brownianas (compárese con el § 43), que son tan pequeñas, que ya no se someten al segundo principio de la Termodinámica. Una partícula de Brown aislada puede, por ejemplo, elevarse dentro del líquido, contra la acción de la gravedad, desde una capa más baja a otra más alta, por estar sometida a los golpes de las moléculas que realizan movimientos térmicos. El trabajo mecánico de elevación de las partículas se efectúa a expensas de la energía del movimiento térmico de las moléculas, sin ir acompañado de ningún otro proceso. La partícula browniana así elevada puede después, casualmente, volver a descender y transformar su energía potencial en energía del movimiento térmico de las moléculas que la rodean.

En estas escalas microscópicas el proceso de transformación del calor en trabajo resulta reversible y se infringe el segundo principio de la Termodinámica, pero aprovechar esta infracción del segundo principio en dimensiones mayores no es posible. Cualquiera que fuera el mecanismo que intentáramos utilizar para recoger la energía de estas partículas brownianas estaría sujeto a fluctuaciones y no permitiría realizar semejante acumulación de energía.

Es importante señalar, que la existencia de la fluctuación establece el límite de la exactitud de nuestras mediciones. Todo instrumento de medición, por ejemplo, un galvanómetro, tiene un sistema móvil (el índice), cuyo desplazamiento sirve para medir la magnitud física de que se trate. Este sistema móvil está sometido de por sí a fluctuaciones, es decir, a débiles oscilaciones desordenadas. La energía media de estas oscilaciones, como puede demostrarse, es igual a $1/2\ kT$, donde k es la constante de Boltzmann y T, la temperatura del medio ambiente. Por consiguiente, la energía que mide este sistema (por ejemplo: la energía de una corriente eléctrica) deberá ser mayor que $1/2\ kT$. Un cálculo más exacto demuestra que el error ΔE que se comete al medir la energía E es una magnitud del orden de πkT. Cuando la temperatura ambiente es la normal ($T = 290°$ K) obtenemos que: $\pi kT = 1{,}26 \cdot 10^{-20}$ julios. Es decir, que para cada temperatura T dada existe un límite natural de la precisión del instrumento con que se mide, el cual no depende de la perfección con que esté construido.

En la mayoría de los instrumentos de medición este límite está muy lejos de alcanzarse, pero en ciertos aparatos modernos de gran precisión (instrumen-

tos eléctricos, aparatos para medir el flujo de la energía luminosa, etc.) se ha llegado a él. En estos casos, a una temperatura dada T del medio ambiente es imposible aumentar la precisión de dichos aparatos.

Las fluctuaciones de un sistema móvil ligero pueden utilizarse para determinar experimentalmente el número de Avogadro N. Este género de determinaciones da un valor de N cuyo orden es correcto. Para observar las oscilaciones de la fluctuación se emplea un sistema formado por un hilo de cuarzo muy fino, en el que hay colgado un espejito muy pequeño y ligero. Bajo la acción de los golpes de las moléculas del aire que lo rodea, el sistema realiza oscilaciones de torsión desordenadas. Estas oscilaciones se observan directamente por medio de un rayo de luz que se refleja en el espejito. Este rayo reflejado se proyecta sobre una escala situada a suficiente distancia.

La energía cinética media $\overline{E}_c$ de las oscilaciones del espejito, como hemos dicho, es igual a $1/2\,kT$. Por otra parte, $\overline{E}_c$ es igual a la energía potencial media de las oscilaciones $\overline{E}_p$.

Aplicando la fórmula (17) del § 89 para determinar $\overline{E}_p$, obtenemos

$$\overline{E}_p = \frac{1}{2} D\overline{\varphi^2} = \frac{1}{2} kT,$$

donde D es el módulo de torsión del hilo y $\overline{\varphi^2}$ el valor medio del cuadrado del ángulo de desviación.

Esta fórmula puede escribirse de la siguiente manera:

$$\overline{\varphi^2} = \frac{kT}{D}. \qquad (2)$$

Como quiera que la medición directa del módulo de torsión D es difícil, puede utilizarse la expresión de la frecuencia propia de las oscilaciones elásticas de torsión $\left(\text{véase el § 89, donde se da para el período la expresión } T = \frac{1}{\nu_0}\right)$:

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{I}},$$

donde I es el momento de inercia del sistema.

Entonces la correlación (2) toma la forma:

$$\overline{\varphi^2} = \frac{kT}{(2\pi\nu_0)^2 I},$$

donde todas las magnitudes, a excepción de la constante de Boltzmann k, pueden medirse directamente.

Después de realizar estas mediciones puede hallarse k y, por consiguiente, el numero de Avogadro $N = \frac{R}{k}$.

Otro campo donde la aplicación del segundo principio de la Termodinámica encuentra limitaciones es el que se refiere a las escalas cósmicas. Sobre este particular es necesario detenerse puesto que algunos físicos y filósofos plantearon en la segunda mitad del siglo pasado la hipótesis de la llamada «muerte térmica del Universo». Estos físicos y filósofos, considerando el Universo como un sistema cerrado y aplicándole el segundo principio de la Termodinámica, llegaron a la conclusión de que, con el tiempo, desaparecerán las diferencias

de temperaturas que existen entre los distintos cuerpos celestes y el Universo llegará a encontrarse en un estado de absoluto equilibrio térmico («muerte térmica»).

Esta hipótesis sobre la «muerte térmica» conduce a otra conclusión, a la de que fue necesario un «impulso inicial», capaz de producir en el mundo esta distribución desigual de las temperaturas, es decir, en fin de cuentas a las concepciones típicas del clero: al reconocimiento de la creación del mundo.

La esencia reaccionaria de la teoría de la «muerte térmica» fue puesta al descubierto por Engels, que demostró su falsedad desde el punto de vista científico.

La inconsistencia de la deducción sobre la muerte térmica reside en la extrapolación infundada del segundo principio de la Termodinámica a un sistema que constituye todo el Universo. El segundo principio está relacionado con la irreversibilidad de los procesos que se observan en escalas de espacios y tiempos demasiado reducidas, en comparación con aquellas en que tienen lugar los procesos de evolución de todo el Universo o de los grandes conjuntos estelares. Incluso en la evolución de una estrella aislada juegan, indudablemente, un papel de extraordinaria importancia algunos procesos que en nuestro planeta apenas si influyen, como, por ejemplo, la transformación de los elementos. Las leyes que rigen estos procesos son aún poco conocidas.

Por consiguiente, cuando el segundo principio se hace extensivo a todo el Universo y a espacios de tiempo infinitamente grandes se comete un error, que consiste en atribuir a las leyes físicas valores absolutos, olvidando que estas leyes no reflejan la realidad más que de un modo más o menos aproximado (véase el § 2).

§ 77. Desigualdad de Clausius. Entropía. En los párrafos anteriores hemos estudiado que los procesos «negativos» pueden efectuarse únicamente cuando van acompañados de uno de los procesos «positivos».

El estudio del ciclo de Carnot reversible nos indica la cantidad de calor Q_2 que debe transportarse desde el foco de temperatura T_1 hasta el foco de temperatura T_2, para que la cantidad de calor $Q_1 - Q_2$ pueda ser transformada en el trabajo A. Esta correlación cuantitativa la utilizaremos ahora en la forma representada por la fórmula (12) del § 73:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}. \tag{1}$$

En el § 73 convinimos en denominar Q_1 la cantidad de calor que recibe del foco caliente el agente de la transformación y $-Q_2$, la que dicho agente cede al foco frío. Cambiemos ahora estas denominaciones y designemos con la letra Q (sin signo) la cantidad de calor que ceden al agente de transformación tanto el foco caliente como el frío. Entonces, si Q_2 representa la cantidad de calor cedida por el foco frío a dicho agente, tendrá lugar la desigualdad $Q_2 < 0$; partiendo de esto la correlación (1) deberá escribirse de la forma:

$$\frac{Q_1}{-Q_2} = \frac{T_1}{T_2}, \tag{1a}$$

de donde obtenemos que

$$\frac{Q_1}{T_1}+\frac{Q_2}{T_2}=0. \tag{2}$$

Designemos por el momento la relación Q/T con el nombre de *cantidad de calor reducida* y el contenido de la ecuación (2) puede enunciarse así: *para el ciclo de Carnot reversible, la suma de las cantidades de calor reducidas es igual a cero.*

Como vimos en el § 73, el rendimiento de cualquier ciclo de Carnot cumple la desigualdad:

$$\eta=\frac{Q_1-Q_2}{Q_1}\leqslant\frac{T_1-T_2}{T_1}$$

(al ciclo reversible corresponde únicamente el signo de igualdad) Por esto, para cualquier ciclo de Carnot, obtenemos:

$$\frac{Q_1}{T_1}+\frac{Q_2}{T_2}\leqslant 0, \tag{2a}$$

es decir, *cualquiera que sea el ciclo de Carnot, la suma de las cantidades de calor reducidas no puede ser mayor que cero.* Esta desigualdad se conoce con el nombre de *principio (desigualdad) de Clausius.*

Esta desigualdad puede extenderse a cualquier proceso cerrado.

Como vimos en el § 73, cualquier proceso cerrado puede dividirse en un gran número de ciclos de Carnot elementales. Cada uno de estos ciclos de Carnot elementales puede considerarse que se cumple entre un foco caliente, al que corresponde la temperatura T_i, y del que recibe una cantidad de calor ΔQ_i, y un foco mas frío, cuya temperatura es T_k, y al cual cede una cantidad de calor ΔQ_k.

Escribamos la desigualdad de Clausius para este ciclo elemental:

$$\frac{\Delta Q_i}{T_i}+\frac{\Delta Q_k}{T_k}\leqslant 0. \tag{3}$$

El signo de igualdad se cumple cuando el proceso elemental es reversible.

Sumando las expresiones (3) correspondientes a cada uno de los ciclos elementales, obtenemos para todo el ciclo:

$$\sum\frac{\Delta Q}{T}\leqslant 0, \tag{4}$$

es decir, *cualquiera que sea la transformación cerrada, la suma de las cantidades de calor reducidas no puede ser mayor que cero; si el proceso es reversible esta suma será igual a cero.*

Si se trata de un proceso que se cumple por vía reversible puede demostrarse que la suma (4) se transforma en una integral a lo largo de un contorno cerrado:

$$\oint\frac{dQ}{T}=0. \tag{4a}$$

La magnitud dQ se expresa en esta integral por medio de las variables independientes y sus diferenciales. En calidad de variables independientes se toman los parámetros que determinan el estado (p, V o T).

La circunferencia que lleva el signo integral indica que dicha integral se extiende a toda la transformación cerrada reversible.

Cuando el proceso es irreversible la suma (4) no puede sustituirse por la integral a lo largo de un contorno cerrado, puesto que las variables de integración p y T no tienen valores determinados en los tramos irreversibles.

Demostremos ahora que, *si el proceso es reversible, la suma de los calores reducidos que se comunican al cuerpo no depende del camino que haya seguido la transformación.*

Supongamos que un cuerpo determinado pasa, por vía reversible, del estado A (fig. 187) al estado B siguiendo el camino representado por la curva AC_1B. Completemos este camino AC_1B, hasta cerrar el ciclo, y supongamos que el

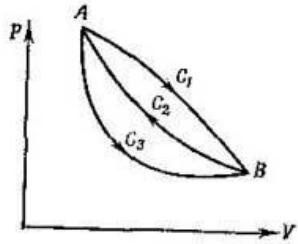


Fig. 187. Diferentes caminos para la transformación entre los estados dados A y B.

camino de regreso ha sido BC_2A. Llamando X a la suma de los calores reducidos correspondiente al camino AC_1B e Y a la correspondiente al camino BC_2A, tendremos que, según la condición (4):

$$X + Y = 0. \tag{5}$$

Tracemos otro camino del estado A al B, representándolo por la curva AC_3B y denominemos X_1 a la suma de los calores reducidos que le corresponden; entonces, para el ciclo AC_3BC_2A tendremos:

$$X_1 + Y = 0.$$

Comparando esta igualdad con la (5), obtenemos que

$$X = X_1,$$

es decir, que las sumas de los calores reducidos, por los caminos AC_1B y AC_3B son iguales entre sí. Lo mismo puede demostrarse con relación a otros caminos cualesquiera que conduzcan del estado A al B.

De aquí que la integral

$$\int_A^B \frac{dQ}{T},$$

que expresa la suma de los calores reducidos para una transformación reversible del estado A al B, no depende del camino que recorra el proceso, sino exclusivamente del estado inicial y final del cuerpo. De esta circunstancia se deduce, que existe una magnitud S, que caracteriza el estado del cuerpo y que para el estado A tiene un valor S_A y para el B, un valor S_B, de forma que

$$S_B - S_A = \int_A^B \frac{dQ}{T}, \tag{6}$$

es decir que en toda transformación reversible que se cumpla entre los estados A y B, la diferencia $S_B - S_A$ será igual a la suma de los calores reducidos.

Esta diferencia $S_B - S_A$ determina la variación de cierta magnitud física S, que es función del estado; esta magnitud física recibe el nombre de *entropía*.

Este razonamiento no nos permite determinar el valor absoluto de la entro-

pía; con él sólo podemos establecer la diferencia entre las entropías, $S_B - S_A$, de dos estados B y A.

Supongamos que un sistema cerrado cualquiera, partiendo del estado A, efectúa *una transformación cerrada reversible ABA* (fig. 188); en este caso, la variación de la entropía al pasar del estado A al B será:

$$S_B - S_A = \int_A^B \frac{dQ}{T}.$$

Llamando S'_A al valor de la entropía del estado A al volver a él después de terminar el ciclo, tendremos que

$$S'_A - S_B = \int_B^A \frac{dQ}{T}.$$

Pero según la condición (4a), para un proceso reversible

$$\int_A^B \frac{dQ}{T} + \int_B^A \frac{dQ}{T} = 0, \text{ de donde } S_B - S_A = -(S'_A - S_B), \text{ o}$$

$$S'_A - S_A = 0,$$

es decir, que *cuando se realiza una transformación reversible cerrada la entropía del sistema no varía.*

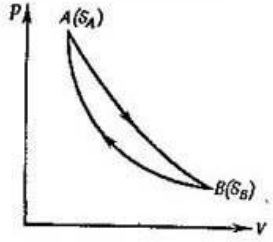


Fig. 188. La entropía no cambia cuando se realiza una transformación reversible cerrada.

Examinemos ahora el paso desde un estado determinado A a otro estado B por vía irreversible, que *convencionalmente* representaremos por la curva AC_1B (fig. 189), y después el regreso del sistema desde el estado B hasta A, eligiendo para ello el camino reversible BC_2A. En este caso, la transformación cerrada AC_1BC_2A, en su totalidad, será irreversible, puesto que es irreversible una de sus partes, de donde

$$\sum_{AC_1B \text{ irrev.}} \frac{\Delta Q}{T} + \int_{BC_2A \text{ rev.}} \frac{dQ}{T} < 0.$$

Pero por definición

$$\int_{BC_2A} \frac{dQ}{T} = S_A - S_B,$$

y por lo tanto

$$\sum_{AC_1B \text{ irrev.}} \frac{\Delta Q}{T} + (S_A - S_B) < 0.$$

de donde

$$S_B - S_A \geqslant \sum_{AC_1B \text{ irrev.}} \frac{\Delta Q}{T}. \qquad (7)$$

En el caso de un sistema aislado, el conjunto de dicho sistema ni recibe ni cede calor, de donde para él todos los ΔQ son iguales a cero y la suma del miembro de la desigualdad (7) se convierte en cero. De aquí se deduce, que *en un sistema aislado únicamente pueden realizarse aquellas transformaciones en que la entropía del sistema no disminuye.*

Si en un sistema aislado se efectuara una transformación en la que la entropía permaneciera invariable, esta transformación podría efectuarse también en sentido contrario, es decir, sería una transformación reversible. Pero si

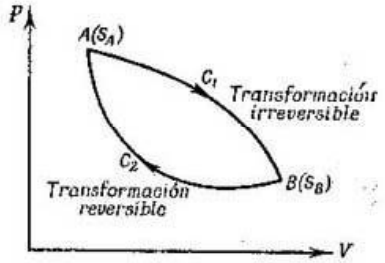


Fig. 189. Transformaciones, reversible e irreversible entre dos estados A y B.

durante la transformación aumentara la entropía, el proceso inverso sería imposible, es decir, la transformación examinada sería irreversible. De esta forma, *cuando en un sistema aislado se cumple una transformación irreversible, la entropía de dicho sistema aumenta.*

Hemos visto con anterioridad que los procesos irreversibles pueden efectuarse en dos sentidos no equivalentes: en un sentido (que llamamos «positivo») la transformación puede realizarse «de por sí», mientras que en el otro («negativo») esto no es posible. Pero hasta ahora no teníamos un criterio para poder resolver la cuestión de en qué sentido debe cumplirse una transformación irreversible dada. La introducción del concepto de entropía resuelve este problema: *en todo sistema cerrado las transformaciones se realizan en el sentido del aumento de la entropía; en el caso particular de que las transformaciones que tienen lugar en el sistema sean reversibles, la entropía se conservará invariable.*

En el § 75 se indicó que el carácter irreversible de las transformaciones está relacionado con el paso de los estados menos probables a los estados más probables. De aquí se desprende que la entropía, que es la que determina el sentido en que se realizan las transformaciones irreversibles, deberá estar también relacionada con la probabilidad. Boltzmann demostró que *la entropía S es proporcional al logaritmo de la probabilidad del estado:*

$$S = k \ln W,$$

donde W es la probabilidad del estado de que se trate y k es la constante de Boltzmann, que hace las veces de coeficiente de proporcionalidad.

Como quiera que $\int_A^B \frac{dQ}{T}$ nos da únicamente la variación de la entropía, el valor de ésta sólo puede determinarse con una exactitud máxima igual a la

constante aditiva:

$$S = \int_0^A \frac{dQ}{T} + S_0, \tag{8}$$

donde $\int \frac{dQ}{T}$ se toma por el camino recorrido al realizarse la transformación desde un estado cuya entropía se considera igual a cero (origen de entropías) hasta el estado A dado.

Derivando (8), obtenemos la expresión de la diferencial total de la entropía

$$dS = \frac{dQ}{T}. \tag{9}$$

Ejemplo 1. Hallar la variación de la entropía al enfriar 100 g de agua desde $t_1 = 10°$ C hasta $t_2 = 0°$ C.

Según la fórmula (6), la variación de la entropía será

$$S_B - S_A = \int_A^B \frac{dQ}{T}.$$

Considerando que la variación que experimenta el volumen del agua al calentarse es insignificante, tendremos que

$$dQ = mc\,dT,$$

donde m es la masa del agua y c su calor específico. El calor específico c del agua puede considerarse constante, de donde

$$S_2 - S_1 = mc \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = mc \ln \frac{T_2}{T_1}. \tag{10}$$

Poniendo en la expresión (10) $m = 100$ g, $c = 1$ cal/g grado, $T_2 = 273°$ K y $T_1 = 288°$ K, obtenemos

$$S_2 - S_1 = 100 \cdot 1 \cdot \ln \frac{273}{288} \text{ cal/grado} = -5{,}1 \text{ cal/grado}.$$

Ejemplo 2. Hallar la variación de la entropía de 280 g de nitrógeno cuando su volumen se hace 5 veces mayor por vía isotérmica.

De acuerdo con el primer principio de la Termodinámica

$$dQ = dU + dA. \tag{11}$$

La variación de las reservas de energía interna dU es igual a

$$dU = \frac{m}{\mu} C_V\,dT,$$

donde μ es el peso molecular y C_V es el calor específico molar del gas a volumen constante.

El trabajo dA es

$$dA = p\,dV.$$

Esta expresión del trabajo podemos transformarla considerando el nitrógeno como un gas perfecto:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT,$$

de donde

$$p = \frac{m}{\mu} \cdot \frac{RT}{V}.$$

Poniendo este valor de p en la fórmula del trabajo dA, obtenemos:

$$dA = \frac{m}{\mu} RT \frac{dV}{V}.$$

Poniendo las expresiones halladas para dU y dA en (11), se tiene que para el gas perfecto

$$dQ = \frac{m}{\mu} \left(C_V \, dT + RT \frac{dV}{V} \right).$$

Valiéndonos de esta expresión de dQ obtenemos la siguiente fórmula para la variación de la entropía

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \frac{m}{\mu} \left(\int_{T_1}^{T_2} C_V \frac{dT}{T} + R \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} \right).$$

Suponiendo que el calor específico C_V no depende de la temperatura, efectuamos la integración:

$$S_2 - S_1 = \frac{m}{\mu} \left(C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1} \right). \qquad (12)$$

Por las condiciones de este ejemplo la expansión se realiza por vía isotérmica, por consiguiente, $T_2 = T_1$, y de acuerdo con (12):

$$S_2 - S_1 = \frac{m}{\mu} R \ln \frac{V_2}{V_1} \cong \frac{290}{28} \cdot 2 \cdot \ln 5 \text{ cal/grado} = 32{,}2 \text{ cal/grado}.$$

Los razonamientos anteriormente expuestos permiten determinar únicamente la variación de la entropía [fórmula (6) pág. 343]. El valor de la propia entropía sólo puede calcularse con una exactitud máxima igual a una constante aditiva [fórmula (8), pág. 346]. Para determinar los valores absolutos de la entropía hay que conocer por lo menos su valor absoluto correspondiente a una temperatura cualquiera. Este valor de la entropía es el que se determina por el teorema enunciado por Nernst, que también suele llamarse tercer principio de la Termodinámica. Según el teorema de Nernst *todos los cuerpos a la temperatura de cero absoluto tienen la entropía igual a cero.*

Calentemos un mol de cualquier substancia, comenzando desde la temperatura de cero absoluto, a presión constante. Para aumentar la temperatura de esta substancia en dT habrá que comunicarle una cantidad de calor:

$$dQ = C_p \, dT,$$

y al ocurrir esto su entropía aumentará en

$$dS = \frac{C_p \, dT}{T}.$$

La integral tomada a presión constante y entre los límites de cero a T nos dará el valor absoluto de la entropía del mol de la substancia dada a la temperatura T:

$$S = \int_0^T \frac{C_p \, dT}{T}.$$

Como quiera que a bajas temperaturas el calor específico molar no es una magnitud constante, sino que depende de la temperatura (§ 93), esta integral puede resolverse con la condición de que sea conocida la variación que experimenta el calor específico molar C_p, con la temperatura, hasta que esta última alcanza el valor de $T = 0$.

CAPITULO IX

Fenómenos moleçulares en los líquidos

§ 78. **Estructura de los líquidos. Presión molecular.** El estado líquido es un estado intermedio entre el gaseoso y el sólido y, por consiguiente, ofrece semejanzas tanto con aquél como con éste. Como vimos en el § 62, la ecuación de Van der Waals no se circunscribe al estado gaseoso de la substancia, sino que también refleja ciertas propiedades del estado líquido. La ecuación de Van der Waals indica asimismo la posibilidad del paso continuo del estado líquido al gaseoso por el punto crítico. Cerca del punto crítico la diferencia entre el gas y el líquido es insignificante y este último puede considerarse, hasta cierto punto, como un gas denso. Pero esta misma ecuación de Van der Waals demuestra que, a temperaturas bastante más bajas que la crítica, la diferencia entre el estado líquido y el gaseoso se hace muy apreciable. La densidad de los vapores saturados de muchos líquidos, a 18-20° C de temperatura, es mil e incluso varios millares de veces menor que la densidad del líquido. Entre las isotermas de Van der Waals, como vimos en el § 62, hay algunas comprendidas parcialmente en el campo de las presiones negativas; estas isotermas indican que puede existir un estado en el cual el líquido está «estirado». Los experimentos confirman que esto es realmente posible y que este estado corresponde a una cierta resistencia a la ruptura por tracción que tienen los líquidos. En este sentido el líquido se asemeja al cuerpo sólido. Más adelante veremos que semejanzas entre líquidos y sólidos existen en una serie de aspectos, sobre todo, cuando los líquidos se encuentran en condiciones próximas a la solidificación (cristalización).

Desde el punto de vista cinético-molecular el estado gaseoso de la substancia se caracteriza por las grandes distancias medias que hay entre las moléculas; el movimiento térmico de las moléculas gaseosas se reduce a un movimiento libre a lo largo de un recorrido libre, el cual es varias veces mayor que las dimensiones de las propias moléculas. En los gases la difusión se produce a una velocidad sensible. En los líquidos, por el contrario, las moléculas se encuentran mucho más próximas entre sí que en los gases y entre ellas existen fuerzas de interacción mayores. La difusión se realiza en los líquidos mucho más lentamente que en los gases. Pero al mismo tiempo, la estructura de los líquidos se diferencia considerablemente de la de los cuerpos

sólidos, en los cuales no existe prácticamente la difusión. En los sólidos cada partícula (átomo, ion) oscila alrededor de su posición de equilibrio, con la particularidad de que, en la red ideal del cristal sólido (§ 87) todos los «sitios» para las partículas están ocupados. Los líquidos tienen una estructura más «mullida» que los sólidos; en ella existen sitios libres o «huecos», gracias a los cuales las moléculas pueden desplazarse, abandonando su puesto y ocupando uno de los «huecos» libres vecinos. Según la teoría de Y. Frenkel, el movimiento térmico tiene en los líquidos el carácter siguiente: cada molécula oscila alrededor de un sitio de equilibrio durante cierto espacio de tiempo. Después, esta molécula cambia este sitio de equilibrio, trasladándose a una distancia comparable con las dimensiones de las propias moléculas. De esta forma las moléculas se van desplazando lentamente dentro del líquido, pero permaneciendo parte del tiempo junto a unos sitios determinados, en los cuales, según la expresión figurada de Y. Frenkel, se encuentran en estado «sedentario». Existen ciertas peculiaridades en la estructura de los líquidos que recuerdan la estructura cristalina de los sólidos (véase el § 95).

En los gases la energía cinética media del movimiento térmico de las moléculas es suficiente para vencer las fuerzas de atracción entre ellas; esto hace que las moléculas gaseosas se muevan en todos los sentidos y que el gas se extienda y ocupe todo el espacio disponible.

En los líquidos, por el contrario, la energía cinética media del movimiento térmico es insuficiente para vencer las fuerzas de cohesión. A esto se debe que los líquidos sean cuerpos con volumen determinado. De los líquidos solamente pueden escaparse las moléculas más rápidas, las cuales dan lugar al proceso de evaporación del líquido.

En el § 61 vimos que la energía potencial mutua entre dos moléculas gaseosas tiene un mínimo a una cierta distancia r_0 entre dichas moléculas (fig. 154). Sin embargo, la profundidad del pozo de potencial que se forma es pequeña y menor que la energía cinética media $1/2\ kT$, correspondiente a un grado de libertad. Por esta razón las moléculas gaseosas no se mantienen unas junto a otras, sino que después de aproximarse entre sí vuelven a alejarse. En los líquidos la energía cinética del movimiento térmico de las moléculas, como ya hemos visto, es insuficiente para vencer las fuerzas de atracción mutua que existe entre las moléculas. Esta es la causa de que las moléculas se encuentren bastante próximas entre sí y de que cada una de ellas esté rodeada por otras.

Para simplificar, examinemos varias moléculas situadas a lo largo de una recta. Cada molécula de esta recta tendrá dos moléculas vecinas, una a la derecha y otra a la izquierda. Por esto, la energía potencial de esta molécula representa de por sí la suma de dos curvas semejantes a la representada en la fig. 154. Estas mismas curvas se representan en la fig. 190, *a* por medio de líneas de puntos.

La curva resultante (línea llena) da un pozo de potencial bastante profundo. Para el conjunto de las moléculas se forma una curva de potencial ondulada (fig. 190, *b*). La profundidad de algunos de los pozos de potencial ΔE_p es mayor que la energía cinética media $1/2\,kT$ correspondiente a un grado de libertad de una molécula del líquido. Por esto, cada molécula permanece en el pozo de potencial junto a su posición de equilibrio. Sin embargo, para los líquidos, la energía media $1/2\,kT$ no es mucho menor que la profundidad del pozo ΔE_p y, por consiguiente, como existe la fluctuación, la energía cinética de una molécula de vez en cuando resulta suficiente para

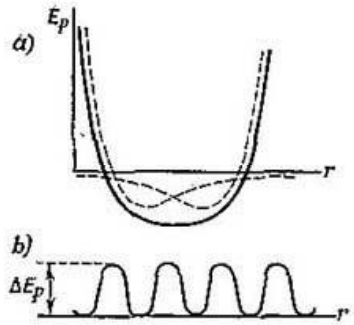


Fig. 190. Curvas de la energía potencial de una molécula del líquido.

hacer que alguna de ellas salte del pozo y ocupe un lugar nuevo entre otras dos moléculas.

Este carácter del movimiento de las moléculas en los líquidos explica tanto la lentitud con que tiene lugar la difusión en ellos, como la gran viscosidad de los líquidos en comparación con los gases. En los gases el rozamiento interno (viscosidad) se explica por el transporte de la cantidad de movimiento dirigido de las moléculas de una capa a otra, a expensas del movimiento térmico de las mismas (§ 56). En los líquidos, junto a este mecanismo de rozamiento interno tiene lugar otro, relacionado con la transmisión de la cantidad de movimiento a expensas de los choques de unas moléculas con otras, de manera análoga a como se transmite la cantidad de movimiento a lo largo de una fila de esferas elásticas que estén en contacto entre sí. El número de choques entre las moléculas es inversamente proporcional al espacio libre que hay entre ellas; por consiguiente, la viscosidad de los líquidos también es inversamente proporcional a este espacio libre. Para un mol de líquido este espacio libre será igual a $V_0 - b$, donde V_0 es el volumen molar del líquido y b, el volumen que ocuparían las moléculas si estuvieran apretadas entre sí (es decir, su volumen real, magnitud que es análoga a la corrección b de la ecuación de Van der Waals). Basándonos en esto podemos ex-

presar la viscosidad del líquido como

$$\eta = \frac{C}{V_0 - b},$$

donde C es constante. Esta fórmula, propuesta por A. Bachinski, puede aplicarse eficazmente a muchos líquidos viscosos.

Y. Frenkel, partiendo del carácter del movimiento térmico de las moléculas en los líquidos, que hemos dado a conocer anteriormente, demostró que la dependencia entre la viscosidad de los líquidos y la temperatura debe venir expresada por la fórmula:

$$\eta = A \cdot e^{\frac{\Delta E_p}{kT}},$$

donde ΔE_p es la profundidad del pozo de potencial en que se encuentra cada molécula. Esta fórmula también se cumple bastante fielmente en una serie de casos.

Pero las propiedades de los líquidos pueden explicarse también por otro procedimiento, que consiste en examinar la energía potencial de una molécula que se halla dentro del líquido con relación a las moléculas que están fuera de él. La energía potencial de una molécula dentro del líquido es *menor* que la que tienen las que están fuera de él. La capa superficial del líquido se encuentra por lo tanto en condiciones distintas que el resto de su volumen. Para que las moléculas salgan del líquido afuera, tienen que vencer una barrera potencial determinada, es decir, realizar un trabajo determinado. La energía media del movimiento térmico de las moléculas es insuficiente para realizar este trabajo y, por consiguiente, el líquido conserva su volumen.

Como vimos al estudiar las propiedades de los gases reales, la existencia de fuerzas de atracción, hace que las moléculas situadas en el límite del gas se encuentren también en condiciones distintas a las de aquellas que se hallan en el interior de la masa gaseosa. Un fenómeno perfectamente análogo tiene lugar en los líquidos.

Si mentalmente destacamos una molécula cualquiera dentro del líquido, tendremos que tener en cuenta la acción que sobre ella ejercen todas las demás moléculas. Pero como las fuerzas intermoleculares disminuyen rápidamente al aumentar la distancia, prácticamente basta con tener en cuenta la acción de aquellas moléculas que se encuentran suficientemente próximas.

Supongamos que r es una distancia tal, que las fuerzas de acción mutua entre dos moléculas, que se encuentren entre sí a una distancia mayor que ella, sean tan pequeñas que puedan despreciarse. Tomemos la molécula dada A (fig. 191) como centro y tracemos a su alrededor una esfera de radio r. Entonces bastará tener en cuenta la acción que ejercen sobre la molécula dada aquellas otras moléculas que se encuentran dentro de la esfera de radio r.

La distancia r suele llamarse *radio de acción molecular*, y la esfera de radio r, *esfera de acción molecular*.

En los líquidos, dentro de la esfera de acción molecular trazada en torno a la molécula dada A se halla un gran número de moléculas. Las fuerzas con que estas moléculas actúan sobre la molécula A están dirigidas en distintos sentidos y tomadas en promedio se compensan entre sí. De esta forma, la fuerza resultante que ejercen en todos los sentidos las demás moléculas sobre la molécula A,

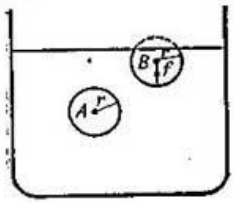


Fig. 191. Radio de acción molecular.

cuando ésta se encuentra sumergida en el líquido, es igual a cero. Pero cuando las moléculas se hallan cerca de la superficie del líquido no ocurre lo mismo. Examinemos lo que ocurre con la molécula B, que se encuentra separada de la superficie del líquido por una distancia menor que el radio de acción molecular r. En este caso, la esfera de acción molecular, como vemos en la fig. 191, sólo se encuentra parcialmente dentro del líquido, mientras que una parte de ella está fuera de él. Supongamos que sobre la superficie del líquido hay una substancia en estado gaseoso, por ejemplo, vapor del mismo líquido.

Como la concentración de moléculas en el vapor es pequeña, en general podemos despreciar su acción. Por consiguiente, debemos tener en cuenta únicamente la acción que ejercen sobre la molécula B aquellas otras que están comprendidas en la parte de su esfera de acción que se encuentra dentro del líquido. En estas condiciones resulta que sobre la molécula B actúa un número de moléculas diferente por cada lado. Las fuerzas que estas moléculas ejercen sobre la B no se compensan entre sí, sino que dan una resultante f, dirigida *hacia el interior del líquido*. De esta forma, *sobre cada molécula, cuya distancia a la superficie del líquido es menor que el radio de acción molecular r, actúa una fuerza, por parte de las demás moléculas, dirigida hacia el interior del líquido*. Sobre toda la capa próxima a la superficie del líquido actúan fuerzas *normales a ella* y dirigidas hacia el interior. Por esta razón, la capa superficial ejerce sobre el resto del líquido una presión, que se conoce con el nombre de *presión molecular*. Esta presión hace que las moléculas del líquido estén más próximas entre sí, lo que da lugar a que aparezcan entre ellas fuerzas repulsivas, las cuales equilibran a las de compresión originadas por la capa superficial.

Por el razonamiento anterior puede verse que esta presión es idéntica, por su naturaleza, a la presión interna p' de los gases, que se tiene en cuenta en la corrección a/V_0^2 de la ecuación de Van der Waals:

$$\left(p + \frac{a}{V_0^2}\right)(V_0 - b) = RT.$$

Desde el punto de vista cuantitativo, los resultados de la ecuación de Van der Waals no corresponden exactamente a las propiedades reales del estado líquido de la substancia, pero para cálculos aproximados puede utilizarse. Así, por ejemplo, para el agua, en la corrección de Van der Waals tenemos que $a = 5{,}47$ atm l^2/mol^2; el volumen

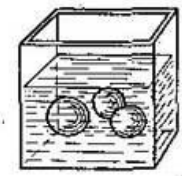


Fig. 192. Gotas de aceite de oliva en una mezcla de agua con alcohol.

de un mol de agua líquida a 0°C $V_0 = 18$ cm³/mol $= 0{,}018$ l/mol, de donde

$$p' = \frac{a}{V_0^2} = \frac{5{,}47}{0{,}018^2} \text{ atm} \cong 17\,000 \text{ atm}.$$

Para otros líquidos la presión interna también es una magnitud del orden de decenas de millares de atmósferas.

Las fuerzas de atracción molecular existentes en la capa superficial del líquido están dirigidas hacia el interior de la masa del líquido. Si sobre el líquido no actúan ningunas otras fuerzas, la posición de equilibrio de su superficie será aquella en que todas estas fuerzas sean normales a ella. Una masa de líquido sobre la que no influyan fuerzas exteriores deberá adoptar forma esférica, por la acción de las fuerzas de la presión molecular. Las gotas pequeñas de líquido, para las que la influencia de la gravedad es relativamente pequeña, toman en efecto la forma de esferas regulares. Cuando se trata de grandes masas líquidas, su tendencia a adoptar la forma esférica puede descubrirse compensando la fuerza de la gravedad sobre la base del principio de Arquímedes. Por ejemplo se puede introducir aceite de oliva en una mezcla de agua con alcohol, preparada de tal manera que su densidad sea igual a la de dicho aceite. En estas condiciones, la acción de la gravedad sobre el aceite se compensa con la presión hidrostática, y el aceite, sometido a su propia presión molecular, toma forma esférica regular (fig. 192).

§ 79. Tensión superficial. Los fenómenos debidos a la presión molecular que ejerce la capa superficial del líquido sobre las demás

capas puede explicarse también desde un punto de vista diferente al expuesto en el §¡78.

La esfera es el cuerpo geométrico que para un mismo volumen tiene menos superficie. Por esta razón, el paso de una masa dada de líquido desde una forma cualquiera, no esférica, a la de esfera, está relacionado con una disminución de su superficie. Por consiguiente, la acción de las fuerzas de la presión molecular que obligan al líquido a tomar

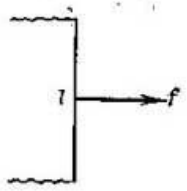


Fig. 193. Fuerza de la tensión superficial.

la forma de esfera es análoga a la que se produciría si la superficie del líquido fuera de por sí una película estirada que tendiera a contraerse. Todos los fenómenos debidos a la existencia de la presión molecular pueden explicarse estudiando la acción de esta película estirada.

Para mantener en equilibrio esta película estirada (fig. 193) hay que aplicar una fuerza f, perpendicular a la línea que la delimita y *tangente a la superficie del líquido*; esta fuerza se llama tensión superficial y evidentemente, será tanto mayor cuanto mayor sea la longitud de la línea l que sirve de límite a la película:

$$f = \alpha l. \tag{1}$$

El coeficiente α, que depende de la naturaleza del líquido, se llama *coeficiente de tensión superficial.*

De (1) podemos obtener:

$$\alpha = \frac{f}{l}. \tag{1a}$$

Es decir, el coeficiente de tensión superficial α es igual numéricamente a la fuerza aplicada a la unidad de longitud del borde de la película superficial del líquido. En el sistema *CGS*, α se mide en dinas/cm.

Para un líquido dado el coeficiente de tensión superficial α depende de la temperatura: cuanto mayor sea la temperatura menor será el coeficiente.

Cuando la temperatura del líquido se aproxima a la crítica T_k (véase el § 62) el coeficiente de tensión superficial α tiende a cero.

Este hecho se hace comprensible si recordamos que en el punto crítico desaparece la diferencia que existe entre los estados líquido y gaseoso.

En la tabla XI se dan los valores del coeficiente de tensión superficial α correspondientes a algunos líquidos, en el sistema *CGS*.

Tabla XI

Valores del coeficiente de tensión superficial α

Líquido	α en dinas/cm a 20° C
Agua	73
Mercurio	540
Glicerina	65
Eter	17

Hallemos ahora el trabajo que hay que realizar para aumentar el área de la película superficial del líquido en una determinada magnitud ΔS. Para esto, por medio de la fuerza f traslademos paralela-

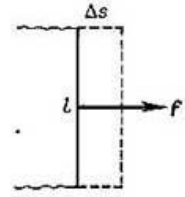


Fig. 194. Determinación del trabajo necesario para aumentar el área de la capa superficial del líquido.

mente a sí mismo el límite de dicha película (fig. 194) a una distancia igual al segmento Δs. El trabajo realizado será

$$\Delta A = f \Delta s,$$

pero por (1) $f = \alpha l$, de donde

$$\Delta A = \alpha l \Delta s.$$

El producto $l \Delta s$ representa el aumento del área de la película ΔS, por lo tanto

$$\Delta A = \alpha \cdot \Delta S.$$

Este trabajo se emplea en aumentar la energía de la película en ΔE, de donde

$$\Delta E = \alpha \Delta S \qquad (2)$$

o

$$\alpha = \frac{\Delta E}{\Delta S}. \qquad (2a)$$

La energía E es la parte de la energía interna de la película que puede transformarse en trabajo por vía isotérmica. En Termodinámica esta parte de la energía se llama *energía libre*.

De la igualdad (2a) obtenemos otra determinación del coeficiente de tensión superficial: el coeficiente de tensión superficial α es numéricamente igual al cociente de dividir la variación de la energía libre de la película superficial por la variación del área de dicha película.

La tensión superficial explica muchos fenómenos característicos del estado líquido de la substancia, por ejemplo, la formación de gotas cuando el líquido sale a través de orificios pequeños, la formación de la espuma, etc. Figurémonos una burbuja de aire *A* que

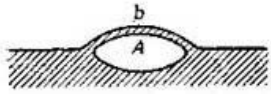


Fig. 195. Burbuja de aire debajo de la superficie del líquido.

sube hacia la superficie del líquido (fig. 195). Al llegar a la superficie, esta burbuja levanta sobre sí misma una tenue capa de líquido en forma de cúpula. Si la burbuja de aire es suficientemente pequeña,

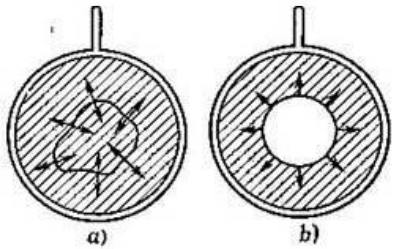


Fig. 196. El contorno del hilo anudado toma la forma de circunferencia al ser extendido por la película de agua jabonosa.

no puede romper la capa superficial y permanece bajo la superficie del líquido. Un gran número de burbujas de este tipo forman en conjunto la espuma.

De todos es conocido el hecho de que el agua de jabón produce con facilidad películas delgadas, a pesar de que el coeficiente de tensión superficial de esta agua (45 dinas/cm) es considerablemente menor que el del agua pura, que es igual a 73 dinas/cm. Esto se explica por la gran viscosidad del agua de jabón, que hace que esta última escurra por la acción de la gravedad más despacio que el agua pura, por lo que se retiene más fácilmente entre las capas superficiales. En las películas delgadas, donde las superficies son muy grandes, mientras que la masa del líquido comprendida entre ellas es muy pequeña, el fenómeno de la tensión superficial se deja sentir de forma muy acusada. Una película jabonosa delgada se comporta de manera muy semejante a como lo haría una membrana de goma estirada y es muy cómoda para estudiar los fenómenos de la tensión superficial. Por ejemplo, introduciendo un anillo de alambre en una disolución jabonosa y extrayéndolo con cuidado, sobre el anillo queda extendida una película líquida (fig. 196, *a*); si sobre esta película se deposi-

ta un trocito de hilo cuyos extremos estén anudados entre sí, éste conservará la forma arbitraria que tome en el primer momento; porque sobre cada una de sus partes actuarán, por ambos lados, fuerzas iguales que se equilibran mutuamente. Pero si se rompe la parte de película que hay dentro del contorno que forma el hilo, sin tocar el resto de la misma, las fuerzas antedichas dejarán de estar en equilibrio y el hilo tomará una forma circular (fig. 196, *b*), atirantado por la acción de la película que hay fuera de él.

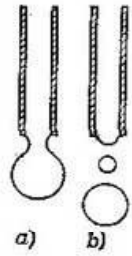


Fig. 197. Formación de las gotas.

Examinemos también cómo se forman las gotas cuando el líquido sale lentamente de un tubo vertical. La tensión superficial impide que el líquido salga inmediatamente del tubo. A medida que el líquido va saliendo, la película superficial de la gota se estrecha por arriba y forma el cuello (fig. 197, *a*). Este estrechamiento acaba rompiéndose, con lo cual la parte inferior del líquido produce la gota caída y del cuello se desprende una gotita complementaria (fig. 197, *b*).

Si el orificio es muy pequeño o la presión que ejerce el líquido es insuficiente, la gota puede no desprenderse. De esta forma, la tensión superficial da lugar a que el líquido no pase a través de mallas muy finas, por ejemplo, a través del tejido de los paraguas o de la lona de las tiendas de campaña.

E j e m p l o. Para valorar el balance de la energía al variar el área de la superficie del líquido, determinar la cantidad de energía que se libera cuando se juntan muchas gotitas de agua de radio $r = 2 \cdot 10^{-3}$ mm para formar una gota grande de radio $R = 2$ mm.

S o l u c i ó n. Designemos el número de gotas pequeñas, que al juntarse forman la grande, por medio de la letra n. Entonces, el área total de la superficie de las gotas pequeñas S será:

$$S = 4\pi r^2 \cdot n. \tag{3}$$

El área de la superficie de la gota grande será $S_0 = 4\pi R^2$, de donde la cantidad de energía liberada al disminuir la superficie por juntarse las gotas, según la fórmula (2), será

$$\Delta E = (S - S_0)\,\alpha = 4\pi\,(r^2 n - R^2)\,\alpha, \tag{4}$$

donde α es el coeficiente de tensión superficial.

El número de gotas pequeñas n podemos calcularlo partiendo del razonamiento que nos dice que la suma de sus volúmenes debe ser igual al volumen de la gota grande:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 n = \frac{4}{3}\pi R^3, \text{ de donde } n = \frac{R^3}{r^3}.$$

Poniendo este valor de n en (4) hallamos:

$$\Delta E = 4\pi R^2 \left(\frac{R}{r} - 1\right)\alpha.$$

Poniendo aquí los valores numéricos $R = 2$ mm, $r = 2 \cdot 10^{-3}$ mm y $\alpha = 73$ dinas/cm, obtenemos:

$$\Delta E = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot (10^3 - 1) \cdot 73 \text{ erg} \cong 3{,}5 \cdot 10^4 \text{ erg} = 3{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ J}.$$

Es decir, la disminución que experimenta la superficie del agua al juntarse las gotas pequeñas en una grande libera una energía igual a $3{,}5 \cdot 10^{-3}$ julios. Esta energía se emplea en calentar la gota.

Por el contrario, si una gota grande se divide en otras más pequeñas se produce un aumento de energía en la película superficial, cuya consecuencia es un determinado enfriamiento de las gotas.

§ 80. Presión debida a la curvatura de la superficie libre. Como explicamos en el párrafo anterior, la película superficial de los líquidos tiene propiedades semejantes a las de una membrana elástica estirada. Si la película está limitada por un contorno plano, ella

Fig. 198. Acción de la curvatura de la superficie del líquido.

misma tiende a adoptar la forma plana. Por consiguiente, si la película es convexa, al tender a ponerse plana, presiona sobre las capas líquidas que se encuentran debajo de ella, mientras que si es cóncava, tira de ellas (fig. 198, *a* y *b*). En otras palabras: *toda película superficial curva ejerce sobre el líquido una presión complementaria, en comparación con aquella que experimenta dicho líquido cuando la película superficial es plana; si la superficie es convexa, la presión complementaria es positiva (sobrepresión); si es cóncava, es negativa (depresión).*

Determinemos el valor de esta presión complementaria para el caso en que la superficie del líquido tenga forma esférica. Supongamos que el radio de la esfera correspondiente es R y aislemos en la superficie un pequeño casquete esférico ΔS (fig. 199). Las fuerzas de tensión superficial aplicadas al contorno de este casquete son tangentes a la superficie esférica. Examinemos la fuerza Δf, aplicada al elemento Δl de dicho contorno. Esta fuerza es

$$\Delta f = \alpha \cdot \Delta l, \qquad (1)$$

donde α es el coeficiente de tensión superficial del líquido. Como esta fuerza es tangente a la superficie esférica, forma cierto ángulo con el radio OC. Por lo tanto, la componente de esta fuerza Δf_1,

paralela al radio OC, no será igual a cero. Si la superficie del líquido es convexa, el centro C se hallará dentro de la masa del líquido y, en este caso, la fuerza Δf_1 comprimirá al líquido que se encuentra debajo del casquete ΔS, es decir, producirá una presión positiva (sobrepresión); si, por el contrario, la superficie es cóncava el centro C estará situado fuera del líquido y la fuerza Δf_1 tirará de éste, es decir, producirá una presión negativa (depresión). Por el dibujo vemos que

$$\Delta f_1 = \Delta f \operatorname{sen} \varphi,$$

de donde por (1)

$$\Delta f_1 = \alpha \Delta l \operatorname{sen} \varphi.$$

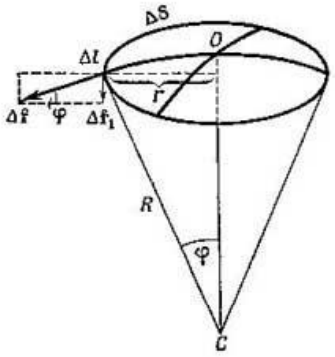


Fig. 199. Determinación de la sobrepresión que existe debajo de la superficie esférica del líquido.

Esta fuerza Δf_1 está aplicada al elemento Δl del contorno. Otras fuerzas idénticas están aplicadas a cada uno de los demás elementos de dicho contorno. Por lo tanto, a todo el casquete esférico ΔS habrá aplicada una fuerza paralela al radio OC

$$f_1 = \Sigma \Delta f_1 = \alpha \operatorname{sen} \varphi \cdot \Sigma \Delta l.$$

La suma $\Sigma \Delta l$ es la longitud del contorno que limita al casquete esférico ΔS. Este contorno es una circunferencia; llamando r al radio de esta circunferencia, tendremos que $\Sigma \Delta l = 2\pi r$, de donde

$$f_1 = \alpha \cdot 2\pi r \operatorname{sen} \varphi. \qquad (2)$$

En la fig. 199 vemos que

$$\operatorname{sin} \varphi = \frac{r}{R}.$$

Poniendo este valor de sen φ en (2) hallamos

$$f_1 = \frac{\alpha \cdot 2\pi r^2}{R}.$$

La presión p podemos obtenerla dividiendo el valor de esta fuerza por el área del plano limitado por el contorno del casquete, es decir, por el área del círculo cuyo radio es r, de donde

$$p = \frac{\alpha \cdot 2\pi r^2}{R \cdot \pi r^2},$$

es decir,

$$p = \frac{2\alpha}{R}. \qquad (3)$$

Esta fórmula nos da el valor de la presión complementaria p que ejerce la película esférica superficial sobre el líquido.

Como puede verse, es directamente proporcional al coeficiente de tensión superficial α e inversamente proporcional al radio R de la superficie. Cuanto mayor es la curvatura de dicha superficie, menor es su radio R y, por consiguiente, mayor es la presión complementaria p.

La existencia de esta presión complementaria debida a la curvatura de la superficie libre da lugar, por ejemplo, a que el aire que hay dentro de una burbuja de jabón se encuentre a mayor presión

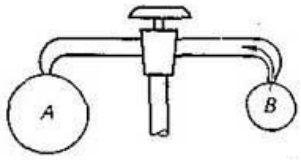


Fig. 200. El aire pasa de la pompa de jabón pequeña a la grande.

que el que está fuera de ella. La diferencia entre estas dos presiones será tanto mayor, cuanto menor sea el radio de la burbuja.

Esto puede demostrarse soplando en los extremos de un tubo de vidrio (fig. 200) dos pompas de jabón A y B de diferentes diámetros. En estas condiciones el aire contenido en la pompa menor se encuentra a mayor presión y comienza a pasar por el tubo a la pompa mayor. En definitiva, la menor se desinfla por completo, mientras que las dimensiones de la mayor aumentan.

E j e m p l o. Para valorar la magnitud de la sobrepresión p, determinar a qué presión se encuentra el aire dentro de una burbuja que se halla debajo de la superficie del agua y cuyo radio es $R = 5 \cdot 10^{-3}$ mm.

S o l u c i ó n. La presión del aire dentro de la burbuja es igual a la suma de la presión atmosférica H y de la sobrepresión p producida por la película de agua que rodea a la burbuja (consideramos que ésta se encuentra inmediatamente debajo de la superficie del agua, de forma que la presión de la capa de agua que hay sobre ella se puede despreciar).

Por la fórmula (3):

$$p = \frac{2\alpha}{R}.$$

Para el agua $\alpha = 73$ dinas/cm, de donde

$$p = \frac{2 \cdot 73}{5 \cdot 10^{-4}} \text{ barias} = 2{,}92 \cdot 10^5 \text{ barias}.$$

Como 1 atm $= 1{,}013 \cdot 10^6$ barias, tenemos que

$$p \cong 0{,}29 \text{ atm}.$$

De donde la presión del aire dentro de la burbuja será

$$p = H + p = 1{,}29 \text{ atm}.$$

§ 81. Presión bajo la superficie curva de un líquido (cualquiera que sea su forma). La expresión obtenida en el § 80 de la presión complementaria p,

para el caso en que la superficie libre tenga forma de casquete esférico, puede hacerse extensiva a una superficie curva cualquiera. Para esto hay que introducir el concepto de *curvatura de una superficie en general*.

Tomemos una superficie curva cualquiera y levantemos en el punto O una perpendicular ON a esta superficie. Hagamos pasar por la normal ON un plano P_1. La línea de intersección de este plano con la superficie se llama sección normal.

En la esfera, cualquier sección normal es un arco de circunferencia A_1B_1 (fig. 201), cuyo radio R coincide con el de aquélla. La magnitud $C = \frac{1}{R}$ nos da la curvatura de la esfera.

En una superficie curva cualquiera, diferentes secciones normales trazadas por un mismo punto O nos darán diferentes curvas geométricas y, por consiguiente, distinta curvatura. En la fig. 201 se indican dos secciones normales diferentes, trazadas por un mismo punto O. Una de estas secciones nos da el arco A_1B_1 cuyo radio de curvatura es $OC_1 = R_1$ y la otra el arco A_2B_2 con radio de curvatura $OC_2 = R_2$.

En la Geometría se demuestra que si por un punto O de una superficie curva cualquiera se

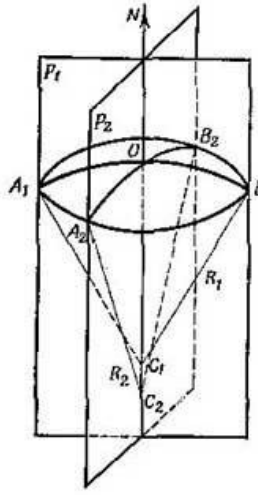


Fig. 201. Secciones normales de la superficie curva del líquido.

trazan *dos secciones normales perpendiculares entre sí* A_1B_1 y A_2B_2, cuyos radios de curvatura respectivos sean R_1 y R_2, la magnitud

$$C = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

tendrá el mismo valor para cualquier otro par de secciones normales que pasen por dicho punto y sean perpendiculares entre sí, Esta magnitud C recibe el nombre *de curvatura media de la superficie en el punto O*.

Elijamos ahora en la superficie curva del líquido (cualquiera que sea su forma) un punto O y tracemos por él dos secciones normales A_1B_1 y A_2B_2 perpendiculares entre sí cuyos radios sean respectivamente R_1 y R_2 (fig. 202). Aislemos en torno al punto O un pequeño cuadrilátero curvilíneo $DEFG$. Llamando Δl_1 a la longitud del arco $\overset{\smile}{DE} = \overset{\smile}{FG}$ y Δl_2 a la del arco $\overset{\smile}{DG} = \overset{\smile}{EF}$, tendremos que el área de dicho cuadrilátero será $\Delta S = \Delta l_1 \cdot \Delta l_2$.

Los demás razonamientos serán idénticos a los que hicimos en el § 80 para el caso de la superficie esférica. La fuerza de la tensión superficial Δf_1, aplicada al borde DE, será

$$\Delta f_1 = \alpha \Delta l_1. \qquad (1)$$

Para calcular la presión que actúa sobre el líquido por parte de la superficie curva hay que tener en cuenta la componente de la fuerza Δf_1, cuya dirección es paralela al radio OC_1. Por la fig. 202 tenemos que

$$\Delta f_1' = \Delta f_1 \cdot \operatorname{sen} \varphi_1. \qquad (2)$$

Pero, aproximadamente,

$$\operatorname{sen} \varphi_1 \cong \varphi_1 = \frac{\overset{\smile}{OA_1}}{OC_1}.$$

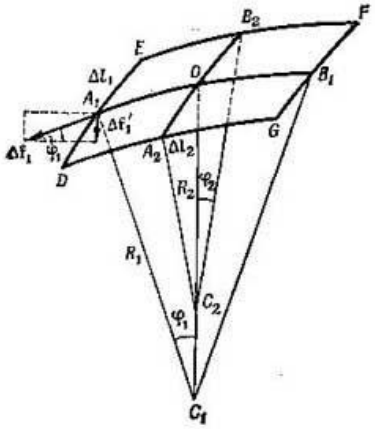
El arco $\overset{\frown}{OA_1} = \frac{\Delta l_2}{2}$ y el segmento OC_1 es igual al radio R_1 de la sección normal A_1B_1, entonces

$$\operatorname{sen} \varphi_1 \cong \frac{\Delta l_2}{2R_1}.$$

Poniendo este valor de sen φ_1 en (2) y aplicando (1), obtenemos

$$\Delta f_1' = \alpha \, \Delta l_1 \, \Delta l_2 \, \frac{1}{2R_1}.$$

Teniendo en cuenta que $\Delta l_1 \Delta l_2 = \Delta S$, hallamos que



$$\Delta f_1' = \alpha \, \Delta S \, \frac{1}{2R_1}.$$

En el borde FG actúa una componente igual que $\Delta f_1'$. De la misma manera hallamos que al borde DG está aplicada otra fuerza componente paralela al radio OC_1,

$$\Delta f_2' = \alpha \, \Delta S \, \frac{1}{2R_2}.$$

Otra componente igual $\Delta f_2'$ tendremos en el borde EF. Todas estas fuerzas

Fig. 202. Determinación de la sobrepresión existente debajo de la superficie curvada del líquido.

componentes que actúan por los cuatro lados del cuadrilátero curvilíneo $DEFG$ dan una resultante paralela al radio OC_1

$$\Delta f' = \Delta f_1' + \Delta f_1' + \Delta f_2' + \Delta f_2' = 2\alpha \, \Delta S \, \frac{1}{2R_1} + 2\alpha \, \Delta S \, \frac{1}{2R_2},$$

de donde

$$\Delta f' = \alpha \, \Delta S \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

La magnitud encerrada en este paréntesis es la curvatura media de la superficie en el punto O y no depende, como dijimos antes, de las secciones normales A_1B_1 y A_2B_2, perpendiculares entre sí, que se elijan.

La presión p, debida a la curvatura de la superficie libre del líquido, podemos hallarla dividiendo el valor de la fuerza $\Delta f'$ por el área ΔS, de donde

$$p = \alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \qquad (3)$$

Esta *fórmula*, que lleva el nombre *de Laplace*, da el valor de la presión complementaria p, debida a la curvatura de la superficie del líquido, cualquiera que sea su forma.

Si la forma es esférica, $R_1 = R_2 = R$, donde R es el radio de la esfera. De aquí que la presión complementaria p que se produce debajo de una superfi-

cie en forma de casquete esférico, según (3), sea:

$$p=\frac{2\alpha}{R},$$

que coincide con la fórmula (3) del § 80.

Examinemos también, como caso particular, la superficie de un cilindro de revolución. Tomemos como una de las secciones normales una generatriz del cilindro (fig. 203); esta sección será una recta, en la que $R_1 = \infty$. La otra

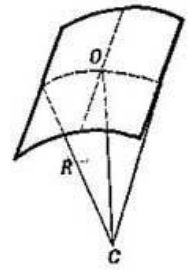


Fig. 203. Superficie cilíndrica.

sección, perpendicular a la primera, será una circunferencia, cuyo radio R_2 será igual al radio R del cilindro.

De aquí se deduce que la presión complementaria p debajo de esta superficie cilíndrica será

$$p=\frac{\alpha}{R}. \qquad (4)$$

§ 82. Fenómenos que se producen en el límite entre los cuerpos líquidos y los sólidos. Capilaridad. Cuando los líquidos están en contacto con un cuerpo sólido hay que tener en cuenta tanto las fuerzas que actúan entre las moléculas del mismo líquido, como las que actúan entre las moléculas del líquido y del sólido.

Aquí pueden ocurrir dos casos: 1) que las fuerzas que actúan entre las moléculas del mismo líquido sean mayores que las que lo hacen entre las moléculas de ambos cuerpos, y 2) que las fuerzas intermoleculares del líquido sean menores que las que actúan entre sus moléculas y las del cuerpo sólido.

En el primer caso se dice que el *líquido no moja al sólido*. En este caso, en la capa del líquido que está en contacto con el sólido *la fuerza resultante está dirigida hacia el líquido*. En condiciones de equilibrio la superficie del líquido se dispone perpendicularmente a esta fuerza y, como resultado, la superficie del líquido que no moja toma, junto a la pared vertical sólida, la posición que se indica en la fig. 204, *a*. Una gota de líquido que no moja toma, sobre una superficie horizontal sólida, la forma de esfera achatada (fig. 204, *b*).

El ángulo θ que forma la tangente a la superifice del líquido con la superficie del cuerpo sólido se llama *ángulo de contacto* o *ángulo de capilaridad*. Cuando el líquido no moja, el ángulo de con-

tacto es obtuso: $\vartheta \geqslant \frac{\pi}{2}$. Si $\vartheta = \pi$ se dice que *el líquido no moja en absoluto*.

En el segundo caso, cuando las fuerzas que actúan entre las moléculas del propio líquido (de cohesión) son menores que las que lo hacen entre éstas y las del sólido (de adherencia), se dice que *el líquido moja al cuerpo sólido*. En este caso, en la capa de líquido que está en contacto con el sólido, *la fuerza resultante está dirigida hacia el sólido*. En estas condiciones, el ángulo de contacto es agudo, es decir, $\vartheta \leqslant \frac{\pi}{2}$. Cuando $\vartheta = 0$ se dice que *el líquido moja perfectamente*.

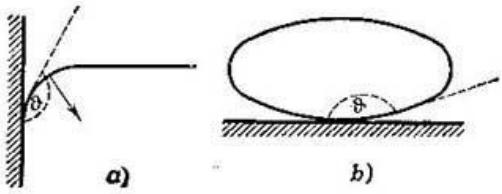


Fig. 204. Angulo de contacto de un líquido que no moja.

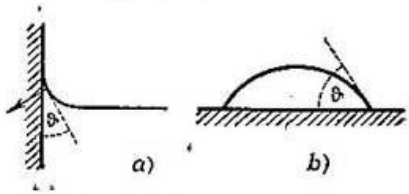


Fig. 205. Angulo de contacto de un líquido que moja.

En la fig. 205, *a* se muestra la disposición de la superficie de un líquido que moja, junto a una pared vertical sólida, y en la fig. 205, *b*, el aspecto de una gota de líquido que moja, sobre una superficie horizontal.

Si la gota de líquido depositada sobre la superficie horizontal del cuerpo sólido moja perfectamente, se extenderá por dicha superficie. Las gotas de los líquidos que no mojan toman formas más o menos esféricas (que dependen de sus dimensiones) y se desplazan fácilmente por la superficie del cuerpo sólido.

Un mismo líquido puede mojar unos cuerpos sólidos y no mojar otros. Por ejemplo, el agua puede decirse que en la práctica moja perfectamente la superficie limpia del vidrio, pero no moja la parafina. El mercurio no moja al vidrio, pero moja una superficie de hierro limpia, etc.

Cuando un líquido que moja está contenido en un tubo cilíndrico estrecho, su superficie libre tiene forma cóncava (fig. 206, *a*), mientras que si se trata de un líquido que no moja, la forma de esta superficie será convexa (fig. 206, *b*). Las superficies líquidas curvas de esta especie reciben el nombre de *meniscos*.

Veamos el caso en que un tubo de pequeño diámetro está introducido por uno de sus extremos en el líquido que hay en un recipiente ancho. Supongamos que el líquido moja el material de que está hecho

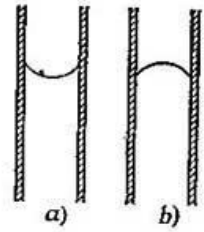


Fig. 206. Forma de los meniscos: a) de los líquidos que mojan, b) de los líquidos que no mojan.

el tubo. Entonces, el menisco que se forma dentro del tubo será cóncavo (fig. 207) y si la sección del tubo es circular, tendrá la forma de casquete esférico.

Debajo de la superficie cóncava del líquido, como dijimos en el § 80, se produce una presión complementaria negativa (depresión) [fórmula (3) del § 80]:

$$p = \frac{2\alpha}{R},$$

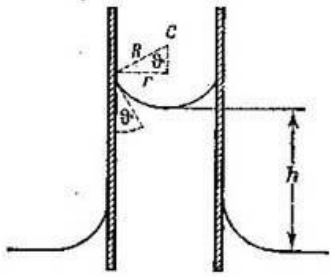


Fig. 207. Elevación capilar de un líquido que moja.

donde R es el radio de la superficie del líquido y α, el coeficiente de tensión superficial.

Como quiera que debajo de la superficie libre plana del líquido que hay en la vasija ancha no existe presión complementaria, dicho líquido se eleva por el tubo hasta la altura h necesaria para que el peso de la columna de líquido equilibre la presión p. La presión que ejerce una columna de líquido de altura h es igual a ρgh, donde ρ es la densidad del líquido y g la aceleración de la gravedad; de donde la condición de equilibrio tendrá la forma:

$$p = \frac{2\alpha}{R} = \rho g h. \qquad (1)$$

Llamando r al radio del tubo y ϑ al ángulo de contacto, de acuerdo con la fig. 207 tenemos:

$$R = \frac{r}{\cos \vartheta}.$$

Poniendo este valor de R en (1), hallamos

$$\frac{2\alpha \cdot \cos \vartheta}{r} = \rho g h,$$

de donde la altura a que se eleva el líquido será:

$$h = \frac{2 \cos \vartheta \cdot \alpha}{r \rho g}. \qquad (2)$$

Poniendo el diámetro $d = 2r$ en lugar de r, obtenemos:

$$h = \frac{4 \cos \vartheta \cdot \alpha}{d \rho g}. \qquad (2a)$$

Por la fórmula (2) puede verse que la altura a que se eleva el líquido será tanto mayor, cuanto menor sea el radio r del tubo, es decir, cuanto más estrecho sea éste. Por esta razón, la elevación de los líquidos que mojan se nota mucho mejor en tubos muy estrechos.

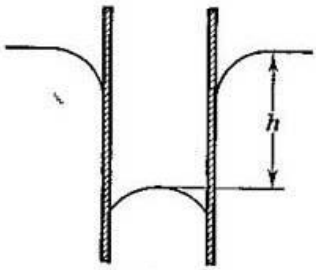


Fig. 208. Depresión capilar de un líquido que no moja.

Estos tubos estrechos suelen llamarse *capilares*, del latín *capillus*, que significa cabello, y el fenómeno de la variación de la altura del nivel de los líquidos que se observa en estos tubos se denomina *capilaridad*.

Para un radio r dado del tubo capilar, la elevación será tanto mayor, cuanto mayor sea el coeficiente de tensión superficial α, más moje el líquido (menor sea el ángulo de contacto ϑ) y menor sea su densidad ρ. Si el líquido moja perfectamente ($\vartheta = 0$) la fórmula (2) toma la forma siguiente:

$$h = \frac{2\alpha}{r \rho g}. \qquad (2b)$$

Cuando el líquido no moja el material de que está hecho el tubo, el menisco que se forma dentro de este último es convexo; la presión complementaria que se produce es positiva y el nivel del líquido en dicho tubo es inferior al que tiene en la vasija ancha (fig. 208). La magnitud del descenso del nivel h de los líquidos que no mojan se determina por la misma fórmula (2) que la altura a que se elevan los líquidos que mojan.

La fórmula (2) puede utilizarse para calcular el coeficiente de tensión superficial α. Para esto se procura elegir un material con respecto al cual el líquido moje perfectamente (o no moje en absoluto). En estas condiciones puede emplearse la fórmula (2b). Conociendo el radio r del tubo, la densidad ρ del líquido y midiendo la altura h

a que este último se eleva (o desciende), se puede calcular directamente el valor de α.

Los fenómenos capilares desempeñan un gran papel en la naturaleza y en la vida práctica. La infiltración del agua en el suelo y en toda clase de materiales porosos se debe a la capilaridad. También se funda en la capilaridad la acción de las mechas, la absorción del agua por el algodón hidrófilo, etc. *La flotación*, que tanto se emplea en la técnica, se basa en los fenómenos a que dan lugar los líquidos que mojan y no mojan. Esquemáticamente, el proceso de la flotación se reduce a lo siguiente: la mezcla de la roca muerta o ganga y del mineral que contiene, se tritura finamente y se remueve dentro de un líquido. Este líquido se elige de tal manera, que moje al mineral pero no a la ganga. A través del líquido se hacen pasar burbujas de aire. Estas burbujas se posan sobre los granitos de roca, que no están impregnados por el líquido, y los elevan a la superficie. Las partículas de mineral, mojadas por el líquido, se van al fondo. De esta forma se consigue separar el mineral de la ganga.

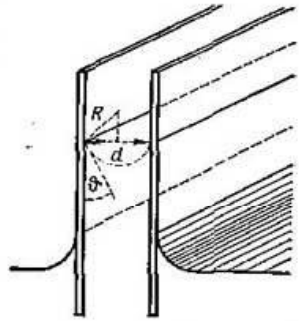


Fig. 209. Elevación de un líquido que moja entre dos láminas paralelas.

Examinemos ahora el caso de un líquido que se encuentra entre dos láminas paralelas separadas entre sí por una distancia d (fig. 209).

La superficie libre del líquido que moja tomará entre las láminas forma cilíndrica. La presión complementaria negativa debajo de esta superficie cilíndrica según la fórmula (4) del § 81 será

$$p = \frac{\alpha}{R},$$

donde R es el radio del cilindro. Cuando el ángulo de contacto es ϑ:

$$R = \frac{\frac{d}{2}}{\cos\vartheta} \quad \text{y} \quad p = \frac{2\alpha\cos\vartheta}{d}.$$

Esta presión equilibra a la de una columna de líquido cuya altura es h:

$$\frac{2\alpha\cos\vartheta}{d} = \rho g h,$$

de donde la altura h a que se eleva el líquido será igual a

$$h = \frac{2\cos\vartheta\cdot\alpha}{d\rho g}. \qquad (3)$$

Comparando las fórmulas (2a) y (3) vemos que la altura a que se eleva el líquido que moja entre dos láminas paralelas separadas entre sí por una distancia d, es dos veces menor que la que alcanza en un tubo de diámetro d.

Resolvamos dos ejemplos de cálculo de la altura de elevación y de la profundidad de depresión capilares de los líquidos.

E j e m p l o 1. Los diámetros de las ramas de un tubo de vidrio en U (fig. 210) son respectivamente iguales a 1 mm y 3 mm. ¿Qué diferencia habrá entre las alturas del agua en ambas ramas?

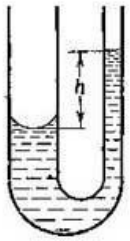


Fig. 210. Elevación del agua en la rama más estrecha de un tubo en U.

S o l u c i ó n. La depresión p_1, producida por la superficie cóncava del agua en la rama más delgada del tubo, se equilibra con la debida a la diferencia entre los niveles del agua (fig. 210) en dichas ramas y con la depresión p_2, que produce la curvatura de la superficie del agua que hay en la rama más ancha:

$$p_1 = h\rho g + p_2, \qquad (4)$$

donde ρ es la densidad del agua y g la aceleración de la gravedad. Suponiendo que el ángulo de contacto $\vartheta = 0$, por la fórmula (3) del § 80, tenemos:

$$p_1 = \frac{2\alpha}{r_1}, \qquad p_2 = \frac{2\alpha}{r_2},$$

donde r_1 y r_2 son respectivamente los radios de los tubos que forman ambas ramas.

Poniendo en lugar de los radios los diámetros $d_1 = 2r_1$ y $d_2 = 2r_2$, obtenemos

$$p_1 = \frac{4\alpha}{d_1}, \qquad p_2 = \frac{4\alpha}{d_2}.$$

Poniendo estos valores de p_1 y p_2 en (4), resulta:

$$\frac{4\alpha}{d_1} = h\rho g + \frac{4\alpha}{d_2},$$

de donde

$$h = \frac{4\alpha}{\rho g}\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right) = \frac{4 \cdot 73}{1 \cdot 980}\left(\frac{1}{0{,}1} - \frac{1}{0{,}3}\right) \text{ cm} \cong 2 \text{ cm}.$$

E j e m p l o 2. Un tubo barométrico (fig. 211), lleno de mercurio, tiene su extremo inferior sumergido en una vasija ancha que contiene el mismo líquido. El diámetro de la sección interior del tubo es igual a 0,4 cm. La diferencia entre los niveles del mercurio es $h = 758$ mm. ¿A qué es igual la presión atmosférica?

S o l u c i ó n. La presión atmosférica no puede medirse directamente por la altura de la columna de mercurio h, puesto que a la presión que ejerce la columna se suma la debida al menisco convexo que forma el mercurio en el tubo. Por lo tanto, la presión atmosférica P equilibra a la presión de la columna

de mercurio h y a la sobrepresión p:

$$P = h\rho g + p.$$

La sobrepresión p es

$$p = \frac{4\alpha\,|\cos\vartheta|}{d},$$

donde d es el diámetro del tubo y ϑ el ángulo de contacto. De donde

$$P = h\rho g + \frac{4\alpha\,|\cos\vartheta|}{d}. \tag{5}$$

Si queremos expresar, como de costumbre, la presión atmosférica P en milímetros de mercurio, tendremos que determinar qué altura h' de la columna

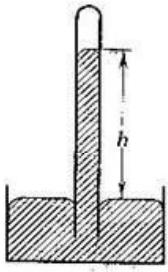


Fig. 211. Influencia de la capilaridad sobre la altura a que se eleva el mercurio en el tubo barométrico.

de mercurio ejercería una presión igual a la sobrepresión p. De la correlación $p = \frac{4\alpha\,|\cos\vartheta|}{d} = h'\rho g$ tenemos que $h' = \frac{4\alpha\,|\cos\vartheta|}{d\rho g}$,

donde hemos tomado el valor absoluto de $|\cos\vartheta|$ porque h' debe ser positivo.

Llamemos H a la presión atmosférica medida en milímetros de mercurio, y entonces, en lugar de (5) tendremos:

$$H = h + h' = h + \frac{4\alpha\,|\cos\vartheta|}{d\rho g}. \tag{6}$$

Suponiendo que en el límite entre el mercurio y el vidrio el ángulo $\vartheta = \pi$, en lugar de (6) obtenemos:

$$H = h + \frac{4\alpha}{d\rho g}. \tag{6a}$$

Para el mercurio, $\alpha = 540$ dinas/cm y $\rho = 13{,}6$ g/cm^3, de donde

$$H = 75{,}8 + \frac{4\cdot 540}{0{,}4\cdot 13{,}6\cdot 980}\ \text{cm} = 76{,}2\ \text{cm Hg}.$$

§ 83. Expansión de una gota por la superficie de un líquido. Películas monomoleculares. Veamos lo que ocurre con una gota (fig. 212) de un líquido determinado I, que se encuentra sobre la superficie CD de otro líquido más denso II. Llamemos α_1 a la tensión superficial del primer líquido y α_2 a la del segundo. En el límite entre ambos líquidos también actúa una tensión superficial, pero es diferente de las que corresponden a las superficies libres de ambos líquidos. Llamemos, pues, $\alpha_{1,2}$ a la tensión superficial que existe en el límite entre los dos líquidos. En cada uno de los puntos de la circunferencia de la gota

se encuentran tres superficies delimitadoras. Por lo tanto, sobre cada unidad de longitud de dicha circunferencia actúan tres fuerzas de tensión superficial f_1, f_2 y $f_{1,2}$, dirigidas tangencialmente a las superficies correspondientes. Las fuerzas f_1 y $f_{1,2}$ tienden a estrechar la gota, mientras que la f_2 la extiende. La forma de equilibrio de la gota será aquella en la cual la suma vectorial de las fuerzas $\mathbf{f}_1$ y $\mathbf{f}_{1,2}$ equilibre a la fuerza $\mathbf{f}_2$. Evidentemente, esto es posible a condición de que $f_2 < f_1 + f_{1,2}$, de donde se deduce que el líquido *I* puede conservar su forma de gota sobre la superficie del líquido *II* si

$$\alpha_2 < \alpha_1 + \alpha_{1,2}.$$

Si la tensión superficial α_2 es tan grande, en comparación con las otras, que

$$\alpha_2 > \alpha_1 + \alpha_{1,2},$$

la resultante de las fuerzas $\mathbf{f}_1$ y $\mathbf{f}_{1,2}$ no podrá equilibrar a la fuerza $\mathbf{f}_2$, cualquiera que sea la forma de la gota, y ésta se extenderá por la superficie del líquido *II*,

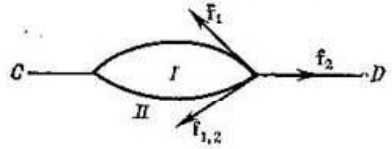


Fig. 212. Una gota de líquido poco denso *I* sobre la superficie de otro más denso *II*.

formando una película o capa muy delgada. Así, por ejemplo, se extienden por la superficie del agua muchos líquidos orgánicos (como el éter o el aceite de trementina). Con ciertos líquidos (como el benceno y los ácidos grasos) el fenómeno de la expansión se observa solamente en las primeras gotas que se depositan sobre la superficie del agua pura; las demás gotas no se extienden, sino que se mantienen sobre dicha superficie en forma de gotas estables. Esto se explica por el hecho de que las primeras gotas se disuelven parcialmente en el agua y con ello disminuyen tanto su tensión superficial que resulta posible el equilibrio de las demás gotas.

Langmuir estudió el comportamiento de películas líquidas muy delgadas sobre la superficie del agua, valiéndose del aparato que muestra la fig. 213. Este aparato está formado por una cubeta de bordes planos llena de agua pura; sobre la superficie del agua pueden desplazarse dos tiras de papel parafinado *A* y *B*. La tira *A* se puede desplazar libremente; la *B* está rígidamente unida al brazo de la balanza *CD*. Cuando la superficie del agua está limpia, los desplazamientos de la tira de papel *A* no influyen en absoluto sobre la posición de la tira *B*. Pero Langmuir disolvía un ácido graso (insoluble en el agua) en benceno y depositaba varias gotas de esta solución en la superficie del agua de la cubeta. El benceno se evaporaba y el ácido graso cubría la superficie del agua formando una tenue película.

Teniendo la precaución de que sobre la parte de la superficie del agua situada a la derecha de la tira *B* no caiga ácido graso, se consigue que la película de este ácido se encuentre solamente por uno de los lados de la tira *B* y comience a moverla con una fuerza f, que puede medirse con la balanza *CD*. Cualquier desplazamiento de la tira *A*, es decir, cualquier variación del área de la superficie de la película de ácido graso, produce una variación de la fuerza f.

Conociendo la concentración de la disolución y la cantidad de ella que se ha echado en el agua, se puede calcular el número de moléculas de ácido graso que hay en la superficie del agua. De aquí que, midiendo el área de la superficie del agua que se encuentra entre las tiras *A* y *B*, es fácil determinar el área ω correspondiente a una molécula. Cuando se desplaza la tira *A*, el area ω varía.

Langmuir midió la fuerza f_0 correspondiente a la unidad de longitud de la tira *B* para diferentes valores de ω. La variación de f_0 en función de ω se muestran

en la fig. 214. La parte hiperbólica de la curva QS corresponde a los valores de ω relativamente grandes (mayores de $20 \cdot 10^{-16}$ cm^2). A partir del punto S la curva tiene forma rectilínea y se eleva con gran inclinación hasta el punto H;

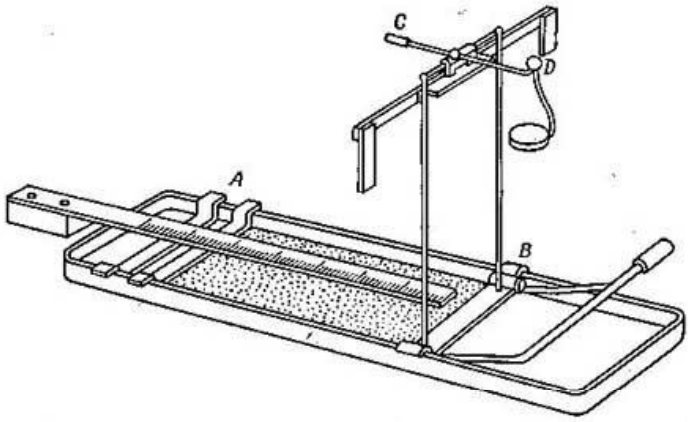


Fig. 213. Aparato para hallar la presión de la película superficial.

después se prolonga casi horizontalmente. El carácter de esta curva puede explicarse de la forma siguiente: cuando las ω son mayores de $20 \cdot 10^{-16}$ cm^2, la superficie correspondiente a una molécula es mayor que sus propias dimensiones. El conjunto de las moléculas del ácido graso que se encuentra en la superficie del agua forma una especie de gas bidimensional. Este gas bidimensional cumple las leyes generales de los gases.

La relación entre la fuerza f_0 correspondiente a la unidad de longitud de la tira (análoga de la presión) y la superficie ω que ocupa la molécula (análoga del volumen), cumple la ley

$$f_0\omega = kT,$$

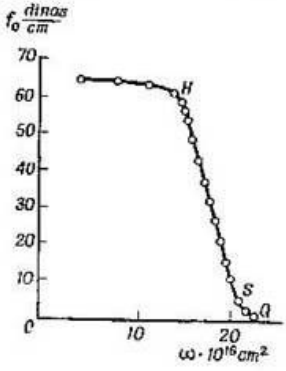


Fig. 214. Diagrama de las variaciones que experimenta la presión de la película superficial en dependencia de su área.

donde T es la temperatura absoluta de la película y k la constante de Boltzmann.

A partir del valor de ω correspondiente al punto S, las moléculas se encuentran en contacto directo unas con otras. Ahora el conjunto de las moléculas del ácido graso forma sobre la superficie del agua una especie de cuerpo sólido bidimensional. Las moléculas de esta película sólida se encuentran formando una capa, por lo que esta película recibe el nombre de *monomolecular*. La recta SH representa la compresibilidad relativamente pequeña de la película monomolecular.

En los puntos situados a la izquierda de H tiene lugar la formación de pliegues en la película, los cuales originan dos y más capas moleculares.

La abscisa del punto S determina la superficie ω_0 correspondiente a una molécula, cuando las moléculas están apretadas entre sí en la superficie del agua. Los experimentos de Langmuir demostraron que a todos los ácidos grasos, comenzando por el ácido palmítico ($C_{15}H_{31}COOH$) y hasta el cerótico ($C_{25}H_{51}COOH$), hay que atribuirles una misma superficie $\omega_0 = 21 \cdot 10^{-16}$ cm^2. Como quiera que sus moléculas tienen el aspecto de largas cadenas, de distinta longitud para los diferentes ácidos, los resultados obtenidos pueden explicarse

Fig. 215. Disposición de las moléculas de los ácidos grasos formando una capa monomolecular sobre la superficie del agua.

por el hecho de que las largas moléculas de los ácidos grasos se encuentran en el agua en posición vertical, de forma que sus extremos con el grupo COOH están sumergidos, mientras que las cadenas de los hidrocarburos $CH_3 - (CH_2)_n$ sobresalen del agua (fig. 215).

§ 84. Evaporación de los líquidos. Si un líquido se encuentra en un recipiente abierto, se evapora, es decir, pasa al estado gaseoso.

La evaporación tiene lugar a cualquier temperatura, pero, cualquiera que sea el líquido, su velocidad de evaporación aumenta al elevarse la temperatura.

El fenómeno de la evaporación, como ya dijimos, se explica por el hecho de que en los líquidos, lo mismo que en los gases, las moléculas tienen distintas energías, que pueden ser mayores o menores que la energía media, y cuyo valor depende de la temperatura T. Por esta razón, cualquiera que sea la temperatura T del líquido, existen en él moléculas tan rápidas que pueden vencer la atracción de las moléculas contiguas y, abriéndose paso a través de la capa superficial, escapan fuera de los límites del líquido. Cuanto más alta es la temperatura de éste, tanto mayor es el número de moléculas rápidas y, por consiguiente, mayor la evaporación.

Durante la evaporación se escapan del líquido las moléculas más rápidas, las cuales, al ocurrir esto, gastan una parte de su energía en realizar el trabajo necesario para librarse de las fuerzas de la cohesión intermolecular que las retiene dentro del líquido. De aquí se deduce, que la energía media de las moléculas que quedan en el líquido disminuye, es decir, el líquido se enfría.

Para mantener constante la temperatura del líquido durante la evaporación hay que comunicarle calor desde el exterior. Este calor se llama *calor de vaporización* y no se invierte en elevar la temperatura, sino en realizar el trabajo necesario para la evaporación.

Se entiende por calor de vaporización λ de un líquido, la *cantidad de calor necesaria para transformar la unidad de masa de este líquido, a temperatura T, en vapor, sin que dicha temperatura varíe.*

Generalmente el calor de vaporización se refiere a un gramo o a un kilogramo de líquido y depende de la temperatura de éste: cuando esta temperatura tiende a su valor crítico T_c, el calor de vaporización tiende a cero.

Si al líquido que se evapora no se le comunica calor del exterior, se enfría. En este hecho se basa un procedimiento para conseguir que descienda la temperatura: el líquido contenido en una vasija de paredes termoaislantes puede enfriarse bastante, haciendo que se evapore intensamente (véase el § 65).

Cuando el vapor se condensa y vuelve al estado líquido, sus moléculas se atraen entre sí y, como consecuencia, sus velocidades y, por consiguiente, sus energías cinéticas, aumentan. Esto hace que se caliente el líquido que se forma: el calor que se gastó en la evaporación se recupera al condensarse el vapor.

Si el líquido se calienta hasta la temperatura en que la tensión de sus vapores saturados se iguala con la presión exterior, la evaporación del líquido comienza a producirse no sólo en la superficie, sino en el seno de toda la masa líquida, en la cual empiezan a formarse burbujas de vapor. Esta evaporación tumultuosa recibe el nombre de *ebullición*. De esta forma, la temperatura de ebullición depende de la presión exterior a que está sometido el líquido. A la presión atmosférica (760 mm Hg) el agua hierve a 100° C; cuando la presión es más baja hierve a menor temperatura y cuando aquélla es más alta, a temperatura mayor.

Las burbujas de vapor que se forman durante la ebullición se engendran con mayor facilidad sobre las burbujas de aire que generalmente existen en el líquido y, sobre todo, adheridas a las paredes de la vasija.

Las burbujas de aire son centros en torno a los cuales comienza la ebullición. Los líquidos exentos de aire se pueden *recalentar*, es decir, calentar a temperaturas mayores que la de ebullición, sin que hiervan. Pero si en un líquido recalentado de este tipo se introducen unas partículas sólidas cualesquiera, a cuyas superficies se adhiere el aire, inmediatamente comenzará a hervir y su temperatura descenderá hasta la de ebullición.

Como quiera que la ebullición del líquido recalentado se produce tumultuosamente, por lo general se procura evitarla, lo que se consigue, por ejemplo, introduciendo en la vasija que lo contiene unos tubos capilares, dentro de los cuales se conservan fácilmente las burbujas de aire.

El calor de vaporización λ se emplea en el trabajo A que realizan las moléculas al pasar a través de la capa superficial del líquido y en el trabajo A', relacionado con el aumento del volumen específico V_0 de la substancia que se produce al pasar ésta del estado líquido al gaseoso:

$$\lambda = A + A'. \qquad (1)$$

El espesor de la capa superficial, entre cuyos límites actúan las fuerzas de atracción moleculares, es una magnitud del orden del radio de acción molecular r (véase el § 78). Llamando $\overline{f}$ a la fuerza media que actúa a lo largo de este radio de acción, obtenemos la expresión del trabajo que realiza una molécula al desprenderse:

$$\Delta A = \overline{f} \cdot r.$$

El trabajo A que efectúa la totalidad de las moléculas que se encuentran en la unidad de masa del líquido será:

$$A = n \cdot \Delta A = n \cdot \overline{f} r,$$

donde n es el número de moléculas que hay en la unidad de masa.

El trabajo A' es

$$A' = p\,(V_0' - V_0),$$

donde V_0' es el volumen específico del vapor; V_0, el volumen específico del líquido, y p, la presión a que se efectúa la evaporación. Poniendo en (1) los valores de A y A', hallamos:

$$\lambda = n\overline{f} r + p\,(V_0' - V_0). \qquad (2)$$

Esta correlación no permite calcular directamente el valor del calor de vaporización λ, puesto que seguimos sin conocer los valores de $\overline{f}$ y de r, pero nos muestra que λ depende de la misma magnitud $\overline{f}$, de la acción intermolecular, que la tensión superficial. Al aumentar la temperatura disminuye la fuerza $\overline{f}$ y la diferencia entre los volúmenes específicos del vapor V_0' y del líquido V_0, de donde, según (2), al aumentar la temperatura disminuye el calor de vaporización λ. Cuando la temperatura se aproxima a su valor crítico T_c la magnitud de la atracción molecular $\overline{f}$ tiende a cero y, al mismo tiempo, desaparece la diferencia entre los volúmenes específicos del vapor V_0' y del líquido V_0, de donde, cuando $T \to T_c$, según (2), el calor de vaporización $\lambda \to 0$, lo que, como hemos dicho, ocurre en realidad.

Partiendo del segundo principio de la Termodinámica se puede establecer la relación que existe entre la tensión de los vapores saturados, la temperatura, el calor de vaporización y la variación del volumen específico al pasar el cuerpo del estado líquido al gaseoso. Supongamos para esto que, dentro de un cilindro y debajo de su pistón, se encuentra un líquido sobre el que hay cierta cantidad de su vapor saturado. Realicemos con esta mezcla un ciclo de Carnot reversible (véase el § 73). Sean T la temperatura inicial y p la tensión del vapor saturado a esta temperatura. Comencemos efectuando una expansión isotérmica. Al ocurrir esto, una masa determinada de líquido m se evapora y pasa al estado de vapor saturado, conservando la presión p. Es decir, la expansión se realiza a presión constante. En la gráfica (fig. 216) esta expansión se representa con la isobara AB. Para que esta expansión tenga lugar realmente a presión constante, hay que ceder a la mezcla el calor de vaporización

$$Q_1 = m\lambda. \qquad (3)$$

El aumento del volumen es

$$\Delta V = m\,(V_0' - V_0),$$

donde V_0' es el volumen específico del vapor y V_0 el volumen específico del líquido. El trabajo realizado durante esta expansión isobárica es igual a

$$A_1 = p \cdot \Delta V = pm\,(V_0' - V_0). \tag{4}$$

Después efectuamos una expansión infinitamente pequeña por vía adiabática (línea BC), durante la cual el descenso de la temperatura será dT y el de la tensión del vapor saturado dp. Una vez conseguido esto, comprimimos la

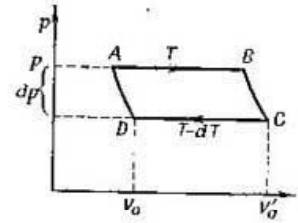


Fig. 216. Ciclo de Carnot efectuado con la mezcla de un líquido con su vapor saturado.

mezcla, a presión constante, en una magnitud ΔV. Esta compresión está representada por la recta CD y tiene lugar a la presión $p - dp$ y a la temperatura $T - dT$, realizándose un trabajo

$$A_2 = -(p - dp)\,\Delta V = -(p - dp)\,m\,(V_0' - V_0). \tag{5}$$

Y finalmente, cerremos el ciclo efectuando la compresión adiabática DA. Durante el ciclo se toma del foco caliente una cantidad de calor Q_1 y se realiza un trabajo A. Despreciando los trabajos infinitesimales que tienen lugar en las transformaciones adiabáticas BC y AD, podemos considerar que $A = A_1 + A_2$. El rendimiento del ciclo reversible de Carnot $\eta' = \frac{A}{Q_1}$, como dijimos en la pág. 319, no depende de la naturaleza del agente de transformación y es igual a $\frac{T_1 - T_2}{T_1}$, donde T_1 es la temperatura del foco caliente (en nuestro caso T) y T_2 la temperatura del foco frío (en nuestro caso $T - dT$). Por consiguiente:

$$\eta' = \frac{A_1 + A_2}{Q_1} = \frac{T - (T - dT)}{T} = \frac{dT}{T}.$$

Poniendo en lugar de Q_1, A_1 y A_2 sus valores, según (3), (4) y (5), obtenemos

$$\frac{m\,(V_0' - V_0)\,dp}{m\lambda} = \frac{dT}{T}, \quad \text{o} \quad \frac{dp}{dT} = \frac{1}{T} \cdot \frac{\lambda}{V_0' - V_0}. \tag{6}$$

La fórmula (6) se conoce con el nombre de fórmula de *Clapeyron-Clausius* y relaciona la magnitud dp/dT (característica de la dependencia entre la tensión del vapor saturado y la temperatura), con el calor de vaporización λ, la variación del volumen específico $V_0' - V_0$ y la temperatura T. La estructura de esta fórmula no depende de la naturaleza del líquido.

§ 85. Disoluciones. Presión osmótica. Como es sabido, las substancias sólidas, hablando en términos generales, se disuelven en los líquidos formando con ellos un medio perfectamente homogéneo (llamado

solución). No obstante, la disolución no es una simple mezcla semejante a la de los gases que no reaccionan químicamente entre sí. D. Mendeléiev, como resultado de amplias investigaciones, que llevó a cabo en los años 1865-1887, demostró que el volumen de la solución no es igual a la suma de los volúmenes del disolvente y del soluto. El proceso de disolución va acompañado de desprendimiento o de absorción de calor. Mendeléiev estableció la existencia de puntos singulares correspondientes a determinadas correlaciones en peso entre el soluto y el disolvente. Todo esto indica la existencia de acciones energéticas entre las moléculas del disolvente y del soluto y aproxima las soluciones a las combinaciones químicas. No obstante, en las soluciones diluidas los efectos indicados juegan escaso papel. En adelante nos limitaremos a estudiar soluciones tan diluidas, que a cada molécula de soluto corresponda un gran número de moléculas de disolvente. En estas soluciones las moléculas de la substancia disuelta están muy separadas entre sí, la interacción entre ellas es muy débil y su conjunto forma algo semejante a un gas. Sin embargo, con respecto a un gas real existe la diferencia de que el movimiento de las moléculas de la substancia disuelta se ve dificultado, por encontrarse entre ellas las moléculas del disolvente, con las cuales chocan constantemente. A esto se debe que el coeficiente de difusión de la substancia disuelta sea mucho menor que el coeficiente de difusión de los gases.

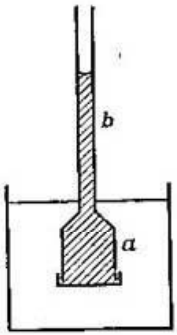


Fig. 217. Determinación de la presión osmótica valiéndose de una membrana semipermeable.

La energía cinética media del movimiento térmico de las moléculas, tanto del disolvente como del soluto, es la misma que en un gas a igual temperatura T: a cada grado de libertad corresponde por término medio una energía:

$$\overline{w} = \frac{1}{2} kT,$$

donde k es la constante de Boltzmann.

El conjunto de las moléculas del soluto, por su semejanza con un gas, deberá ejercer una presión (véase el § 46)

$$p = \frac{2}{3} n_0 \overline{w}, \qquad (1)$$

donde n_0 es el número de moléculas de soluto en la unidad de volumen de la solución. Esta presión p se llama *osmótica*.

Pero el hecho de que en el líquido disolvente exista una enorme presión interna, debida a la película superficial, impide que la presión osmótica pueda observarse directamente.

La presión osmótica p es análoga a la presión parcial de un gas cualquiera, que esté mezclado en pequeña cantidad con otro gas a gran presión p. Por esto, el método de observación de la presión osmótica debe ser el mismo que se emplea para observar la presión parcial de un gas. En el § 47 describimos un experimento en el cual un tabique de platino caldeado, permeable a las moléculas de hidrógeno e impermeable para las de argón, hizo posible la medición directa de la presión parcial del hidrógeno. De manera análoga puede descubrirse la presión osmótica, siempre que se encuentre un tabique que permita el paso de las moléculas del disolvente e impida el de las moléculas del soluto. Estos tabiques se llaman membranas *semipermeables*. Por ejemplo, en el caso de una solución de azúcar, la vejiga de un animal es permeable para las moléculas de agua e impermeable para las de azúcar, de donde se deduce que puede ser empleada para observar y medir la presión osmótica de las soluciones de azúcar.

El esquema del experimento que sirve para observar la presión osmótica está representado en la fig. 217. En un recipiente con agua pura está sumergida una vasija pequeña a, que tiene por fondo una vejiga semipermeable. A la parte superior de la vasija a se sujeta un tubo largo y delgado b. Dentro de esta vasija hay una solución de azúcar. De forma análoga a como en el experimento representado en la fig. 114 el hidrógeno entraba en el recipiente de platino en más cantidad que salía, aquí, en la vasija a entra más agua, a través de la membrana semipermeable, que sale. Este exceso de agua que penetra hace que suba el nivel de la solución en el tubo b, hasta que la presión hidrostática de esta columna de líquido iguala a la presión osmótica («parcial») del azúcar disuelto.

De la fórmula (1) se deduce que la presión osmótica debe cumplir a correlación de Mendeléiev-Clapeyron:

$$p = \frac{m}{\mu \cdot V} RT, \qquad (2)$$

donde m es la masa de la substancia disuelta; μ, su peso molecular; V, el volumen de la solución y R, la constante de los gases.

Introduciendo la magnitud

$$C = \frac{m}{V},$$

que representa *la concentración de la disolución* (igual numéricamente a la masa de soluto contenida en la unidad de volumen de la solución), podemos escribir la fórmula (2) como sigue:

$$p = \frac{C}{\mu} RT. \qquad (3)$$

La fórmula (3) aplicada a la presión osmótica recibe el nombre de *fórmula de Van't Hoff*. De esta fórmula se deduce: 1) que para un soluto dado, a temperatura constante, la presión osmótica p es directamente proporcional a la concentración C; 2) que para un soluto dado, si la concentración no varía, la presión osmótica p es directamente proporcional a la temperatura absoluta de la disolución T; 3) que para diferentes solutos, cuyas concentraciones y temperaturas sean iguales, la presión osmótica p es inversamente proporcional al peso molecular.

Para un gran número de soluciones diluidas la fórmula de Van't Hoff (3) se cumple con bastante fidelidad. Pero hay toda una serie de soluciones, como, por ejemplo, las soluciones de sales inorgánicas, cuyas presiones osmóticas son considerablemente mayores que las calculadas por la fórmula (3).

Esto se explica por el hecho de que las moléculas de estas substancias se descomponen en varias partes al disolverse (*disociación*), y, por consiguiente, aumenta el número de partículas n_0 contenidas en la unidad de volumen del disolvente y, de acuerdo con la fórmula (1), aumenta la presión.

Las soluciones que cumplen la fórmula (3) no son conductoras de la corriente eléctrica, mientras que las soluciones que tienen mayores presiones osmóticas son conductoras (*electrólitos*, véase el t. II). De aquí se deduce que las moléculas al disolverse se disocian no en partes neutras, sino en partes con carga eléctrica (iones).

Los fenómenos relacionados con la presión osmótica desempeñan un gran papel en la naturaleza, sobre todo en los procesos que tienen lugar en los organismos vivos.

Para tener idea de la magnitud de las presiones osmóticas, examinemos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1. En 1 l de agua hay disueltos 34 g de azúcar de caña ($C_{12}H_{22}O_{11}$) a la temperatura de 27° C. Hallar el valor de la presión osmótica.

Solución. Por la fórmula (2):

$$p = \frac{m}{\mu} \cdot \frac{RT}{V};$$

aquí la magnitud R es la constante de los gases, igual a 0,082 l atm/grado mol. El peso molecular μ lo hallamos por medio de la fórmula química del azúcar de caña dada y sabiendo que los pesos atómicos del hidrógeno (H), del carbono (C) y del oxígeno (O) son iguales respectivamente a 1, 12 y 16, de donde $\mu = 342$. Partiendo de estos valores numéricos, tenemos:

$$p = \frac{34}{342} \cdot \frac{0{,}082 \cdot 300}{1} \text{ atm} \cong 2{,}46 \text{ atm}.$$

Vemos, pues, que la presión osmótica llega a alcanzar valores del orden de varias atmósferas.

Ejemplo 2. Determinar en qué relación aumenta la presión osmótica ocasionada por la disociación de las moléculas del soluto, teniendo en cuenta que una parte $\varkappa$ de la totalidad de sus moléculas se disocia en i partículas cada una.

Solución. Llamemos n_0 al número de moléculas de soluto por unidad de volumen, suponiendo que no se produce la disociación. Pero si una parte $\varkappa$ de las moléculas del soluto se disocia en i partes cada una, el número de partículas que se encuentran en la unidad de volumen será:

$$n_0' = n_0 \varkappa i + (1 - \varkappa)\, n_0 = [1 + \varkappa (i - 1)]\, n_0.$$

Como la presión es proporcional al número de partículas por unidad de volumen, tendremos que, como resultado de la disociación, la relación en que aumenta la presión será:

$$\frac{p'}{p} = \frac{n_0'}{n_0} = 1 + \varkappa (i - 1). \tag{4}$$

En las soluciones muy diluidas la disociación suele ser total, es decir, que se disocian todas las moléculas. En este caso $\varkappa = 1$ y la fórmula (4) toma la forma:

$$\frac{p'}{p} = i.$$

Si, por ejemplo, todas las moléculas se disocian en dos partes, $i = 2$ y $p' = 2p$, es decir, como resultado de la disociación la presión se duplicará.

Ejemplo 3. Determinar en qué medida se disocian las moléculas de sal común NaCl cuando en 1 l de agua, a la temperatura de 27° C, se disuelven 2,92 g de sal, sabiendo que en estas condiciones la presión osmótica resultó ser igual a 1,75 atm.

Solución. Llamemos p' a la presión osmótica que se observa de hecho en la disolución de sal común y p a la presión que existiría en ella si no se produjera la disociación. Entonces, basándonos en la fórmula (4), deducida al resolver el ejemplo anterior, tendremos:

$$p' = p\, [1 + \varkappa (i - 1)].$$

Según las condiciones, $i = 2$, de donde

$$p' = p\, (1 + \varkappa).$$

Resolviendo esta igualdad con relación a $\varkappa$, hallamos:

$$\varkappa = \frac{p'}{p} - 1. \tag{5}$$

Por la fórmula de Mendeléiev-Clapeyron

$$p = \frac{m}{\mu} \cdot \frac{RT}{V}.$$

Poniendo este valor de p en (5), obtenemos:

$$\varkappa = \frac{p' \mu V}{mRT} - 1.$$

Sustituyendo las letras por sus valores numéricos, hallamos que

$$\varkappa \approx 0{,}44,$$

es decir, el 0,44 de la totalidad de las moléculas de sal común están disociadas.

§ 86. Presión de los vapores saturados sobre las superficies curvas de los líquidos y sobre las disoluciones. Veamos cómo depende la presión del vapor saturado de un líquido de la curvatura de la

superficie de éste. Supongamos que una determinada cantidad de líquido se encuentra en un recipiente cerrado y que sobre este líquido hay vapor saturado. La presión del vapor saturado sobre la superficie del líquido, a una temperatura dada T, tiene un valor perfectamente determinado p. Esta presión disminuye al aumentar la altura, de acuerdo con la fórmula barométrica (véase el § 51).

Figurémonos que en el líquido se introduce el extremo de un tubo capilar A (fig. 218) y admitamos que el material de que está hecho este tubo es de los que el líquido moja perfectamente. En este

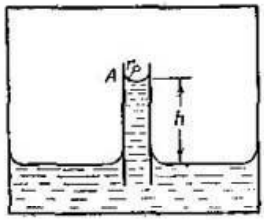


Fig. 218. La tensión del vapor saturado a la altura h es menor que al nivel del líquido en el recipiente.

caso, el menisco del líquido será una superficie cóncava en forma de hemisferio de radio r, igual al radio del tubo capilar. El líquido se elevará por el tubo hasta la altura h, y, según la fórmula (2b) del § 82,

$$h=\frac{2\alpha}{r\rho g}, \qquad (1)$$

donde α es el coeficiente de tensión superficial del líquido y ρ, su densidad.

Admitamos que la presión del vapor saturado sobre la superficie cóncava del líquido, en el tubo capilar, tiene el mismo valor p que sobre la superficie plana del líquido del recipiente. En este caso, el vapor que se desprende de la superficie cóncava en el tubo capilar, que se encuentra a una altura h sobre el nivel del líquido en la vasija, estará a mayor presión que el vapor que lo rodea, puesto que este último, debido a la disminución que experimenta la presión al aumentar la altura, tendrá una presión $p' < p$. Los vapores más densos que se generan pueden realizar un trabajo al expandirse, pero este trabajo resultaría producido a expensas de un solo foco calorífico con temperatura T, sin necesidad de foco frío, lo cual, según el segundo principio de la Termodinámica, es imposible. Por lo tanto, debemos reconocer que la presión del vapor saturado sobre la superficie cóncava del líquido es igual a la presión p' del vapor que lo rodea, puesto que únicamente a esta presión puede establecerse el equilibrio entre el vapor y el líquido que hay en el tubo capilar.

El valor de p' podría determinarse por la fórmula barométrica, pero como la altura h es muy pequeña, se puede admitir que la diferencia $p - p'$ es igual, aproximadamente, a la presión que ejercería una columna homogénea de vapor de altura h y densidad ρ_0, siendo ρ_0 la densidad del vapor saturado del líquido en cuestión a la temperatura T, de donde

$$p - p' = hg\rho_0.$$

Poniendo aquí el valor de h obtenido por la fórmula (1), hallamos

$$p - p' = \frac{2\alpha}{r} \cdot \frac{\rho_0}{\rho},$$

de donde

$$p' = p - \frac{2\alpha}{r} \cdot \frac{\rho_0}{\rho}. \qquad (2)$$

Como vemos por la fórmula (2), $p' < p$, es decir, *la presión del vapor sobre una superficie cóncava es menor que sobre una superficie plana*. Cuanto menor sea el radio de curvatura r de la superficie libre, tanto mayor será la diferencia entre p' y la presión del vapor saturado p que se encuentra sobre la superficie plana.

Examinando el caso de un líquido que no moja al tubo capilar, obtendremos en dicho tubo un menisco convexo y una depresión en el nivel del líquido, con respecto al que se encuentra en la vasija. De aquí podemos deducir, por medio de razonamientos análogos a los del caso anterior, que *la presión del vapor saturado p'' sobre la superficie convexa es mayor que sobre la plana*. La presión p'' será:

$$p'' = p + \frac{2\alpha}{r} \cdot \frac{\rho_0}{\rho}. \qquad (2a)$$

De este último resultado se deduce que la presión del vapor saturado sobre las gotas esféricas es mayor que sobre la superficie plana del líquido, y tanto mayor, cuanto menor sea el radio de dichas gotas. Las gotas de radios diferentes rodeadas de vapor no pueden encontrarse en equilibrio. En estas condiciones las gotas menores se evaporan, mientras que sobre las gotas grandes se condensa el vapor hasta que desaparezcan las menores por completo.

Comparemos ahora la presión del vapor saturado sobre una disolución, con la presión de este mismo vapor sobre el disolvente puro.

Ya a finales del siglo pasado Raoult, basándose en numerosas mediciones llevadas a cabo principalmente con substancias orgánicas, demostró que la presión del vapor saturado p' de un disolvente sobre la solución de una substancia no volátil, es menor que la presión p que dicho vapor ejerce sobre el disolvente puro a la misma temperatura. Por ejemplo, la presión del vapor de agua saturado sobre una solución acuosa de azúcar, es menor que la que este mismo vapor ejerce sobre el agua pura a la misma temperatura. Llamemos ν'

al número de moléculas de la substancia disuelta en ν moles de disolvente puro; entonces, según la ley establecida por Raoult, el descenso relativo de la presión del vapor saturado $\frac{p-p'}{p}$ será

$$\frac{p-p'}{p} = \frac{\nu'}{\nu+\nu'}. \qquad (3)$$

La ley de Raoult puede deducirse estudiando la transformación cerrada siguiente:

1) en el recipiente A (fig. 219) evaporamos un mol de disolvente puro a la presión del vapor saturado p. El volumen del vapor saturado producido lo designamos por V_0;

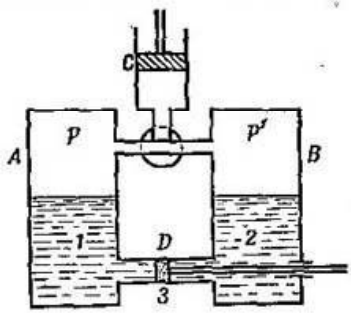


Fig. 219. Esquema para deducir la fórmula del descenso de la tensión del vapor saturado sobre una disolución.

2) valiéndonos de la bomba C, producimos la expansión del vapor hasta un volumen V'_0, que corresponde a la presión p' que tiene el vapor saturado sobre la solución;

3) en el recipiente B condensamos, incorporándolo a la solución, un mol de vapor, que se encontraba a la presión p'.

Estas tres transformaciones se realizan por vía isotérmica, a una misma temperatura T;

4) por medio de un pistón semipermeable hacemos pasar un mol de disolvente desde la solución al disolvente puro.

La suma de los trabajos realizados durante esta transformación cerrada debe ser igual a cero; de lo contrario no se cumpliría el segundo principio de la Termodinámica, puesto que toda la transformación se realiza con un solo depósito de calor a la temperatura T.

Puede comprobarse fácilmente que los trabajos realizados durante las transformaciones 1) y 3) son de igual magnitud y signos contrarios, de manera que al sumar los trabajos de toda la transformación se excluyen entre sí.

El trabajo de expansión del vapor con la bomba C es (véase el § 71)

$$A_1 = RT \ln \frac{p'}{p}.$$

Determinemos además el trabajo que se emplea en hacer pasar el mol de disolvente de la solución al recipiente que contiene disolvente puro. Para esto hay que desplazar el pistón semipermeable D el espacio necesario para que el volumen ΔV de disolvente pase a través de él. Como al hacer esto el pistón se moverá contra la presión osmótica P, se realizará un trabajo

$$A_2 = P \cdot \Delta V.$$

ΔV es el volumen de un mol de disolvente puro, de donde $\Delta V = \frac{\mu}{\rho}$, siendo μ el peso molecular del disolvente y ρ su densidad. De aquí

$$A_2 = P \frac{\mu}{\rho}.$$

La condición exigida $A_1 + A_2 = 0$ nos da:

$$P \cdot \frac{\mu}{\rho} = -RT \ln \frac{p'}{p},$$

de donde obtenemos la presión osmótica P

$$P = \frac{\rho}{\mu} RT \ln \frac{p}{p'}. \qquad (4)$$

Esta expresión puedo transformarse. Escribamos para ello la expresión $\ln \frac{p}{p'}$ de la forma siguiente:

$$\ln \frac{p}{p'} = \ln \left(1 + \frac{p - p'}{p'}\right);$$

y como la variación de la presión $p - p'$ es pequeña, $\frac{p-p'}{p'}$ será mucho menor que la unidad, de donde

$$\ln \left(1 + \frac{p - p'}{p'}\right) \approx \frac{p - p'}{p'}.$$

Haciendo esta sustitución aproximada en la fórmula (4) tenemos:

$$P = \frac{\rho}{\mu} RT \frac{p - p'}{p'}. \qquad (5)$$

Esta fórmula permite calcular el valor de la presión osmótica por el descenso de la presión del vapor saturado sobre la disolución, en lugar de medirlo empleando una membrana semipermeable como se describe en el § 85.

Por la fórmula de Mendeléiev-Clapeyron la presión osmótica P es igual a

$$P = \frac{m'}{\mu'} \frac{RT}{V}.$$

Aquí m' es la masa de la substancia disuelta; μ', su peso molecular, y, por consiguiente, m'/μ' es igual al número de moles de soluto, es decir, igual a ν'. De donde

$$P = \nu' \frac{RT}{V}.$$

Por otra parte, $\frac{\rho}{\mu} = \frac{m}{\mu V}$, donde m es la masa del disolvento y μ, su peso molecular, de donde

$$\frac{\rho}{\mu} = \nu \frac{1}{V},$$

donde ν es el número de moles del disolvente Poniendo estos valores de P y ρ/μ en (5), obtenemos:

$$\frac{p - p'}{p'} = \frac{\nu'}{\nu}, \text{ de donde } \frac{p - p'}{p} = \frac{\nu'}{\nu + \nu'},$$

que es la expresión de la ley de Raoult (3).

CAPITULO X

Sólidos

§ 87. **Cuerpos cristalinos y amorfos.** Los cuerpos sólidos se dividen en dos tipos que se diferencian uno de otro muy sensiblemente por sus propiedades físicas, a saber: 1) *cristalinos* y 2) *amorfos*.

El rasgo fundamental del estado cristalino de la substancia es *la anisotropía*, según la cual, *un cuerpo homogéneo tiene diferentes*

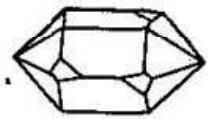


Fig. 220. Cristal de cuarzo.

propiedades en diferentes direcciones. Por ejemplo, el coeficiente de dilatación térmica de un cuerpo cristalino es diferente según las distintas direcciones; en las distintas direcciones son diferentes las propiedades mecánicas, ópticas y eléctricas de los cristales. El rasgo exterior más característico del cristal es su forma geométrica

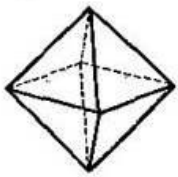


Fig. 221. Cristal de alumbre.

regular. Todos conocen las formas geométricas regulares de las figuras ornamentales (arabescos) que forman los cristales de hielo al helarse el agua en la superficie de los vidrios de las ventanas, y las formas regulares que se observan en los copos de nieve. Los cristales están limitados por caras planas que concurren en las aristas y en los vértices. Generalmente las caras se disponen simétricamente unas respecto a las otras. El cuarzo, por ejemplo, forma cristales que representan prismas hexagonales terminados en pirámides hexagonales (fig. 220); los alumbres cristalizan en octaedros (fig. 221); la sal gema, en cubos, etc. Los ángulos formados por las caras de diferentes ejemplares de una misma substancia cristalina son rigurosamente iguales (constantes). Por ejemplo, en los cristales de cuarzo,

el ángulo entre las caras del prisma y de la pirámide siempre es igual a 38°13'.

Los cuerpos sólidos amorfos son *isotropos* (*isótropos*), es decir, *tienen las mismas propiedades en todas las direcciones.*

Los cristales tienen orientados de determinada manera ciertos planos, por los cuales muchos de ellos se fragmentan fácilmente. Por ejemplo, los cristales de la sal gema se resquebrajan (exfolian) según planos perpendiculares (crucero), de tal manera que los trocitos de sal gema después del resquebrajamiento tienen forma de paralelepípedos; la mica se exfolia fácilmente formando placas delgadas.

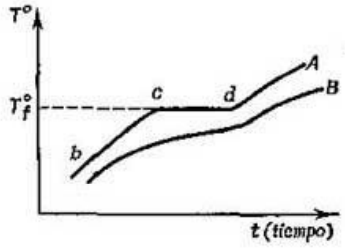


Fig. 222. Curvas de la variación de la temperatura según el tiempo al fundir un cuerpo cristalino (*A*) y otro amorfo (*B*).

En cambio, los cuerpos amorfos siempre ofrecen superficies irregulares de ruptura; de un trozo de vidrio, al romperse, se forman trocitos de forma completamente irregular y casual.

También es diferente el comportamiento de los cuerpos cristalinos y amorfos al fundirse, es decir, al pasar del estado sólido al líquido. Todo cuerpo cristalino tiene una temperatura determinada (punto) de fusión. En la fig. 222, la curva *A* representa la variación de la temperatura en función del tiempo al fundir un cuerpo cristalino calentándolo uniformemente. La parte *bc* de la curva representa el calentamiento del cristal en estado sólido. Al alcanzar el punto de fusión T_f, la temperatura deja de subir debido a que todo el calor que se aplica al cuerpo se invierte en el paso del estado sólido al líquido (*calor de fusión*). El punto *d* corresponde al momento en que el cuerpo ha pasado por completo al estado líquido. La rama de la curva (ascendente) que sigue, corresponde al calentamiento del líquido. Un ejemplo de esta clase de fusión*) nos lo da el hielo: la temperatura del hielo al derretirse se conserva invariablemente igual a 0° C mientras todo el hielo no se transforme en agua. El cuerpo amorfo no presenta en la curva que representa la variación de la temperatura en función del tiempo (curva *B* de la fig. 222), más que una suave desviación que corresponde al intervalo de reblandecimiento; el cuerpo pasa del estado sólido al líquido de un modo continuo.

*) Esta clase de fusión se llama también en español «*fusión brusca, franca o normal*», a diferencia de la «fusión pastosa» de los cuerpos amorfos. (*N. del T.*)

Esta circunstancia aproxima los cuerpos sólidos amorfos a los líquidos de gran viscosidad.

Como modelos de cuerpos amorfos pueden servir el vidrio, las diferentes materias vidriosas, el alquitrán, los betunes, etc.

El estado vidrioso surge a veces al enfriar una substancia cristalina previamente fundida. Al enfriarla lentamente, la temperatura puede llegar a ser inferior a la de fusión (solidificación) sin que el calor de fusión se desprenda y pase la substancia a la fase de cristalización. En este caso, no obstante, la viscosidad se eleva tanto que el cuerpo deja de ser líquido en el sentido común de la palabra y se hace vidrioso. Esta substancia se denomina *líquido sobrefundido* (*o sobrecongelado*). El líquido sobrefundido es inestable: con el tiempo se produce en él el proceso de cristalización.

Ultimamente se ha prestado una atención particular a los cuerpos amorfos de compuestos orgánicos que forman los llamados *polímeros*. En ellos, las moléculas de cuerpos más sencillos (monómeros) se combinan entre sí formando cuerpos más complejos. Por ejemplo, el etanal (aldehido acético o acetaldehido) $CH_3 \cdot CHO$ (cuerpo sencillo o monómero) da el paraldehido, en el cual cada molécula consta de tres moléculas de etanal $(CH_3 \cdot CHO)_3$. Puede haber un alto grado de polimerización cuando en un grupo, generalmente de cadena, se unen hasta varios millares de moléculas sencillas. El correspondiente cuerpo sólido amorfo representa un ovillo de estas moléculas en cadena. Como ejemplos de polímeros pueden servir los cauchos naturales y sintéticos y otros plásticos.

A primera vista puede parecer que el número de cuerpos cristalinos es poco numeroso. Pero en la realidad, tienen estructura cristalina no sólo los cuerpos que presentan una anisotropía y una simetría exterior fáciles de observar. Directa y exteriormente, la estructura cristalina se observa sólo en los cristales grandes e independientes, como son los cristales naturales de cuarzo (cristal de roca), los trocitos de sal gema, etc. Estos cristales independientes se llaman *monocristales*. La mayoría de los cuerpos sólidos tiene *estructura policristalina*. Los polvos de las sales son un conjunto de cristales microscópicos. De la solución de cualquier sal se puede cultivar artificialmente un monocristal grande de esta sal.

Todos los metales tienen también estructura policristalina. Los cristales individuales del metal se mantienen unos junto a otros por las fuerzas moleculares de manera que todo el agregado de estos pequeños cristales forma un trozo de metal, que a simple vista parece uniforme. Debido a la arbitraria orientación de los cristales individuales, el trozo de metal, en su conjunto, no revela propiedades anisotrópicas, aunque los cristales individuales que lo forman son anisótropos.

La estructura policristalina de los metales puede ponerse al descubierto al examinar una superficie pulida del metal. A veces

los cristales son tan grandes que pueden observarse a *simple vista; otras veces se pueden ver solamente al microscopio.*

Ultimamente se han elaborado métodos de obtención de monocristales de diferentes metales. La mayor parte de los monocristales se obtiene enfriando la substancia fundida. Al enfriarse, en la masa fundida se forman generalmente varios centros de cristalización (núcleos o gérmenes). Los cristales pequeños que surgen en estos centros crecen en distintas direcciones a diferentes velocidades acarreando la formación de la estructura policristalina. Para obtener un monocristal hay que crear las condiciones necesarias para que crezca solamente un núcleo. Inoculando en la substancia fundida un germen (un pequeño cristal) y enfriando muy lentamente el recipiente, en su parte inferior se pueden obtener monocristales metálicos de notables dimensiones (por ejemplo, en forma de barra de más de 20 cm de longitud).

En la forma más general, la simetría de los cristales la estudió E. S. Fiódorov, que demostró la existencia de 230 diferentes disposiciones de las partículas en los cristales (grupos espaciales). Además, Fiódorov estableció la relación existente entre la simetría y la composición química de los cristales y elaboró el método del análisis cristaloquímico.

La simetría exterior del cristal es el resultado de la disposición simétrica de las partículas de que consta. Esta idea fue enunciada ya a fines del siglo XVIII. En la actualidad se ha demostrado directamente que los átomos se colocan simétricamente unos respecto a otros en los cristales *formando una red espacial*. Esta demostración se basa en la posibilidad de obtener la difracción de los rayos X en la red cristalina (véase el t. III).

Cada átomo que forma un cuerpo sólido, se halla bajo la acción de las fuerzas de interacción de todos los átomos vecinos. Al disponerse los átomos según los ángulos (vértices) de una red espacial determinada, las fuerzas que actúan sobre cada uno de ellos, se compensan mutuamente, y los atomos se hallan en equilibrio. Esta disposición de los átomos corresponde al mínimo de su energía potencial mutua, lo cual condiciona la solidez de todo el cristal.

De esta manera tenemos que el cristal representa una compleja construcción arquitectónica cuya solidez viene condicionada por la simetría interna.

Las fuerzas de interacción entre los átomos que forman el cristal tienen diferentes caracteres. En los cristales de las sales, los átomos llevan cargas eléctricas y son iones. Los iones positivos (cationes) y los negativos (aniones) se alternan de manera que el cristal, en su conjunto, es neutro. En esta clase de *red iónica*, que se denomina *heteropolar*, las fuerzas de interacción entre las partículas son, por lo común, electrostáticas.

En la fig. 223 se representa la red cúbica de la sal gema (NaCl); esta red es simple y pertenece al sistema regular (cúbico). Los átomos de sodio se representan con circulitos negros y llevan cargas positivas

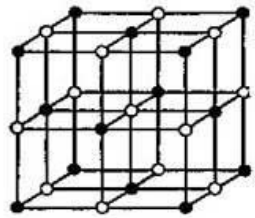


Fig. 223. Red cúbica de la sal gema.

de electricidad, es decir, son iones positivos (cationes). Los átomos de cloro, representados por circulitos blancos, llevan cargas negativas, es decir, son iones negativos (aniones).

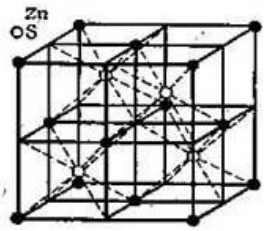


Fig. 224. Red espacial de la blenda de zinc.

En la fig. 224 viene representada la red espacial de la blenda de zinc (ZnS). Los circulitos negros representan los cationes de Zn, y los blancos, los aniones de S. La red de la blenda de zinc tiene una estructura algo más complicada que la de la sal gema.

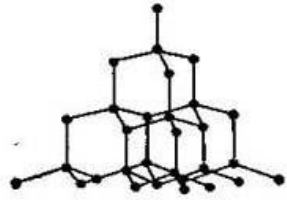


Fig. 225. Red espacial del diamante.

En el caso de los cuerpos sólidos químicamente sencillos, los átomos que forman una red espacial son neutros. La red de este cristal se denomina *atómica* u *homopolar*.

La naturaleza de las fuerzas de interacción en la red atómica se puede explicar totalmente sólo basándose en la mecánica cuántica.

En la fig. 225 se representa la disposición de los átomos en la red cristalina del diamante.

Además de las redes iónicas (tipo NaCl) y de las atómicas (tipo del diamante), se distinguen las redes moleculares y las redes de los metales; las primeras se refieren predominantemente a los cristales de compuestos químicos de muchos átomos, por ejemplo, del P_2O_5, del SO_3, etc.; las segundas son características para los metales con su gran conductibilidad eléctrica y brillo metálico. Los cristales de los metales, hablando vulgarmente, se pueden representar como una nube de electrones en que a determinadas distancias unos de otros se hallan los cationes.

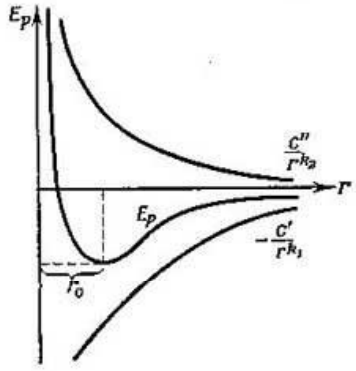


Fig. 226. La energía potencial E_p de la red cristalina iónica en función de la distancia r entre los iones.

Debido al equilibrio estable de la red cristalina, entre las partículas que forman el cristal surgen fuerzas de repulsión al comprimirlo, y de atracción al estirarlo. Esto puede explicarse si suponemos que entre las partículas hay al mismo tiempo fuerzas de atracción y de repulsión que dependen de diferente manera de la distancia r entre las partículas. En estado de equilibrio, estas fuerzas tienen el mismo valor. Al disminuir la distancia r entre las partículas vecinas, empiezan a prevalecer las fuerzas de repulsión, y al aumentar esta distancia, predominan las de atracción.

§ 88. **Energía de la red cristalina.** La energía potencial E_p de la red cristalina puede representarse en la forma (§ 61):

$$E_p = -\frac{C'}{r^{k_1}} + \frac{C''}{r^{k_2}}, \qquad (1)$$

donde el primer miembro de esta fórmula $-\frac{C'}{r^{k_1}}$ corresponde a las fuerzas de atracción, y el segundo $+\frac{C''}{r^{k_2}}$, a las fuerzas de repulsión. En la fig. 226 se representan independientemente, en función de la distancia r entre dos partículas contiguas de la red, el diagrama de cada uno de estos dos términos y el de la suma de los dos, que es la energía potencial E_p. Si $k_2 > k_1$, las fuerzas de repulsión aumentan más de prisa, al disminuir r, que las fuerzas de atracción, lo cual explica la reacción del cristal a la compresión. Al valor $r = r_0$ corresponde el lugar más profundo del pozo de potencial; la magnitud r_0 es la distancia entre las partículas del cristal no solicitado por

fuerzas exteriores. En las proximidades de la posición de equilibrio, toda partícula puede efectuar pequeñas oscilaciones sin salirse del pozo de potencial. El movimiento térmico de los cristales se reduce a esta clase de oscilaciones de partículas alrededor de la posición de equilibrio.

Born y otros físicos desarrollaron la teoría de las redes cristalinas. Born demostró que, conociendo los exponentes k_1 y k_2 de la fórmula (1), se pueden calcular las propiedades elásticas de los cristales, la energía de formación del cristal, sus propiedades ópticas, etc. Para que concuerde con la experiencia, en las redes heteropolares hay que poner $k_1 = 1$ y $k_2 = 9$; en las redes homopolares k_2 tiene valores mayores.

El cálculo de la energía de una red cristalina cúbica simple del tipo del NaCl, se puede representar esquemáticamente de la siguiente manera. La energía potencial de dos iones aislados de carga $-e$ y $+e$ que se hallen a la distancia r_0 uno de otro, es

$$E'_p = -\frac{e^2}{r_0}. \qquad (2)$$

La energía potencial de dos iones contiguos en el interior de la red será mayor que esta magnitud por dos causas: 1) sobre cada ion actúa no sólo su vecino, sino también todos los demás iones de la red; 2) los iones, actuando unos sobre otros, originan una polarización mutua, a la cual se debe la aparición de las fuerzas de repulsión [segundo término en la fórmula (1)].

Los cálculos demuestran que para el cristal tipo NaCl, la fórmula (2) debe sustituirse por la siguiente:

$$E'_p = -0{,}2582\frac{e^2}{r_0}. \qquad (2a)$$

La energía potencial expresada por la fórmula (2a) es igual al trabajo que hay que realizar para después de arrancar dos iones contiguos de la red, alejarlos infinitamente uno del otro; en otras palabras, es igual al trabajo necesario para romper el enlace entre dos iones contiguos de la red. En un mol de substancia de la red hay N *pares* de iones, y cada ion, en la red cúbica, tiene 6 iones contiguos a él; de esta manera tenemos que para separar todos los iones de un mol a una distancia infinita unos de otros, hay que romper $6N$ enlaces.

De aquí que la energía potencial total de la red E_p correspondiente a un mol, sea igual a $6NE'_p$, es decir:

$$E_p = -0{,}2582\frac{e^2}{r_0}\cdot 6N. \qquad (3)$$

La distancia r_0 entre los iones contiguos en la red cúbica la determinamos de la siguiente manera: si ρ es la densidad del cristal dado,

μ el peso molecular y V_0 el volumen de un mol,

$$V_0 = \frac{\mu}{\rho}.$$

El volumen $v = r_0^3$ que corresponde a una malla cúbica elemental, lo obtenemos dividiendo V_0 por el número de mallas de un mol, que coincide con el número de iones de un mol; es decir, dividiéndolo por $2N$,

$$r_0^3 = \frac{V_0}{2N} = \frac{\mu}{2\rho N}, \quad \text{de donde} \quad r_0 = \sqrt[3]{\frac{\mu}{2\rho N}}. \tag{4}$$

Colocando este valor en la fórmula (3) para la energía potencial, hallamos que

$$E_p = -0{,}2582 \cdot 6 \cdot e^2 \sqrt[3]{\frac{2\rho N^4}{\mu}}. \tag{5}$$

Como e y N son constantes, la última expresión se puede representar de la siguiente manera:

$$E_p = -K \sqrt[3]{\frac{\rho}{\mu}}. \tag{5a}$$

Si expresamos ρ en g/cm^3, μ en gramos por mol y E_p en calorías por mol, el valor numérico de K será igual a 545.

Para las redes cristalinas tipo CsCl o CaF_2 se obtienen fórmulas análogas a la (5a), pero con otro valor numérico de la constante K.

Es difícil hacer una comprobación experimental directa de los cálculos de Born, ya que no tenemos la posibilidad de reducir un cristal sólido a un conjunto de iones libres. No obstante, indirectamente se puede comprobar la justeza de los cálculos de varias maneras.

Examinemos, por ejemplo, la reacción de transformación de las sales NaCl y KI en las sales KCl y NAI:

$$NaCl_{(sól)} + KI_{(sól)} = NaI_{(sól)} + KCl_{(sól)}.$$

El subíndice (sól) indica que los símbolos químicos se refieren a la fase sólida cristalina de las substancias respectivas. Está claro que la energía de transformación ΔU será

$$\Delta U = -[E_p(NaCl) + E_p(KI)] + [E_p(NaI) + E_p(KCl)]$$

y, por consiguiente, puede ser calculada según la fórmula (5a) mediante las energías potenciales E_p (NaCl), E_p (KI), etc., de las redes cristalinas de NaCl, KI, etc. Por otra parte, como primera aproximación, la energía de transformación ΔU es igual a la diferencia de los calores de disolución q de las sales, a condición de que las soluciones se tomen tan débiles, que la disociación en ellas se pueda considerar completa:

$$\Delta U = \sum q = [q(NaCl) + q(KI)] - [q(NaI) + q(KCl)].$$

En la tabla XII se confrontan para varias sales los valores calculados de ΔU y los de Σq hallados mediante los calores de disolución:

Tabla XII

Reacción	ΔU	Σq
KCl + LiBr = KBr + LiCl	+4	+3,6
KCl + LiI = KI + LiCl	+7	+7,2
KCl + NaBr = KBr + NaCl	+3	+2,0
KCl + NaI = KI + NaCl	+5	+3,4

Si tenemos en cuenta que Σq se determina experimentalmente con poca exactitud (pequeña diferencia respecto a las grandes magnitudes), la coincidencia entre Σq y ΔU hay que considerarla satisfactoria.

El segundo método de comprobación consiste en examinar el llamado ciclo de Born-Haber. Este proceso, para el caso del NaCl, se representa por el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccccc} & \nearrow & Na^+ \longrightarrow Na_{(gas)} & \longrightarrow & Na_{(sól)} \searrow \\ NaCl_{(sól)} & & & & \longrightarrow NaCl_{(sól)}. \\ & \searrow & Cl^- \longrightarrow Cl_{(gas)} & \longrightarrow & \frac{1}{2}\,Cl_{(gas)} \nearrow \end{array}$$

Primeramente suponemos que un mol de NaCl sólido cristalino se divide en iones libres de Na^+ y Cl^-, en lo cual se invierte un trabajo igual a la energía potencial E_p de la red. Después, los gases iónicos Na^+ y Cl^- se transforman en gases atómicos neutros $Na_{(gas)}$ y $Cl_{(gas)}$. En ello se invierten trabajos iguales a los trabajos de ionización A_j (Na) y A_j(Cl) de un mol. Luego, el gas $Na_{(gas)}$ se transforma en sodio metálico (sólido) [invirtiendo un trabajo igual al calor de evaporación L (Na)] y el gas atómico $Cl_{(gas)}$, en medio mol de gas diatómico corriente de cloro Cl_2 [invirtiendo un trabajo igual al calor de disociación $\frac{1}{2}\,q$(Cl)]. Por fin, del sodio metálico sólido y del gas cloro, mediante reacción química, se obtiene de nuevo un mol de NaCl sólido cristalino, y se desprende el calor de formación Q (NaCl). En el ciclo, la suma de todos los trabajos y de todas las cantidades de calor obtenidas y desprendidas (calculadas según los equivalentes del trabajo) es igual a cero. Por eso obtenemos que:

$$-E_p = A_j\,(\mathrm{Na}) + A_j\,(\mathrm{Cl}) + L(\mathrm{Na}) + \frac{1}{2}\,q\,(\mathrm{Cl}) + Q\,(\mathrm{NaCl}).$$

Midiendo todas las magnitudes del segundo miembro de esta igualdad, se puede hallar el valor de E_p. En efecto, todas las magnitudes indicadas, excepto el trabajo de formación del ion negativo Cl^-, se pueden determinar experimentalmente. Por los datos de que se dispone, se puede considerar indirectamente que A_j(Cl) es aproximadamente igual a -90 cal/mol. Así, utilizando los valores empíricos de A_j (Na) = 117 cal, L (Na) = 27 cal, $1/2q$ (Cl) = 29 cal, y Q (NaCl) =

= 98 cal, hallamos que la energía de la red de NaCl es una magnitud del orden de —180 cal/mol. La fórmula (5a), si colocamos en ella los valores de la masa de un mol de sal gema $\mu = 58{,}5$ g/mol y de su densidad $\rho = 2{,}16$ g/cm^3, nos da $E_p = -182$ cal/mol.

Hay que tener en cuenta que toda teoría exacta de las redes cristalinas, sobre todo si se quiere representar su comportamiento a bajas temperaturas, debe basarse en la mecánica cuántica.

§ 89. Deformación de los cuerpos sólidos. Bajo la acción de fuerzas exteriores, todo cuerpo *se deforma*, es decir, su forma varía. Se denomina deformación *elástica*, la que desaparece al cesar la fuerza que la origina. Así tenemos que un resorte (muelle) extendido elásticamente, adquiere su longitud primitiva al dejar de actuar la fuerza de extensión. Con el cambio de signo de la fuerza, varía el signo de la deformación elástica; por ejemplo, si solicitado por una fuerza de extensión, el resorte se alarga, al ser solicitado por una fuerza de compresión, se reducirá su longitud. *Según la ley estable-*

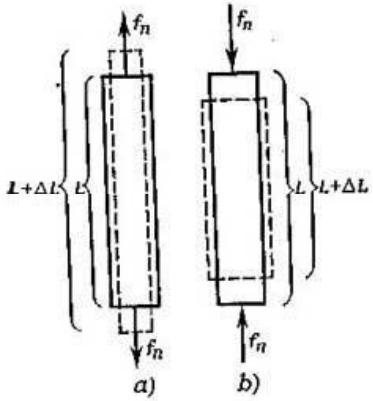


Fig. 227. Deformación de tracción (*a*) y de compresión (*b*).

cida por Hooke, la magnitud de la deformación Δx *es proporcional a la fuerza que actúa* f:

$$\Delta x = Kf, \tag{1}$$

donde K es una magnitud constante para la deformación dada y para el cuerpo sólido dado.

Veamos la simple deformación por *tracción longitudinal* o por *compresión unilateral**). Sea una barra homogénea de longitud igual a L y de área de la sección transversal igual a S, a cuyos extremos se aplican las fuerzas f_n, con lo cual la longitud de la barra varía en la magnitud ΔL.

Las fuerzas de tracción las consideramos positivas; en este caso (fig. 227, *a*) ΔL también será positiva, es decir, la barra se extiende. Las fuerzas de compresión las consideramos negativas; en este caso (fig. 227, *b*) ΔL también será negativa, es decir, cuando la barra se somete a una compresión unilateral, su longitud disminuye.

*) Se distingue la compresión unilateral (unidireccional) de la *multilateral* (*multidireccional*) en la cual el cuerpo sufre una compresión simultánea por todos los lados. En adelante estudiaremos solamente la compresión unilateral.

Para la característica de la deformación es importante conocer el valor del alargamiento relativo $\Delta L/L$, y no el valor del alargamiento absoluto ΔL. Está claro que no es lo mismo alargar, por ejemplo, en una magnitud $\Delta L = 1$ cm dos barras del mismo material y de igual sección transversal, si una de ellas no tiene más que 2 cm de longitud (L), y la otra tiene 10 m. Sin embargo, para alargar estas barras en una misma fracción de su longitud primitiva $\left(\text{por ejemplo, en } \frac{1}{1000}\right)$ habrá que aplicar fuerzas iguales f. Así pues la deformación debe caracterizarse por la *variación relativa* de la longitud $\Delta L/L$.

Para barras de diferente sección transversal S solicitadas por una misma fuerza, la deformación relativa $\Delta L/L$ será tanto menor, cuanto más gruesa sea la barra, es decir, cuanto mayor sea S. De aquí se deduce que para la deformación elástica de tracción (compresión), la variación relativa de la longitud $\Delta L/L$ debe ser proporcional a la magnitud f_n/S, es decir, a la fuerza por unidad de superficie de la sección transversal de la barra. Esta magnitud $\frac{f_n}{S} = p_n$, la llamaremos *esfuerzo*.

Así, en definitiva resulta que

$$\frac{\Delta L}{L} = \alpha \frac{f_n}{S}, \quad \text{o} \quad \frac{\Delta L}{L} = \alpha p_n, \tag{2}$$

donde el coeficiente α, denominado *coeficiente de elasticidad*, depende solamente del material de la barra.

Aunque exista este coeficiente α, se ha convenido en caracterizar el material con la magnitud inversa:

$$E = \frac{1}{\alpha}, \tag{3}$$

denominada *módulo de Young* o *de elasticidad*. Colocando en (2) el módulo de Young E en vez de α, obtenemos que

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{E} \cdot p_n. \tag{2a}$$

De las fórmulas (2) y (2a) resulta que

$$\alpha = \frac{\Delta L/L}{p_n}, \quad E = \frac{p_n}{\Delta L/L}, \tag{4}$$

de donde se deduce que el coeficiente de elasticidad α es igual a la variación relativa de la longitud $\Delta L/L$ debida al esfuerzo unitario; el módulo de Young E es igual al esfuerzo p_n que origina una variación relativa de la longitud igual a la unidad.

Cuando el alargamiento relativo es igual a la unidad, $\Delta L = L$; de aquí vemos que el módulo de Young E es igual al esfuerzo p_n necesario para hacer la barra dos veces más larga. En la realidad,

la mayoría absoluta de materiales se rompe antes de hacerse dos veces más largos, por eso, generalmente no se puede aplicar a una barra un esfuerzo p_n igual al módulo de Young E.

Supongamos que a una barra de longitud inicial L_0 se aplica un esfuerzo p_n; entonces la nueva longitud de la barra será:

$$L = L_0 + \Delta L.$$

Como, según la fórmula (2)

$$\Delta L = \alpha L_0 p_n,$$

tenemos que la nueva longitud de la barra L será

$$L = L_0 (1 + \alpha p_n). \qquad (5)$$

De esta fórmula se ve que dentro de los límites de la deformación elástica, la longitud de la barra varía proporcionalmente al esfuerzo p_n. En la tracción o en la compresión de la barra, las fuerzas exteriores realizan un trabajo. Según la fórmula (2a), tenemos que la fuerza aplicada a la barra en todo momento dado será

$$f_n = \frac{ES}{L} \cdot \Delta L,$$

es decir, la fuerza no permanece constante, sino que varía proporcionalmente a la variación de la longitud de la barra ΔL. En el § 25 se ha determinado el trabajo de una fuerza variable. Calculémosla aquí de otro modo. Supongamos que la longitud de la barra varía desde L hasta $L + \Delta L$, entonces el trabajo A será

$$A = \bar{f}_n \cdot \Delta L,$$

donde $\bar{f}_n$ es el valor medio de la fuerza. Como el aumento de la fuerza f_n con el alargamiento ΔL es una función lineal, este valor medio de la fuerza será la media aritmética de los valores de las fuerzas $f_n = 0$ (para $\Delta L = 0$) y $f_n = \frac{ES}{L} \cdot \Delta L$ (para el ΔL dado), es decir,

$$\bar{f}_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{ES}{L} \cdot \Delta L, \text{ de donde } A = \frac{1}{2} \cdot \frac{ES}{L} \cdot \Delta L^2.$$

Este trabajo se invierte en la *creación de la energía potencial de la barra deformada elásticamente*:

$$E_p = \frac{1}{2} \left(\frac{ES}{L} \right) \cdot \Delta L^2. \qquad (6)$$

Así tenemos que la energía potencial de una barra en estado de deformación elástica es *proporcional al cuadrado de la deformación* ΔL^2.

En la tracción o compresión longitudinal, la deformación va acompañada de una variación de las dimensiones transversales de la barra que se deforma.

En la tracción longitudinal, se produce en la barra una contracción lateral, y en la compresión longitudinal, una extensión lateral. La variación relativa del espesor de la barra $\Delta d/d$ es proporcional al esfuerzo aplicado p_n:

$$\frac{\Delta d}{d} = \beta p_n. \tag{7}$$

El coeficiente β se denomina *coeficiente de contracción lateral en la tracción longitudinal.*

La relación

$$\sigma = \frac{\beta}{\alpha}$$

se denomina *módulo de Poisson**). Utilizando esta expresión, podemos transformar la ecuación (7):

$$\frac{\Delta d}{d} = \alpha\sigma p_n. \tag{7a}$$

Para la mayoría de los cuerpos homogéneos isótropos (y para los metales) el módulo de Poisson σ tiene un valor numérico muy próximo a 1/4.

Veamos otra deformación simple denominada *cizallamiento.*

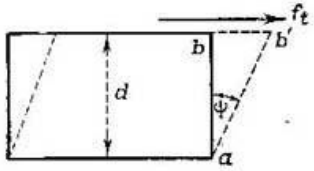


Fig. 228. Deformación de cizallamiento.

La deformación de cizallamiento se produce bajo la acción de la fuerza f_t tangente a la superficie sobre la cual actúa (fig. 228). Solicitadas por esta fuerza, las capas del cuerpo se deslizan unas sobre otras y todas las rectas físicas (es decir, las líneas relacionadas con determinadas partículas del cuerpo) ab, perpendiculares a la superficie a que se aplica la fuerza, giran cierto ángulo ψ.

Si el ángulo de deslizamiento (o de resbalamiento) ψ es pequeño, tenemos aproximadamente que

$$\psi = \frac{bb'}{d},$$

donde $d = ab$ es el espesor del cuerpo, y bb' es la magnitud absoluta de desplazamiento de la capa superior respecto a la inferior. De aquí se ve que el ángulo de deslizamiento ψ caracteriza el *resbalamiento*

*) En español, a esta relación también se suele llamar «coeficiente de contracción lineal». (*N. del T.*)

o *deslizamiento relativo*, por eso, dentro de los límites en que se cumple la ley de Hooke, obtenemos la relación:

$$\psi = n\frac{f_t}{S}, \tag{8}$$

donde n es una magnitud constante que depende sólo del material de la barra, denominada *coeficiente de elasticidad transversal* o *coeficiente de cizallamiento*; y S es la superficie a la cual se aplica la fuerza f_t.

Introduciendo el concepto de esfuerzo cortante $p_t = \frac{f_t}{S}$ en la fórmula (8), obtenemos

$$\psi = n \cdot p_t. \tag{8a}$$

La magnitud inversa de n,

$$N = \frac{1}{n},$$

se denomina *módulo de rigidez* o *módulo de Coulomb*. Sustituyendo en la fórmula (8a) el coeficiente de elasticidad transversal n por *el módulo de rigidez* N, obtenemos

$$\psi = \frac{1}{N} \cdot p_t. \tag{9}$$

Para la mayoría de los cuerpos homogéneos isótropos, el módulo de rigidez N aproximadamente es igual a 0,4 del valor numérico del módulo de Young E.

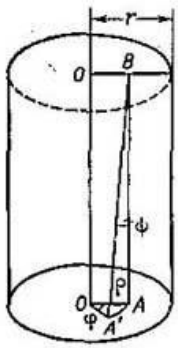


Fig. 229. Deformación de torsión.

Estudiemos, además, *la deformación de torsión*, que, como veremos, se reduce a la deformación de cizallamiento.

Sea una barra cilíndrica de longitud L y de radio r (fig. 229). Supongamos que la sección superior está fija, y a la inferior se le aplica un momento M de fuerzas que tuerza la barra. Examinemos el segmento $OA = \rho$ de uno de los radios de la sección inferior. Bajo la acción del momento de torsión, el segmento OA girará en un ángulo φ y ocupará la posición OA'. La deformación relativa será la magnitud φ/L, es decir, el ángulo de torsión de la unidad de longitud de la barra. Dentro de los límites de la deformación elástica, esta magnitud φ/L es proporcional al momento de torsión M:

$$\frac{\varphi}{L} = cM. \tag{10}$$

La magnitud c es una constante que depende de la barra dada: para las diferentes barras depende de los radios y de las propiedades de los materiales de las barras. Para determinar c, relacionemos la torsión con el cizallamiento.

En la torsión el extremo inferior de la barra sufre un desplazamiento respecto al superior; la recta BA gira adquiriendo la posición BA', y el ángulo ψ es el ángulo de deslizamiento. Según la fórmula (9), el ángulo de deslizamiento ψ es

$$\psi = \frac{1}{N} \cdot p_t, \tag{11}$$

donde p_t es el esfuerzo tangencial aplicado al elemento de superficie dS situado junto al punto A' (véase la fig. 230), y N es el módulo de rigidez.

De la fig. 229 tenemos que

$$\psi = \frac{AA'}{L} = \frac{\varphi \cdot \rho}{L}, \text{ de donde, según la (11), } p_t = N\psi = N \cdot \frac{\varphi \cdot \rho}{L}. \tag{12}$$

La fuerza aplicada al elemento de superficie dS es igual a $p_t\, dS$, y su momento $dM = \rho p_t\, dS$. En coordenadas polares ϑ y ρ (fig. 230) el elemento de superficie $dS = \rho\, d\rho\, d\vartheta$, de donde

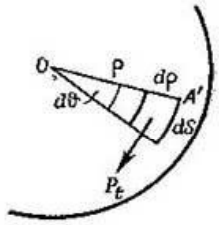


Fig. 230. Esquema para determinar el momento dM aplicado al elemento de superficie dS.

$$dM = p_t \cdot \rho^2\, d\rho\, d\vartheta.$$

Sustituyendo aquí p_t por su valor según la (12), hallamos que

$$dM = \frac{N\varphi}{L} \rho^3\, d\rho\, d\vartheta.$$

El momento total M aplicado a la sección inferior de la barra lo obtenemos integrando la expresión de dM por toda la superficie del círculo de radio r:

$$M = \frac{N\varphi}{L} \int_{\vartheta=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^{r} \rho^3\, d\rho\, d\vartheta = \frac{\pi N r^4}{2} \cdot \frac{\varphi}{L},$$

de donde

$$\varphi = \frac{2}{\pi N} \cdot \frac{L}{r^4} M. \tag{13}$$

Comparando la fórmula (13) con la (10), hallamos que

$$c = \frac{2}{\pi N} \cdot \frac{1}{r^4}.$$

De la fórmula (13) se deduce que *el ángulo de torsión* φ *depende del módulo de rigidez* N *y es inversamente proporcional al radio de la barra elevado a la cuarta potencia.*

De la fórmula (13) tenemos que

$$M = \frac{\pi N}{2} \cdot \frac{r^4}{L} \cdot \varphi, \tag{13a}$$

o sea, que para torcer un alambre en un ángulo dado φ hay que aplicarle un momento M directamente proporcional a r^4 e inversamente proporcional a la longitud del alambre L.

Por consiguiente, el momento depende en alto grado del radio. Las barras gruesas y cortas son difíciles de torcer, y viceversa, los alambres delgados y largos, incluso bajo la acción de pequeños momentos revelan torsiones sensibles.

Esta particularidad se utiliza para construir sistemas de suspensión de alta sensibilidad en los instrumentos de medición.

Por ejemplo, si de un alambre fino y largo se cuelga una pequeña aguja imantada, por el ángulo en que se tuerce el alambre se puede descubrir un par de fuerzas muy pequeño, originado por un campo magnético exterior. Este

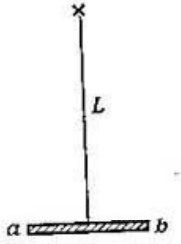


Fig. 231. Varilla ab suspendida de un alambre L.

ángulo de torsión se determina por la desviación de un rayo de luz que se refleja de un pequeño espejo fijo en el alambre. Determinemos, por ejemplo, el momento del par de fuerzas capaz de torcer un alambre de 5 cm de longitud y 0,02 mm de radio, en un ángulo de 10'. El módulo de rigidez del material del alambre lo consideraremos igual a 6000 kgf/mm^2.

Para resolver el problema utilizamos la fórmula (13a):

$$M=\frac{\pi N}{2}\cdot\frac{r^4}{L}\cdot\varphi=\frac{3{,}14\cdot 6000}{2}\cdot\frac{(0{,}02)^4}{50}\cdot 0{,}0029 \text{ kgf mm}=8{,}74\cdot 10^{-8} \text{ kgf mm}.$$

Reduciendo a gf cm, hallamos que

$$M = 8{,}74\cdot 10^{-6} \text{ gf cm},$$

es decir, el momento, que es aproximadamente igual al de una fuerza de 10^{-2} mgf aplicado a un brazo de palanca de 1 cm, es suficiente para originar la torsión de 10' del alambre dado.

Examinemos ahora el caso de *oscilaciones* naturales de *torsión* del cuerpo ab con un momento de inercia I, suspendido de un fino alambre (fig. 231). El momento de inercia del propio alambre lo consideramos tan pequeño que se puede despreciar.

Según lo dicho en el § 35, la aceleración angular β del cuerpo será

$$\beta=\frac{M}{I}, \qquad (14)$$

donde M es el momento de las fuerzas aplicadas al cuerpo. Por otro lado, la aceleración angular β es igual a la segunda derivada del ángulo de rotación φ respecto al tiempo: designando la segunda derivada de este ángulo, respecto al tiempo, con dos puntos sobre la letra φ, tenemos que $\beta = \ddot{\varphi}$. El momento M aplicado al cuerpo es igual al aplicado al alambre, pero de sentido contrario; de donde, según la fórmula (13a):

$$M = -D\varphi;$$

la magnitud $D = \frac{\pi N}{2} \cdot \frac{r^4}{L}$ puede denominarse módulo de torsión del alambre dado. Colocando los valores de β y M en la (14), hallamos que

$$\ddot{\varphi} = -\frac{D}{I}\varphi.$$

Como se demostrará en el § 97, la solución de esta ecuación diferencial es una oscilación de período

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}. \tag{15}$$

Así tenemos que el período de las oscilaciones de torsión de un cuerpo suspendido de un alambre, lo determinan exclusivamente el momento de inercia y el módulo de torsión del alambre.

La energía cinética de oscilación E_c es

$$E_c = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} I\dot{\varphi}^2.$$

Esta energía no permanece constante en el transcurso del período, sino que alcanza el máximo cuando el cuerpo pasa por la posición de equilibrio, y es igual a cero cuando la rotación del cuerpo es máxima (compárese con lo dicho en el § 112).

La energía potencial E_p la determinamos utilizando la fórmula (2) del § 39, según la cual, para que el cuerpo gire en un ángulo φ hay que realizar un trabajo

$$A = M\varphi. \tag{16}$$

En el caso de torsión de un alambre, el momento no es constante, sino que depende del ángulo φ, por eso, en la fórmula (16), por M hay que sobreentender el valor medio del momento $\bar{M} = \frac{1}{2} D\varphi$. De donde $A = \bar{M}\varphi = \frac{1}{2} D\varphi^2$. La energía potencial E_p será igual a este trabajo:

$$E_p = \frac{1}{2} D\varphi^2. \tag{17}$$

En los instantes de mayor giro del cuerpo, cuando su energía cinética E_c es igual a cero, la potencial E_p adquiere el valor máximo y es igual a la energía total E.

Así tenemos que

$$E = E_{p\,\text{máx}} = \frac{1}{2} D\varphi_{\text{máx}}^2,$$

donde $\varphi_{\text{máx}}$ es el ángulo de giro durante las oscilaciones de torsión.

§ 90. Límite de elasticidad y carga de rotura. Deformaciones plásticas. Cualquier cuerpo sólido se deforma sometiéndose a la *ley de Hooke* hasta determinado límite.

Hablando con más rigor, la deformación relativa no es exactamente proporcional al esfuerzo; pero esta discordancia no es grande a pequeños valores de la deformación relativa $\Delta x/x$, y se hace sensible al aumentar $\Delta x/x$. Gráficamente, la dependencia entre la deformación relativa $\Delta x/x$ y la carga p viene representada en la fig. 232, *a*. Cuanto mayores son las cargas, con más facilidad se deforma el mate-

rial. El valor de la carga $p = p_{pr}$, a partir del cual la proporcionalidad se altera sensiblemente, se denomina *límite de proporcionalidad*. Rigurosamente hablando, no existe un valor determinado para el límite de proporcionalidad, ya que la posibilidad de revelar esta desviación de la función lineal depende de la exactitud de la medición.

En la deformación elástica, después de cesar la acción de la fuerza exterior, desaparece por completo la deformación, es decir, el cuerpo toma las dimensiones (y forma) anteriores. Pero cuando los valores de las cargas sobrepasan el llamado *límite de elasticidad* p_e, aparece otro tipo de deformación denominada *deformación plástica*, la cual

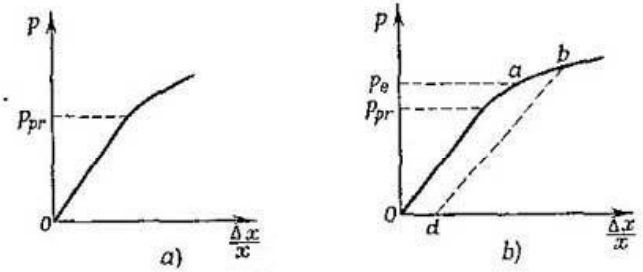


Fig. 232. Variación de la deformación relativa de un sólido al variar la carga aplicada.

no desaparece por completo al cesar la acción de las fuerzas. La deformación plástica se produce con más facilidad que la elástica. Si al alcanzar cierto punto *b* (fig. 232, *b*) que está en la zona de las deformaciones plásticas, empezamos a disminuir la carga *p* hasta cero, el cuerpo no volverá a la posición inicial por la línea *baO*; la disminución de esta deformación vendrá representada por la línea de puntos *bd*, y el cuerpo conservara *la deformación permanente Od*. Si, por ejemplo, sometemos al cuerpo a una tracción y después de sobrepasar el límite de elasticidad y de llegar a la zona de las deformaciones plásticas, cesamos la acción de la carga, el cuerpo tendrá una longitud mayor que la inicial, ya que conservará una deformación permanente de tracción.

Aumentando constantemente la carga se llega a la rotura, y el valor correspondiente se denomina *carga de rotura*. Si el valor correspondiente a la carga de rotura no se diferencia mucho del correspondiente al límite de elasticidad, el cuerpo ofrecerá sólo insignificantes deformaciones permanentes, y se denominará *frágil* (por ejemplo, el acero templado). Los cuerpos que son capaces de sufrir grandes deformaciones plásticas, se denominan «plásticos»; así, por ejemplo, los alambres de plomo y los de zinc soportan grandes deformaciones plásticas y permanentes.

Para los cuerpos sólidos reales, el desarrollo de la deformación relativa en función de la carga se diferencia notablemente del representado en la fig. 232. Para cada material dado, esta marcha de la deformación depende en alto grado de la elaboración del material y de la duración de la carga. Un mismo cuerpo, solicitado por cargas breves puede comportarse como frágil, y solicitado por cargas de larga duración, aunque débiles, puede revelar deformaciones plásticas tan intensas que podemos denominarlo dúctil.

En la fig. 233 se representa el diagrama de carga-alargamiento del hierro. La parte rectilínea O_a corresponde al comportamiento según la ley de Hooke; la parte ab, aunque se refiere aún a la deformación elástica, ya no sigue la ley de Hooke: aquí el alargamiento crece con más rapidez que la carga. Más allá

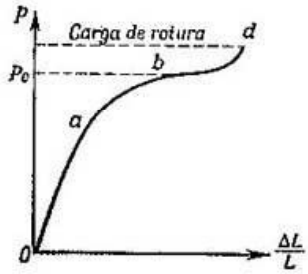


Fig. 233. Diagrama de carga-alargamiento del hierro.

del punto b, el alargamiento puede aumentar sin que aumente la carga: es la zona de fluencia. Al aumentar ulteriormente la carga, la barra adquiere de nuevo la propiedad de resistir a la tracción: la curva asciende. El punto d corresponde a la rotura (carga de rotura).

Aduzcamos unos cuantos datos numéricos que caracterizan las propiedades elásticas de diferentes metales.

Como ejemplo, calculemos utilizando los datos de la tabla XIII, la magnitud de los mayores alargamientos elásticos posibles de alambres para los materiales dados en la tabla.

Tabla XIII

Propiedades elásticas de los metales

Metal	Módulo de Young en kgf/mm²	Límite de elasticidad en kgf/mm²	Carga de rotura en kgf/mm²
Plomo	1 800	0,25	2
Estaño	3 000	0,34	2
Cobre (dulce)	10 000	3	20
Hierro (dulce)	19 000	5	35
Acero al carbono	20 000	33	75
Acero al molibdeno . .	22 000	60	150

El máximo alargamiento elástico posible $\left(\frac{\Delta L}{L}\right)_{\text{máx}}$ se determina como el alargamiento causado por la carga correspondiente al límite de elasticidad p_e. De aquí que, según la fórmula (2a) del § 89:

$$\left(\frac{\Delta L}{L}\right)_{\text{máx}} = \frac{p_e}{E},$$

donde E es el módulo de Young. Colocando en lugar de p_e y E sus valores numéricos hallamos los datos siguientes:

Material	$\left(\frac{\Delta L}{L}\right)_{\text{máx}}$
Estaño	0,00011
Plomo	0,00014
Cobre	0,00030
Hierro	0,00026
Acero al carbono	0,00165
Acero al molibdeno . .	0,00273

De esta manera tenemos que dentro de los límites de la deformación elástica, el alambre de estaño sólo puede ser alargado aproximadamente en un 0,01% de la longitud inicial, mientras que el de acero al molibdeno puede ser alargado casi en un 0,3% de dicha longitud.

Los sólidos reales revelan en mayor o menor grado una dependencia compleja de la deformación respecto al tiempo, lo cual no viene reflejado ni en la ley de Hooke ni en los esquemas simplificados que hemos estudiado. Estrictamente hablando, después de empezar a actuar la carga, la deformación no se establece inmediatamente en toda su magnitud, y después de cesar la acción de la carga, la

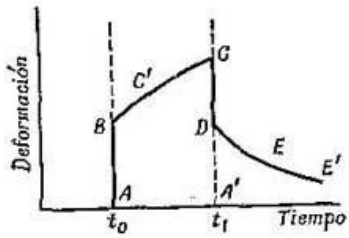


Fig. 234. La deformación en función del tiempo en que actúa la carga.

deformación tampoco desaparece por completo: queda parte de la deformación, que después va desapareciendo lentamente con el tiempo. Esquemáticamente, la dependencia entre la deformación elástica y el tiempo viene representada en la fig. 234. Si en el instante t_0 en el cuerpo sólido empieza a actuar una carga, la deformación elástica inicial AB se establece rápidamente, después, solicitado por la carga constante f, la deformación sigue aumentando con el tiempo según la curva $BC'C$. Si en el instante t_1 cesa la acción de la carga, la deformación disminuirá primero rápidamente en la magnitud CD igual a AB, y después disminuirá lentamente según la curva DEE'. Así tenemos que después de cesar la acción de la carga se conserva

una deformación permanente A'D que sólo disminuye muy lentamente; el cuerpo recobra poco a poco su forma primitiva. Este fenómeno se denomina *elasticidad retardada.*

La elasticidad retardada es fácil de observar al extender un tubito de goma. Se cuelga verticalmente un largo tubo de goma y al extremo inferior se fija por cierto tiempo un peso P que alarga el tubo en la magnitud ΔL. Inmediatamente después de quitarle el peso P, el tubo de goma se contrae de nuevo, pero en una magnitud $\Delta L' < \Delta L$, quedando un sensible alargamiento $\delta L = \Delta L - \Delta L'$, que después desaparece poco a poco (en unos diez minutos).

Para muchos sólidos, parte de la deformación $BC'C$ tiene carácter plástico, irreversible. Estos cuerpos, solicitados por cargas débiles, pero de gran duración, se comportan como cuerpos líquidos; mientras que solicitados por grandes cargas de acción breve, son frágiles. Por ejemplo, el hielo o la brea fluyen bajo la acción de cargas de larga duración y se rompen fácilmente cuando se les aplica cargas de corta duración, pero más intensas.

§ 91. Las deformaciones desde el punto de vista de la estructura cristalina de los sólidos. Las deformaciones elásticas de compresión y de tracción en los monocristales se pueden explicar fácilmente partiendo de la existencia de la red cristalina. El equilibrio de esta red, como se ha indicado en el § 87, viene determinado por la compensación mutua de atracción y repulsión entre las partículas (iones o átomos) que forman la red. Por ejemplo, en el caso de la red iónica, al comprimir el cristal disminuye la distancia r_0 entre los iones vecinos y las fuerzas de repulsión resultan mayores que las de atracción. Como resultado de ello aparece una resultante de repulsión que se contrapone a la fuerza exterior que comprime el cristal. Cuanto mayor sea el número de iones desiquilibrados, es decir, cuanto mayor sea la deformación, mayor será la fuerza de repulsión. Al cesar la acción de la fuerza exterior, los iones volverán a su posición de equilibrio, la red tomará el aspecto primitivo desapareciendo con ello la deformación del cristal. Lo mismo ocurre al extender el cristal, con lo cual aumenta la distancia r_0 entre los iones vecinos, las fuerzas de atracción prevalecen sobre las de repulsión y el cristal, en su conjunto, se resiste al esfuerzo exterior de tracción.

La teoría de las redes cristalinas permite calcular los coeficientes de compresión multilateral (cúbica) para los iones de los cristales tipo NaCl. En la tabla XIV se dan los coeficientes observados y calculados de compresión multilateral γ para una serie de cristales.

Aquí los valores de γ se dan en el sistema *CGS*. Como se ve, los valores calculados y observados coinciden con bastante aproximación.

En el cizallamiento se produce una inclinación de la red. En el caso de una simple red cúbica iónica, cada red elemental (malla) se transforma en un paralelepípedo inclinado, en que la diagonal

Tabla XIV

Coeficientes de compresión multilateral γ observados y calculados

Cristal	γ observ · 10^{12}	γ calc · 10^{12}
NaCl	4,1	3,56
NaBr	5,1	4,73
NaI	6,9	6,30
KCl	5,0	5,36
KBr	6,2	6,64
KI	8,6	8,68
TlCl	4,7	4,69
TlBr	5,1	5,36
TlI	6,7	6,76

ac (fig. 235) resulta acortada y la diagonal *bd* alargada; debido a ello, entre los iones *a* y *c* surgen fuerzas de repulsión, y entre los iones *b* y *d*, fuerzas de atracción. La red tiende a restablecer su forma anterior, lo cual es el origen de la elasticidad tangencial o de cizallamiento.

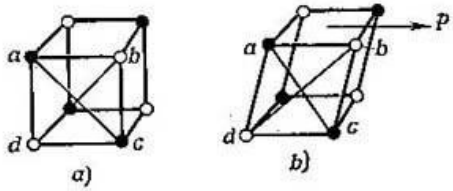


Fig. 235. Inclinación de la red cristalina en el cizallamiento.

En el cizallamiento también es fácil explicar las deformaciones plástica y permanente. Gracias a la disposición geométricamente regular de los átomos (o iones), en la red espacial del cristal hay planos según los cuales se puede producir un deslizamiento de unas partes de la red respecto a otras. Este deslizamiento puede ser de tal magnitud que los iones positivos vengan a colocarse de nuevo sobre los negativos. En este caso, la disposición mutua de estos iones resulta como la que tenían en la red inicial, por lo tanto no surgirán fuerzas que tiendan a hacerlos tomar la posición inicial: esto explica la deformación permanente.

A primera vista parece más difícil explicar la posibilidad de que haya deformación permanente en los monocristales solicitados por cargas de tracción. En la realidad resulta que estas deformaciones se reducen también al cizallamiento, es decir, de nuevo al deslizamiento de unas capas a lo largo de otras.

Representémonos una barra de sección circular cortada de un monocristal de modo que los planos según los cuales se pueda producir el deslizamiento, van inclinados, como se indica en la fig. 236, *a*. En cierto sentido, esta barra se parece a una pila de monedas. Al someter la barra a la tracción, se produce un deslizamiento por los planos inclinados, y como resultado de ello, la barra en su conjunto se alarga (fig. 236, *b*), es decir, hay deformación permanente. En este caso, evidentemente deberá variar la forma de la barra: su sección circular se ha convertido en elíptica. Los experimentos

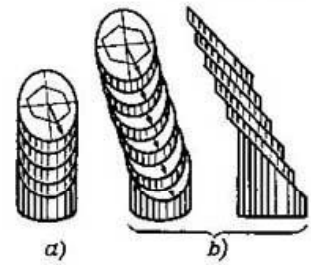


Fig. 236. Cizallamiento por los planos de exfoliación al someter a tracción una barra cortada de un monocristal.

realizados en la tracción de varillas monocristalinas de zinc, han demostrado que al originarse la deformación permanente, la sección circular ha tomado una forma oval alargada. La superficie de estas varillas de zinc, que al principio era lisa, después de la tracción se hace rugosa.

Todo esto confirma el punto de vista de que la deformación permanente de tracción es debida al deslizamiento (resbalamiento) de las partes del cristal según planos determinados.

La teoría de las redes cristalinas permite calcular la resistencia de los cristales. No obstante, el valor calculado para la carga de rotura de los monocristales resulta mucho mayor que el realmente observado. Así tenemos que la carga teórica de rotura para los cristales de la sal gema se aproxima a los 200 kgf/mm^2. Es decir, habría que aplicar una fuerza de 200 kgf a una varilla de sal gema de 1 mm^2 de sección transversal para romperla. En la realidad, las varillas cortadas de un monocristal de sal gema se rompen bajo una carga no mayor de 1/2 kgf/mm^2. Así tenemos que los datos experimentales resultan cuatrocientas veces menores que los calculados. Esta enorme divergencia no es debida, empero, a que la teoría de la red cristalina sea falsa, sino a que los cálculos teóricos se refieren al cristal ideal considerando una red absolutamente homogénea y regular; mientras que cualquier cristal real tiene gran cantidad de defectos: hay lugares donde se ha alterado la estructura regular de la red y en este aspecto tiene especial importancia la superficie del cristal, en la cual las condiciones son otras que en el interior del mismo. Tienen gran importancia las grietas de la superficie del cristal: es suficiente que

en la superficie surjan grietas microscópicas para que las caras de estas grietas sufran sobretensiones, debido a lo cual la grieta crece y produce la rotura de todo el cristal. Para excluir las grietas superficiales, A. F. Ioffe cogía una varilla de sal gema, suspendía de ella una pequeña carga que no causase la rotura y la introducía en agua templada donde se disolvía la sal. Al disolverse la capa superficial, desaparecían las imperfecciones sin tiempo para que se formasen nuevas debido a que la disolución se realizaba sin interrupción. A medida que se disolvía la varilla, se hacía más y más delgada y, por fin, se rompía bajo la acción de la carga suspendida de ella. Según la superficie de la sección transversal de la varilla en el momento de la rotura y sabiendo el valor de la carga suspendida, se determinaba la carga de rotura, que superaba notablemente la carga de rotura que se obtenía generalmente para los cristales de sal gema. En algunos casos, Ioffe observó que la rotura se producía a la tensión de 160 kgf/mm^2, es decir, de valor próximo al teórico y trescientas veces mayor que el obtenido en los experimentos habituales. Tal vez el papel que representaba el agua en los experimentos de Ioffe no se limitara a hacer desaparecer las grietas superficiales y fuera de carácter más complejo; no obstante, los experimentos de Ioffe nos indican la posibilidad de observar en un cristal una carga de rotura cercana a la teórica.

La resistencia práctica de los cristales a la rotura es centenares de veces menor que la calculada teóricamente. La red de los cristales reales se diferencia de la ideal. En aquélla siempre hay defectos internos: lugares vacíos, no ocupados por las partículas y alteraciones locales del orden. Insignificantes defectos en la superficie y en el interior de la red acarrean la rotura de todo el cristal.

Los cuerpos policristalinos prácticamente resultan más tenaces que los monocristales. Las propiedades mecánicas de los cuerpos policristalinos, como son los metales corrientes, se deben a la forma de los cristales individuales y a las fuerzas de cohesión entre ellos. Cualquier cambio de forma de los cristales individuales de que consta el cuerpo cristalino, lo mismo que la variación de su disposición mutua, causan cambios notables en las propiedades mecánicas de todo el sólido.

La variación de la tenacidad y otras propiedades mecánicas de los metales mediante el laminado, forjado, templado y otras clases de trabajos en frío y en caliente, es debida a los cambios de forma y disposición de los cristales.

§ 92. Movimiento térmico en los sólidos. Dilatación de los sólidos. Cada partícula (átomo o ion) de que se compone la red espacial de un sólido cristalino, realiza oscilaciones alrededor de su posición de equilibrio. La energía de estas oscilaciones es la energía interna del cuerpo. Así tenemos que el movimiento térmico de las partículas del sólido se diferencia, por su carácter, del movimiento térmico de

las partículas de los gases y de los líquidos. En los gases, las moléculas individuales se desplazan libremente experimentando solamente mutuos choques elásticos; con ello se explica la velocidad relativamente grande de difusión de los gases. En los líquidos, las moléculas, en su movimiento desordenado, chocan continuamente con sus vecinas. Estas moléculas «se empujan» permaneciendo alrededor de un mismo lugar y, como se ha indicado en el § 78, se desplazan lentamente. En los líquidos hay difusión, pero ésta transcurre más lentamente que en los gases. En la red cristalina de un sólido, cada partícula (átomo o ion) tiene una posición determinada de equilibrio, alrededor de la cual se realizan las oscilaciones. En los sólidos, hablando rigurosamente, las partículas pueden pasar de un lugar a otro; pero estas traslaciones son muy raras. La difusión en los cuerpos sólidos se realiza extremadamente despacio. Se necesitan observaciones de alta precisión para notar la penetración mutua de dos metales en contacto, y hay que tener en cuenta que esta penetración no se puede revelar hasta después de un contacto de larga duración entre los cuerpos.

Al aumentar la temperatura del sólido, la separación de las partículas respecto a su posición de equilibrio aumenta. Esto produce la dilatación térmica del sólido.

Suponiendo la longitud del sólido a la temperatura 0° igual a L_0, para que alcance al calentarlo hasta la temperatura t una dilatación ΔL, tenemos, como se sabe:

$$\Delta L = aL_0t, \tag{1}$$

donde *a es el coeficiente de dilatación lineal* del sólido. De aquí que la longitud del cuerpo L_t a la temperatura t sea

$$L_t = L_0 + \Delta L = L_0 (1 + at), \tag{2}$$

es decir, la longitud del sólido aumenta en proporción lineal con la temperatura. En realidad, esta relación no se cumple con completa exactitud, puesto que el coeficiente de dilatación térmica a depende en cierto grado de la temperatura (compárese con lo dicho en el § 44); pero para la mayoría de los fines prácticos, a se puede considerar constante. Para los sólidos, los coeficientes de dilatación lineal son pequeños, magnitudes del orden de 10^{-5} y 10^{-6} grados^{-1}.

Como resultado de la dilatación lineal aumenta el volumen del cuerpo. Sea un cuerpo en forma de cubo de arista L_0 y designemos su volumen por V_0, que es igual a L_0^3. El volumen a la temperatura t será:

$$V = L_0^3 (1 + at)^3 = V_0 (1 + at)^3.$$

Elevando el binomio de dilatación $(1 + at)$ al cubo y despreciando los miembros que contienen a^2 y a^3, obtenemos que

$$V = V_0 (1 + 3at).$$

Designando por b la magnitud $3a$, tenemos

$$V = V_0 (1 + bt). \tag{3}$$

La magnitud b se denomina *coeficiente de dilatación cúbica* del cuerpo. De los cálculos expuestos se deduce que el coeficiente b es igual aproximadamente al triplo del coeficiente de dilatación lineal.

En los cristales anisótropos, el coeficiente de dilatación lineal a varía según la dirección. Esto conduce a que, al dilatarse, el cristal cambie de forma. Una recta física (es decir, una línea relacionada con determinadas partículas del sólido), en la dilatación térmica del cristal no se conserva, estrictamente hablando, como recta. No obstante, en cada cristal hay direcciones según las cuales la recta física sigue siendo recta en la dilatación térmica. Estas direcciones se denominan *ejes cristalográficos*. Los valores de los coeficientes de dilatación a según los ejes cristalográficos reciben el nombre de *principales*. En el caso general, los cristales tienen tres ejes y tres distintos coeficientes principales de dilatación lineal a_1, a_2 y a_3. Para los cristales de ciertos sistemas, estas tres direcciones son perpendiculares entre sí.

Sea un paralelepípedo cortado de un cristal, de ejes perpendiculares entre sí y de aristas, cuyas longitudes a la temperatura de 0° son L_{01}, L_{02} y L_{03}. El volumen de este paralelepípedo será $V_0 = L_{01} \cdot L_{02} \cdot L_{03}$. Al calentarlo hasta la temperatura t, las longitudes de las aristas adquirirán los valores de:

$$L_1 = L_{01} (1 + a_1 t), \quad L_2 = L_{02} (1 + a_2 t), \quad L_3 = L_{03} (1 + a_3 t).$$

El nuevo volumen del paralelepípedo será

$$V = V_0 (1 + a_1 t) (1 + a_2 t) (1 + a_3 t).$$

Haciendo operaciones y despreciando los miembros que contengan los productos de las magnitudes a_1, a_2 y a_3, obtenemos el valor aproximado

$$V = V_0 [1 + (a_1 + a_2 + a_3) t].$$

Por otro lado se puede suponer que

$$V = V_0 (1 + bt),$$

donde b es el coeficiente de dilatación cúbica del cristal. Comparando estas dos últimas fórmulas obtenemos que

$$b = a_1 + a_2 + a_3. \tag{4}$$

Así tenemos que el coeficiente de dilatación cúbica del cristal es aproximadamente igual a la suma de los coeficientes principales de dilatación lineal. Para un cuerpo isótropo $a_1 = a_2 = a_3 = a$, y de nuevo obtenemos de la (4) la ecuación deducida anteriormente $b = 3a$.

Al calentar los cuerpos sólidos, si estos no pueden dilatarse libremente, surgen grandes tensiones mecánicas. Para darnos una idea de la magnitud de estas tensiones hagamos el siguiente cálculo. Sea una barra de longitud L_0 que al calentarla desde 0° hasta $t°$ se dilate en una magnitud

$$\Delta L = aL_0t,$$

donde a es el coeficiente de dilatación lineal del material de la barra. Para reducir la barra, mediante una deformación elástica de compresión, en la magnitud ΔL hay que aplicarle una carga p_n que determinamos según la fórmula (2a) del § 80:

$$\Delta L = \frac{1}{E} L_0 p_n,$$

donde E es el módulo de Young del material de la barra. Igualando ambos valores de ΔL, obtenemos que

$$\frac{1}{E} L_0 p_n = aL_0t, \quad \text{de donde}$$

$$p_n = aEt.$$

Para el hierro, por ejemplo, $a \approx 1 \cdot 10^{-5}$ grados^{-1} y $E \approx 2 \cdot 10^4$ kgf/mm^2, de donde al aumentar la temperatura en $t = 1°$ C, hay que aplicarle a la barra, para compensar su dilatación, una carga de

$$p_n \approx 1 \cdot 10^{-5} \cdot 2 \cdot 10^4 \text{ kgf/mm}^2 = 0{,}2 \text{ kgf/mm}^2 = 20 \text{ kgf/cm}^2.$$

En la técnica de la construcción hay que tener en cuenta la posibilidad de que surjan estas tensiones bajo la acción del calor. Para evitarlos, los carriles de los caminos de hierro se colocan dejando un pequeño espacio libre entre los extremos; en las celosías de los puentes y de otras construcciones, los extremos no se fijan rígidamente, sino que descansan sobre rodillos, etc.

Al unir materiales diferentes hay que tener en cuenta la tensión que puede resultar de las diferencias en sus coeficientes de dilatación.

§ 93. Capacidad calorífica de los cuerpos sólidos. La reserva de energía interna de un sólido es la de la energía de oscilación de las partículas de que consta, más la de la energía potencial de unas partículas respecto a otras. Las partículas (átomos o iones) que forman la red cristalina, en general, no son independientes, ya que entre ellas hay considerables fuerzas de interacción. Por eso, hay que examinar las oscilaciones de las partículas como ligadas entre sí; en la malla, como en todo el conjunto, surgen oscilaciones de diferentes frecuencias, cuya energía debe tenerse en cuenta.

No obstante, a temperaturas bastante elevadas, cuando la energía de oscilación es grande, las partículas se pueden considerar como independientes. Cada partícula realiza alrededor de la posición de equilibrio movimientos oscilatorios. Para determinar la energía media de oscilación de la partícula hay que tener en cuenta que ésta posee determinada cantidad de energía, tanto potencial como cinética. Como término medio, a cada una de estas clases le corresponde la misma cantidad de energía. Así tenemos que si designamos por $\overline{w}_c$ la energía cinética media de la partícula, la energía media total de la partícula será $\overline{w} = 2\overline{w}_c$.

En la red cristalina espacial, cada partícula puede oscilar alrededor de su posición de equilibrio en cualquier dirección; por lo tanto su velocidad v debe darse como vector. De aquí que cada partícula posea *tres* grados de libertad i. Por eso, la energía cinética media $\overline{w}_c = \frac{i}{2}kT = \frac{3}{2}kT$, y la energía media total de una partícula será

$$\overline{w} = 2\overline{w}_c = 3kT.$$

La energía interna total U de un mol del cuerpo sólido la obtenemos multiplicando la energía media de una partícula por el número de partículas que oscilan independientemente en un mol. Para los sólidos cristalinos químicamente simples, el número de partículas de oscilación independiente en un mol*) coincide con el número de Avogadro N, así es que

$$U = \overline{w} \cdot N = 3NkT = 3RT, \qquad (1)$$

donde R es la constante de los gases.

Para los sólidos, cuyo coeficiente de dilatación es pequeño las capacidades caloríficas a volumen y presión constantes prácticamente no se diferencian. Por eso, en adelante no las diferenciaremos. De aquí que la capacidad calorífica atómica (o calor atómico) de un sólido cristalino químicamente simple, que es numéricamente igual al aumento de la energía interna U al elevar la temperatura en 1°, será, según fórmula (1):

$$C = 3R,$$

y como la constante de los gases $R \cong 2$ cal/grado·mol, tenemos

$$C \cong 6 \text{ cal/grado mol},$$

es decir, *el calor atómico de los cuerpos simples en estado sólido cristalino, a temperatura bastante elevada, es igual a 6 cal/grado mol.* Esta enunciación se denomina *ley de Dulong y Petit.*

Sin un examen más detallado del carácter de las oscilaciones de las partículas que forman el cristal y actúan unas sobre otras, no se puede indicar de antemano qué temperatura del cuerpo dado se debe considerar suficientemente elevada para que se cumpla la ley de Dulong y Petit. Sus autores mismos, la establecieron basándose en datos empíricos obtenidos para una serie de sólidos a la temperatura de la habitación.

La tabla XV indica los calores atómicos de ciertos cuerpos simples.

En la tabla se ve que para la mayoría de los elementos citados (Al, Fe, Au, Cd, etc.), el calor atómico se aproxima a 6 cal/grado

*) Para los elementos en estado sólido, el término «mol» se aplica al átomo gramo.

Tabla XV

Calor átómico de los elementos en estado sólido

Elemento	Calor atómico C	Elemento	Calor atómico C
Aluminio, Al	6,14	Cobre, Cu	5,91
Diamante, C	1,35	Estaño, Sn	6,63
Hierro, Fe	6,36	Platino, Pt	6,29
Oro, Au	6,36	Plata, Ag	6,13
Cadmio, Cd	6,11	Zinc, Zn	6,10
Silicio, Si	4,67	Boro, B	2,51

mol, es decir, que para estos elementos la temperatura de la habitación es suficientemente elevada para que los átomos oscilen prácticamente con independencia mutua. Para estos cuerpos se cumple la ley de Dulong y Petit. Para el diamante, el silicio y el boro, a la temperatura de la habitación, este calor atómico es mucho menor de 6 cal/grado mol; esto significa que en las redes cristalinas de estos cuerpos, a la temperatura de la habitación, las oscilaciones de los átomos no se pueden considerar independientes. A la temperatura de 985° C, el calor atómico del diamante es igual a 5,52, es decir, se aproxima al valor de la ley de Dulong y Petit.

Muchos cristales de cuerpos químicamente compuestos tienen carácter iónico. En estos cristales no se pueden considerar por separado las moléculas individuales del cuerpo, como se puede hacer en estado gaseoso. En la red cristalina se alternan regularmente sólo los átomos, en forma de iones, que entrarían en la composición de la molécula de gas del cuerpo dado. De aquí que el número de partículas que constituyen el mol de este cuerpo en estado cristalino, sea *igual al número de átomos* de un mol de este cuerpo. Así tenemos que un mol de gas de cloruro sódico contiene un número de moléculas NaCl igual al número de Avogadro N. Sin embargo, en el cristal de sal gema tenemos dispuestos según vértices de la red (fig. 223) iones de Na^+ y Cl^-, cuyo número total (de iones Na^+ y Cl^- en conjunto) es de $2N$. Considerando, como antes, que a cada uno de los iones de la red corresponde una energía media $\overline{w} = 2 \cdot \frac{i}{2} kT$, obtenemos que el calor específico molar de la sal gema debe ser:

$$C = 2\frac{i}{2}k \cdot 2N = 6kN = 6R,$$

o, aproximadamente, 12 cal/grado mol. El mismo razonamiento es justo para el caso en que los átomos, permaneciendo neutros en la red, oscilen independientemente uno del otro. De aquí que el calor específico molar de todos los demás compuestos sólidos diatómicos

debe ser aproximadamente de 12 cal/grado mol. De la misma manera obtenemos que los compuestos triatómicos deben tener aproximadamente un calor específico molar de 18 cal/grado mol, los de cuatro átomos, y algunos pentaatómicos de 24 cal/grado mol, etc.

Tabla XVI

Calor molecular de los compuestos sólidos

Compuesto	Calor específico molar C
CuO	11,3
NaCl	12,1
$CaCl_2$	18,2
$BaCl_2$	18,6
KNO_3	24,1

Esta deducción coincide con *la ley de Joule y Kopp*, establecida empíricamente, según la cual *el calor específico molar de los compuestos sólidos es igual a la suma de los calores atómicos de sus componentes.*

La ley de Joule y Kopp puede ser justa solamente a temperaturas suficientemente elevadas para que las oscilaciones de las diferentes partículas se puedan considerar independientes.

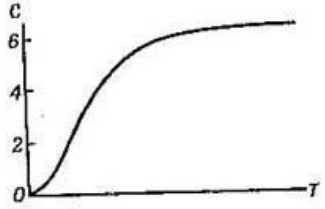


Fig. 237. Variación de la capacidad calorífica de los sólidos en función de la temperatura.

La tabla XVI indica que para una serie de compuestos sólidos, la ley de Joule y Kopp se cumple con bastante exactitud a la temperatura de la habitación.

Con el descenso de la temperatura, la capacidad calorífica de todos los sólidos disminuye. Su disminución con la temperatura viene representada gráficamente en la fig. 237. *Cuando la temperatura tiende al cero absoluto, la capacidad calorífica de los sólidos tiende a cero.* La variación de la capacidad calorífica de los cuerpos a temperaturas muy bajas se puede explicar solamente basándose en la mecánica cuántica.

Según ella, como se ha señalado en el § 49, la energía de las partículas individuales no varía más que a saltos. Esto también se refiere a la energía de osci-

lación de los átomos (o de los iones) de la red cristalina. La porción de energía en que varía a saltos la de las partículas que oscilan en la red, es igual a $h\nu$, donde h es la constante de Planck, igual a $6{,}6 \cdot 10^{-27}$ erg s, y ν es la frecuencia de oscilación de la partícula. A las temperaturas en que la energía media $\frac{1}{2} kT$ correspondiente a un grado de libertad, es grande en comparación con el valor $h\nu$, se puede considerar que la energía de oscilación de la partícula varía continuamente con la temperatura T y, por lo tanto, se puede aplicar la teoría clásica. A las bajas temperaturas en que la energía media $\frac{1}{2} kT$ es del mismo orden que la porción de energía $h\nu$, el cálculo debe basarse en la mecánica cuántica. La frecuencia de oscilación de las partículas en la red cristalina es una magnitud del orden de 10^{12} s^{-1}, de donde, de la desigualdad

$$\frac{1}{2} kT > h\nu$$

obtenemos que el método clásico de cálculo es aplicable para las temperaturas que satisfagan la condición:

$$T > \frac{2 \cdot 6{,}6 \cdot 10^{-27} \cdot 10^{12}}{1{,}4 \cdot 10^{-16}} \text{ °K} \cong 100 \text{ °K}.$$

Así tenemos que, para la temperatura de la habitación ($T \cong 300°$ K) es satisfactorio el método clásico de cálculo de las capacidades caloríficas; pero, a temperaturas del orden de —200° C, hay que calcularlas según la teoría cuántica.

Las bases de la teoría cuántica de la capacidad calorífica de los cuerpos sólidos fueron expresadas por Einstein. Después, Debye tuvo en cuenta la gran importancia de la interacción de las partículas que componen la red, a temperaturas bajas. Debye no estudió las oscilaciones de las partículas individuales, sino *las oscilaciones establecidas en la red como un todo*. Debye demostró que *en la red cristalina deben establecerse ondas estacionarias de una amplia gama de frecuencias, que abarca hasta las acústicas.*

Sumando la energía de todas estas oscilaciones de la red cristalina y teniendo en cuenta su dependencia de la temperatura, según la mécanica cuántica, Debye llegó a resultados que concuerdan en alto grado con los experimentos. *Para temperaturas muy bajas, la capacidad calorífica de los sólidos varía proporcionalmente al cubo de la temperatura absoluta.*

La teoría de Debye es notable porque enlaza las oscilaciones térmicas de los cristales con sus oscilaciones acústicas.

El físico soviético L. I. Mandelshtam ha indicado que las oscilaciones térmicas elásticas en los cristales deben influir en el carácter de la luz dispersada por los mismos (véase el t. III). Este fenómeno predicho por L. I. Mandelshtam lo observó el físico también soviético E. F. Gross, con lo cual se vio confirmada experimentalmente la existencia de oscilaciones térmicas elásticas en los sólidos.

§ 94. Fusión y vaporización de los cuerpos sólidos. Como se ha indicado en el § 87, los sólidos cristalinos tienen una determinada

temperatura de fusión. Esta temperatura depende en cierto grado de las condiciones exteriores.

Si la fusión va acompañada de un aumento de volumen (lo cual ocurre en la mayoría de los cuerpos), al elevar la presión se eleva la temperatura de fusión: un cuerpo ya fundido, al elevar la presión puede solidificarse de nuevo.

Si la fusión va acompañada de una disminución de volumen (es el caso del agua, el bismuto, el antimonio y algunas otras substancias), al aumentar la presión desciende la temperatura de fusión, y se puede con ello hacer pasar otra vez al estado líquido un cuerpo ya solidificado. El hielo a presión se derrite a una temperatura inferior a 0° C; el punto de fusión del hielo desciende aproximadamente en 1° por cada 130 atm de aumento de presión.

A grandes presiones, los cuerpos que al fundirse se dilatan, se pueden retener en estado sólido a temperaturas mayores que la crítica.

Así tenemos que el cloruro de fósforo puede permanecer en estado sólido a la presión de 2 050 kgf/cm² siendo la temperatura $t = 102°$; mientras que su punto crítico está a $p = 75$ kgf/cm² y $t = 50°$. El anhídrido carbónico, de temperatura crítica igual a 31°, a la presión $p = 12\,000$ kgf/cm² también permanece sólido siendo la temperatura $t = 93°$ C.

Al examinar las isotermas de Van der Waals hemos visto que a temperaturas superiores a la crítica, las curvas se hacen suaves, lo cual no permite en este caso diferenciar las dos fases, gaseosa y líquida. No obstante, el estado sólido puede existir a temperaturas mayores que la crítica.

El proceso de paso del estado sólido al líquido está relacionado con cierto gasto de energía; en otras palabras, para que la masa dada del sólido pase al estado líquido a la misma temperatura, hay que comunicarle cierta cantidad de calor, denominada *calor de fusión*. Al solidificarse el líquido, esta energía se desprende en forma de calor. El calor de fusión es muy diferente para los distintos cuerpos; así tenemos que para el agua es igual a 80 cal/g, y para el mercurio, solamente 2,75 cal/g.

En la pag. 375, al estudiar el ciclo de Carnot realizado con una mezcla de líquido y vapor saturado sobre él, hemos visto que se puede establecer cierta dependencia entre el calor de vaporización por un lado y la elasticidad de los vapores saturados en función de la temperatura, por otro. Todos los razonamientos aducidos en aquel párrafo siguen en vigor incluso cuando, como cuerpo de trabajo (agente de transformación), se toma una mezcla de fases sólida y líquida de un cuerpo cualquiera.

Así tenemos que la fórmula [(6) de la pag. 375]:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{1}{T} \cdot \frac{\lambda}{V_0' - V_0} \qquad (1)$$

sigue siendo válida para el caso cuando T es la temperatura de fusión; λ, el calor de fusión; V_0' y V_0, los volúmenes específicos respectivos de las fases líquida y sólida, y p, la presión de la mezcla.

La fórmula (1) se puede escribir de la forma siguiente:

$$dT = T\frac{V_0' - V_0}{\lambda}\,dp, \tag{2}$$

en cuyo caso nos dará la variación de la temperatura de fusión dT en función de la variación de la presión dp.

De la fórmula (2) se deducen directamente las reglas indicadas de que si el volumen específico del líquido es mayor que el de la fase sólida ($V_0' > V_0$), al elevar la presión ($dp > 0$), el punto de fusión sube; si $V_0' < V_0$, al elevar la presión, el punto de fusión desciende. Por ejemplo, el volumen específico del hielo a 0 °C es $V_0 = 1{,}0908$ cm³/g, el volumen específico del agua a la misma temperatura es $V_0' = 1{,}0001$ cm³/g, el calor de fusión del hielo $\lambda = 79$ cal/g $= 33 \cdot 10^8$ erg/g. De aquí que, para valores de T próximos a 273° K, al variar la presión en dp se produce un cambio de temperatura de fusión

$$dT = -273\frac{0{,}0907}{33 \cdot 10^8}\,dp.$$

donde p se da en barias.

Si p se expresa en atmósferas, tenemos que

$$dT = -0{,}0076\,dp.$$

De aquí que para disminuir la temperatura de fusión del hielo en 1°, hay que aumentar la presión en $\frac{1}{0{,}0076}$ atm $\cong$ 130 atm, que concuerda con los datos arriba aducidos.

La temperatura de fusión depende en alto grado de la pureza de la substancia dada. A veces, impurezas insignificantes pueden hacer descender notablemente la temperatura de fusión. Para las aleaciones que no son composiciones químicas estrictamente determinadas, sino que pueden obtenerse en proporciones cualesquiera de los componentes fundidos, la temperatura de fusión es una función característica de la composición de la aleación (fig. 238). Sea una aleación formada de dos elementos A y B. Tomemos como abscisas la cantidad de las substancias A y B de la aleación, teniendo en cuenta que de izquierda a derecha se indica el sentido del aumento de la cantidad de la substancia A. Tomemos como ordenadas las temperaturas de fusión. El punto T_B representa la temperatura de fusión de la substancia pura B; pequeñas impurezas de la substancia A acarrean un descenso de la temperatura de fusión, que alcanza su mínimo en el punto C. La composición de la aleación correspondiente a este punto C se denomina *eutéctica*. Después, la temperatura de fusión se eleva, alcanzando el punto T_A que pertenece a la substancia pura A. De la marcha de la curva se ve que una pequeña adición del segundo componente (tanto del menos fusible al más fusible, como del más fusible al menos fusible), siempre acarrea *un descenso de la temperatura* de fusión en comparación con la temperatura de fusión de la substancia pura.

Los sólidos, como los líquidos, en mayor o menor grado se evaporan a cualquier temperatura formando el vapor de la substancia dada.

Enfriemos un líquido en un recipiente cerrado y supongamos que sobre él no hay más que vapor saturado. A medida que desciende la temperatura, la presión del vapor disminuye. Supongamos que

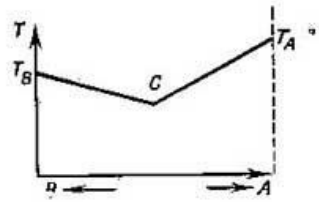


Fig. 238. Dependencia entre la temperatura de fusión y la composición de la aleación.

esta variación de la presión en función de la temperatura viene representada por la curva *CD* de la fig. 239.

El punto *D* corresponde a la temperatura de solidificación del líquido bajo la presión del vapor saturado. Al alcanzar el punto *D*,

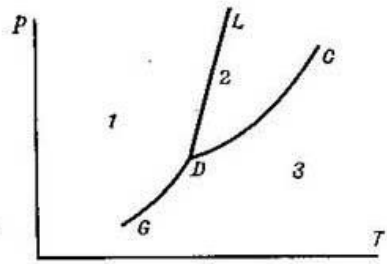


Fig. 239. Punto triple:
1 — fase sólida; 2 — fase líquida;
3 — fase gaseosa.

si se le sigue restando calor, empieza el paso del líquido al estado sólido; pero la temperatura permanece constante mientras toda la masa de líquido no se solidifique. Durante todo este tiempo, la presión del vapor saturado también permanece constante e igual a la ordenada del punto *D*. Cuando todo el líquido pase al estado sólido, sobre el sólido seguirá habiendo vapor saturado. Con el ulterior enfriamiento del sólido, empieza a descender también la presión del vapor saturado, pero según la curva *DG*.

Así tenemos que en el punto *D* coinciden dos curvas: la curva *GD*, que representa la presión del vapor saturado en función de la temperatura sobre una substancia en estado sólido, y la *CD* que representa lo mismo cuando la misma substancia está en estado líquido. A temperaturas inferiores a la correspondiente a la abscisa del punto *D*, el vapor no puede estar en equilibrio más que con el cuerpo sólido; a temperaturas superiores a ésta, el vapor puede estar

en equilibrio solamente con el líquido. En el punto D, los tres estados de la substancia, sólido, líquido y vapor saturado sobre ellos, o como se dice, las tres fases, se hallan en equilibrio. Por eso, el punto D se denomina *punto triple*.

La temperatura del punto triple es la de fusión de la substancia que se halla a la presión de su vapor saturado. Si la substancia se somete a mayores presiones, la temperatura de fusión también varía. Como se ha indicado, para la mayoría de los cuerpos, al aumentar la presión, se eleva también la temperatura de fusión.

Se puede construir una curva que exprese la dependencia entre la temperatura de fusión y la presión. Esta curva pasará por el punto triple D. En la fig. 239 esta curva viene representada por la línea DL. La fig. 239 se refiere al caso cuando la temperatura de fusión del cuerpo aumenta con la presión.

Como la temperatura de fusión depende muy poco de la presión (la curva DL está muy empinada), a las presiones corrientes (del orden de una atmósfera), la temperatura de fusión coincide con la del punto triple.

En la mayor parte de los casos se opera con cuerpos a temperaturas mucho menores que la del punto triple (hierro y otros metales a la temperatura de la habitación), por eso la presión de su vapor saturado es insignificante, y la evaporación de estos cuerpos sólidos prácticamente no existe. Pero cerca del punto triple, la presión del vapor saturado puede notarse perfectamente. Así tenemos que el agua en el punto triple (a 0,00748° C), tiene una presión de vapor saturado de $p_0 = 4{,}58$ mm Hg, a $-1°$ C, la presión del vapor saturado es de 4,22 mm Hg y a $-10°$ C aún sigue siendo igual a 1,95 mm Hg.

Esta elasticidad relativamente grande del vapor saturado explica la evaporación fácilmente perceptible del hielo, y en particular, el hecho de «secarse» la ropa mojada a temperaturas bajo cero. El yodo, en el punto triple (114° C), tiene una presión de vapor saturado igual a 90 mm Hg. Este alto valor de la presión del vapor saturado permite fácilmente demostrar en los cristales de yodo el proceso de evaporación («sublimación») de los cuerpos sólidos.

Una serie de substancias tienen, incluso en el punto triple, bajas presiones del vapor saturado; por ejemplo, la plata, a la temperatura de fusión (962° C), tiene una presión de vapor saturado que no es más que de $2 \cdot 10^{-3}$ mm Hg.

§ 95. Estructura cuasicristalina de los líquidos. En el § 78 ya se ha indicado que la naturaleza de los líquidos, sobre todo cerca de la temperatura de solidificación, se parece en mucho a la de los sólidos. Ahora vamos a examinar con mayor detención este parecido.

Ante todo hay que señalar que en la fusión (o en la solidificación), las propiedades de la substancia varían mucho menos que en la vaporización.

Ya se ha indicado que la fusión va acompañada de variaciones mucho menores del volumen específico que la vaporización, si ésta transcurre a temperaturas inferiores a la crítica.

Los calores de fusión son pequeños en comparación con los de evaporación.

Por ejemplo, a las temperaturas de ebullición, los calores de evaporación del sodio y del mercurio son respectivamente de 25 000 cal/mol y 14 000 cal/mol.

Los calores de fusión de los mismos elementos son respectivamente de 610 cal/mol y 570 cal/mol.

En la tabla XVII se comparan los calores específicos molares de una serie de substancias en los estados sólido y líquido.

Tabla XVII

Calores específicos molares a presión constante de substancias sólidas y líquidas

Substancia	Na	Hg	Pb	Zn	Al	HCl	CH_4
C_p (sólido)	7,6	6,7	7,2	7,2	6,14	12,27	10,0
C_p (líquido)	8,0	6,7	7,7	7,9	6,25	14,73	13,5

De la tabla se ve que los calores específicos molares, tanto de los cuerpos químicamente simples como de los compuestos, al pasar del estado sólido al líquido varían poco. Esto indica que el carácter del movimiento térmico de las partículas en estado líquido se aproxima al carácter del movimiento térmico de las partículas en estado sólido. En esta deducción se basa la teoría de Y. Frenkel señalada en el § 78, según la cual las moléculas del líquido oscilan alrededor de las posiciones temporales de equilibrio. La diferencia entre los estados líquido y sólido se reduce a lo siguiente: en los cuerpos sólidos, cada partícula (átomo o ion) oscila alrededor de una posición determinada de equilibrio, que permanece constante durante largo tiempo; en los líquidos, cada partícula también oscila alrededor de una posición determinada de equilibrio, pero en el transcurso de un intervalo de tiempo mucho menor, después del cual su posición de equilibrio varía. Designando el tiempo medio τ durante el cual la partícula permanece alrededor del lugar determinado de equilibrio, con el nombre de tiempo de vida «sedentaria», tenemos que el estado sólido de la substancia se caracteriza por una mayor duración de la vida «sedentaria» que el líquido.

En los párrafos anteriores hemos visto que en el estado sólido cristalino de los cuerpos, las partículas están dispuestas con deter-

minada simetría espacial según los vértices de una red geométrica regular. Se pregunta: ¿existe también algún orden en la disposición de las partículas del líquido (mejor dicho, en las posiciones temporales de equilibrio)? Una serie de hechos nos obliga a contestar afirmativamente a esta pregunta: las oscilaciones térmicas de las partículas de los líquidos no son independientes; en los líquidos puede haber las mismas ondas elásticas de radiación calorífica que en los sólidos (pág. 415); los rayos X, al atravesar un líquido, revelan, aunque borroso, un determinado y perceptible cuadro de difracción (véase el t. III). Pero al mismo tiempo hay que notar que los líquidos (excepto raros casos), no revelan ninguna anisotropía, la cual es característica de los sólidos cristalinos con su distribución regular de las partículas según los vértices de la red geométrica. Estas aparentes contradicciones se vencen basándose en la hipótesis según la cual en los líquidos existe la llamada «ordenación próxima» en la disposición de las partículas.

Por «ordenación próxima» se sobreentiende la disposición aproximadamente regular que tienen las partículas cercanas a la partícula dada. A medida que nos alejemos de la partícula dada, el orden de la disposición de las demás partículas respecto a la dada, se alterará más y más. En los límites de un volumen considerable, prácticamente las partículas están dispuestas desordenadamente. Esta disposición de las partículas corresponde a una estructura diferente de la verdaderamente cristalina de los sólidos, en que tiene lugar la «ordenación lejana» u «orden de largo alcance». En la «ordenación lejana», las partículas se disponen regularmente según los vértices de la red geométrica en un volumen considerable.

De lo dicho se deduce que el líquido tiene, hasta cierto grado, una estructura ordenada solamente dentro de los límites de pequeños volúmenes. Esta estructura se denomina *cuasicristalina*.

Al elevar la temperatura, la duración de la vida «sedentaria» de las partículas del líquido se hace cada vez menor, y el líquido, por sus cualidades, se aparta de los sólidos y se acerca a los gases densos.

La teoría aducida permite también explicar las propiedades mecánicas de los líquidos.

Como se sabe, los líquidos fluyen. Sin embargo, cuando actúan fuerzas en intervalos de tiempo muy breves, los líquidos viscosos revelan la propiedad de ser frágiles y son capaces de sufrir deformaciones elásticas. Ya en la segunda mitad del siglo pasado, Maxwell desarrolló la teoría formal del estado de la substancia en el cual se podían revelar al mismo tiempo la fluidez y la deformación elástica.

La tensión en esta substancia no desaparece inmediatamente al cesar la acción de la fuerza, sino según la ley:

$$p_t = p_0 e^{-t/\tau},$$

donde p_0 es el valor de la tensión inicial, p_t es el valor de la tensión al cabo del tiempo t después de cesar la acción de la fuerza. La magnitud τ se donomina *tiempo de relajación*.

Según Maxwell, la substancia se comporta como un sólido, si la fuerza actúa durante un intervalo de tiempo menor que el tiempo de relajación τ, y como un líquido, si la fuerza actúa durante un tiempo mayor que τ. Según la teoría de Frenkel, la substancia debe comportarse como un sólido solicitada por fuerzas tan fugaces, que su duración es menor que el de la vida «sedentaria» de las partículas. Efectivamente, durante intervalos de tiempo tan pequeños, las partículas permanecen alrededor de sus posiciones de equilibrio, y la substancia tiene la estructura característica del estado sólido. Si el tiempo en que actúan las fuerzas es mayor que el de la vida «sedentaria» de las partículas, la substancia revela la existencia de un flujo viscoso, es decir, se comporta como líquido. De esta manera tenemos que, en la teoría de Y. Frenkel, el tiempo de relajación adquiere sentido físico: coincide con el tiempo de vida «sedentaria» de las partículas.

§ 96. Absorción y adsorción de los gases por los sólidos. Los experimentos demuestran que si un cuerpo sólido cualquiera, que ha estado en contacto con un gas, se coloca en un recipiente del cual se va extrayendo el aire, el cuerpo empieza a emanar el gas con que había estado en contacto. De aquí se deduce que los sólidos absorben gases.

Esta absorción será tanto mayor cuanto mayor sea la presión del gas y cuanto mayor sea la superficie del sólido. Los materiales en polvo absorben mucho más que los trozos grandes de la misma composición y de la misma masa. Esto demuestra que la absorción, aunque sea en parte, tiene carácter de adherencia del gas a la superficie del sólido.

Un estudio más detallado indica que hay dos clases diferentes de imbibición de los gases por los sólidos: *absorción y adsorción*. *La adsorción* es la adherencia del gas a la superficie del sólido formando una delgada capa. *La absorción* u *oclusión* es la imbibición del gas por toda la masa del sólido, es decir, un proceso análogo a la disolución de los gases en los líquidos.

El gas adsorbido puede formar en la superficie del sólido una fina película monomolecular análoga a las capas monomoleculares que pueden existir en la superficie de los líquidos (§ 83).

La formación de una capa monomolecular de gas en la superficie de un sólido se debe a las grandes fuerzas de interacción existentes entre las moléculas del gas y del sólido. Hay que considerar que estas fuerzas tienen carácter de atracción y actúan solamente a pequeñas distancias. Por eso, cuando sobre la primera capa de moléculas de gas se posan moléculas nuevas, sobre éstas actúan solamente fuerzas de parte de las moléculas de la primera capa, y no de las molécu-

las del sólido; estas fuerzas son insuficientes para retener las moléculas del gas en una segunda capa.

En el vacío, la capa de moléculas adsorbida se desprende y se libera poco a poco de la superficie del sólido. Cuanto mayor sea la temperatura, con más rapidez se efectuará el proceso de desprendimiento del gas de la superficie del sólido.

La absorción u oclusión se realiza generalmente a elevadas temperaturas, ya que sólo a estas temperaturas se observa cierta difusión del gas hacia el interior del sólido.

Algunos sólidos son capaces de ocluir gas en grandes cantidades, ocurriendo que el volumen del gas absorbido (reducido a las condiciones normales) puede ser centenares de veces superior al propio volumen del sólido. El paladio candente puede absorber un volumen de hidrógeno (considerado a la presión normal) 1 000 veces superior al propio volumen del paladio. Los metales alcalinos absorben hidrógeno en alto grado, sobre todo el sodio. Al calentar estos metales en el vacío, los gases absorbidos se desprenden.

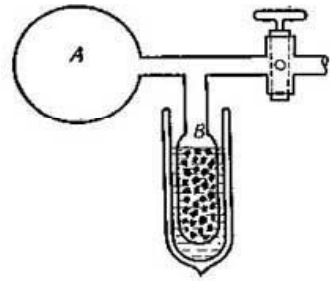


Fig. 240. Mejoramiento del vacío absorbiendo gases con carbón enfriado.

Los fenómenos de adsorción y de absorción (oclusión) desempeñan una gran función en la técnica del vacío. Para extraer el gas de las partes sólidas (sobre todo de las metálicas) introducidas en el recipiente o aparato en que se hace el vacío, hay que calentarlas a elevada temperatura extrayendo continuamente el aire. Por otro lado, el fenómeno de adsorción se utiliza para mejorar el vacío. Para estos fines se utiliza principalmente la capacidad del carbón de leña de adsorber en alto grado muchos gases, sobre todo a bajas temperaturas.

Al recipiente A, en el que se quiere elevar el grado de vacío (fig. 240), se une el recipiente B lleno de carbón sin gases. Al sumergir el recipiente B en el aire líquido, se enfría hasta la temperatura de —184° C absorbiendo el resto de gas del recipiente A. De esta manera se puede obtener un vacío del orden de 10^{-6} mm Hg.

En la tabla XVIII se dan (reducidos a las condiciones normales) los volúmenes de diferentes gases absorbidos por unidad de volumen de carbón a la temperatura del aire líquido.

De la tabla XVIII se ve que el gas que menos se absorbe a la temperatura del aire líquido es el helio. Esta propiedad del helio se utiliza para purificarlo: al hacer pasar helio impuro por un recipiente con carbón enfriado, los gases que acompañan al helio (nitrógeno, oxígeno, etc.) son en alto grado absorbidos por el carbón, mientras que el propio helio se absorbe en muy pequeñas cantidades.

Para que el carbón posea la propiedad de absorber en alto grado los gases, debe obtenerse en forma porosa y libre de los hidrocarburos que generalmente lleva en los poros. Para ello se calienta en un recipiente cerrado a la temperatura de 350—400° C, introduciendo y extrayendo alternativamente aire.

Esta elaboración se denomina *activación del carbón*. La activación del carbón se utiliza también en la técnica de la defensa militar: las caretas antigás corrientes llevan carbón activado.

Tabla XVIII

Volumen de gases absorbidos por el carbón a la temperatura del aire líquido

Gas	Volumen de gas absorbido por unidad de volumen de carbón
Helio	15
Hidrógeno	135
Nitrógeno	155
Argón	175
Oxígeno	230

En la superficie del sólido se pueden adsorber líquidos, además de gases. Las substancias adsorbidas cambian las propiedades de la superficie del sólido. Algunos sólidos, debido a las substancias adsorbidas en la superficie, tienen menor tenacidad. Al parecer, en este caso, desempeñan una función muy importante las grietas microscópicas y las rendijas entre los cristales de los cuerpos (metales) policristalinos. Las moléculas del líquido adsorbido penetran en las grietas microscópicas y las ensanchan. Este fenómeno tiene utilidad práctica: mojando la superficie del sólido con el líquido correspondiente se puede disminuir el trabajo necesario para cortar una pieza.

TERCERA PARTE

VIBRACIONES Y ONDAS

CAPÍTULO XI

Movimiento vibratorio armónico

§ 97. Vibraciones armónicas simples. Como demostramos en el § 89, en las deformaciones elásticas que cumplen la ley de Hooke aparece una fuerza dirigida hacia la posición de equilibrio y proporcional a la deformación.

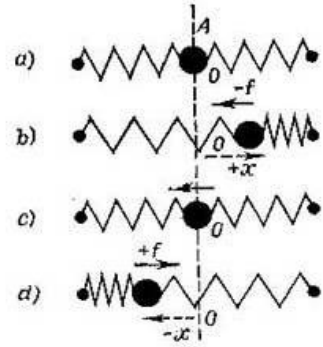


Fig. 241. Oscilaciones de un peso A, sujeto entre dos muelles, respecto a la posición de equilibrio O.

Supongamos que un peso A está sujeto entre dos muelles. Estos dos muelles están tensados por igual y el peso se encuentra en equilibrio en la posición O (fig. 241,*a*). Desviemos el peso de esta posición de equilibrio hacia la derecha (fig. 241, *b*) una distancia igual al

segmento $+x$ (consideraremos positivos los segmentos tomados de izquierda a derecha). En estas condiciones, el muelle de la derecha estará comprimido y el de la izquierda estirado, y sobre el peso actuará una fuerza $-f$ dirigida hacia la posición de equilibrio O, cuyo valor numérico será tanto mayor, cuanto mayor sea la desviación x. Bajo la acción de esta fuerza el peso A comienza a moverse hacia la posición de equilibrio con una velocidad cada vez mayor. Al llegar de nuevo a la posición de equilibrio (fig. 241, *c*), la fuerza f será igual a cero, pero el peso tendrá una reserva de velocidad $-v$,

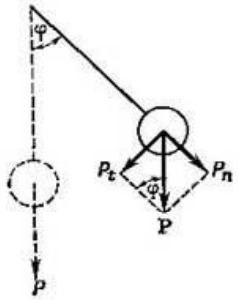


Fig. 242. Oscilaciones de un péndulo.

que le permitirá atravesar la posición de equilibrio y continuar moviéndose hacia la izquierda. Al ocurrir esto, el muelle izquierdo se comprime, el derecho se estira y sobre el peso comienza a actuar una fuerza $+f$ dirigida hacia la derecha, es decir, hacia la posición de equilibrio. Esta fuerza frenará el movimiento del peso hasta que éste se pare. Luego el peso comenzará a moverse en sentido contrario. De esta forma se establece un movimiento vibratorio u oscilatorio del peso A en torno a su posición de equilibrio.

Otro ejemplo de movimiento oscilatorio puede ser el de un péndulo plano (fig. 242). Cuando el hilo del péndulo está en posición vertical, la fuerza de la gravedad P aplicada al peso se equilibra con la tensión del hilo. Pero si el péndulo se desvía de la posición de equilibrio, un ángulo cualquiera φ, solamente una parte de la fuerza de la gravedad P estará compensada por la reacción del hilo, concretamente, la componente P_n de dicha fuerza paralela al hilo. La componente P_t, perpendicular a él y numéricamente igual a P sen φ, está dirigida hacia la posición de equilibrio del péndulo y no está equilibrada. Cuando el ángulo φ es pequeño, el seno puede sustituirse por el propio ángulo y P_t será aproximadamente igual a $P\varphi$. La separación del peso del péndulo de su posición de equilibrio se llama *elongación* y se determina por el ángulo φ. Cuando φ es pequeño, la fuerza que hace que el peso vuelva a la posición de equilibrio es proporcional al ángulo φ.

Bajo la influencia de esta fuerza el péndulo entra en movimiento oscilatorio con relación a su posición de equilibrio. En este caso el

movimiento no se produce por una fuerza elástica, sino por la componente de la fuerza de la gravedad P_t dirigida hacia la posición de equilibrio y proporcional (cuando el ángdlo φ es pequeño) a la elongación del péndulo. Por consiguiente, esta fuerza es análoga a las fuerzas elásticas y las oscilaciones que produce (cuando los ángulos φ son pequeños) coinciden, por el carácter del movimiento, con las vibraciones debidas a una fuerza elástica.

Las fuerzas, que, sin ser elásticas por su naturaleza, son análogas a éstas por su dependencia de la elongación, se llaman *cuasielásticas.*

Los ejemplos anteriores demuestran que la acción de las fuerzas elásticas o cuasielásticas da lugar al movimiento vibratorio u oscilatorio. Estudiemos más detenidamente este movimiento.

Determinemos la posición de un punto material de masa m por su separación x de la posición de equilibrio, es decir, por su elongación; en la posición de equilibrio $x = 0$. Toda fuerza elástica (o cuasielástica) f se caracteriza por ser proporcional a su elongación x y estar dirigida hacia la posición de equilibrio; por lo tanto, podemos escribir:

$$f = -kx. \tag{1}$$

El signo menos significa que la fuerza está dirigida en sentido contrario a la elongación x; por ejemplo, si la elongación es hacia arriba, la fuerza actúa hacia abajo; si la separación x es hacia abajo, la fuerza actúa hacia arriba, y así sucesivamente. El coeficiente k es positivo. Por la segunda ley de Newton:

$$m\vec{w} = \vec{f} = -kx, \tag{2}$$

donde w es la aceleración del punto material que se estudia.

Esta aceleración w es igual a la segunda derivada de la elongación con respecto al tiempo, es decir, $w = \frac{d^2x}{dt^2}$; para abreviar, designaremos esta segunda derivada poniendo dos puntos sobre la magnitud de la cual se toma, por lo tanto $w = \ddot{x}$. Poniendo esta expresión de w en (2), obtenemos:

$$m\ddot{x} = -kx \tag{3}$$

o

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x. \tag{3a}$$

Como k y m son dos magnitudes positivas, la razón entre ellas puede igualarse al cuadrado de una magnitud ω, es decir, podemos introducir la designación

$$\frac{k}{m} = \omega^2. \tag{4}$$

Esta magnitud ω, por razones que expondremos más adelante, se llama *frecuencia circular o cíclica.*

Poniendo en (3a) este valor de k/m, podemos escribir:

$$\ddot{x} = -\omega^2 x. \tag{5}$$

Ahora se nos plantea el problema de determinar el movimiento de un punto del cual sabemos, por la fórmula (5), que su aceleración es proporcional a la elongación x y está dirigida hacia la posición de equilibrio. Para conocer el movimiento de un punto hay que saber su posición en función del tiempo; en nuestro caso hay que determinar la elongación x como función del tiempo t. Por consiguiente, tenemos que hallar una relación entre x y t que cumpla la ecuación (5). No es difícil comprobar que esta relación viene dada por la ecuación:

$$x = a \cos (\omega t + \alpha), \tag{6}$$

donde a y α son dos constantes arbitrarias que pueden hallarse partiendo de las condiciones iniciales. Efectivamente, si tomamos la segunda derivada de x con respecto al tiempo veremos que el valor de $\ddot{x}$ obtenido convierte la ecuación (5) en identidad. El factor a se llama *amplitud*; el argumento $\omega t + \alpha$, *fase*, y la constante α, *fase inicial de la vibración.* Con el mismo derecho podríamos haber tomado la ecuación en la forma:

$$x = a \operatorname{sen} (\omega t + \alpha); \tag{7}$$

en este caso, al determinar la constante α, en cada caso particular encontraríamos un valor distinto del obtenido por la ecuación (6). Pero este valor diferente de la constante α nos daría en cada momento un valor numérico del seno, en la ecuación (7), igual al valor numérico del coseno de la ecuación (6), es decir, los movimientos representados por las ecuaciones (6) y (7) serían idénticos.

Las ecuaciones (6) y (7) reciben el nombre *de ecuaciones del movimiento vibratorio armónico*; pasemos ahora a estudiarlas.

La propiedad fundamental del movimiento vibratorio armónico simple es su periodicidad. Para simplificar, supongamos que la fase inicial es $\alpha = 0$, entonces

$$x = a \cos \omega t. \tag{6a}$$

Cuando $t = 0$ tenemos que $\cos \omega t = +1$, de donde $x = +a$. Convengamos en tomar los valores positivos de la elongación hacia la derecha y los negativos hacia la izquierda de la posición de equilibrio (fig. 243). Entonces, el punto material A, que realiza las oscilaciones armónicas, en el momento en que $t = 0$ se encontrará a una distancia a (hacia la derecha) de la posición de equilibrio. Esta es la elongación máxima del punto hacia la derecha, puesto

que el cos ωt no puede ser mayor de $+1$. Al aumentar el tiempo t, comenzará a disminuir el valor del cos ωt y el punto se trasladará hacia la izquierda, aproximándose a la posición de equilibrio O. En el momento determinado por la condición de que $\omega t = \frac{\pi}{2}$, es decir, cuando $t = \frac{\pi}{2\omega}$, el punto se encontrará en su posición de equilibrio O. Al seguir aumentando el tiempo, el coseno tomará

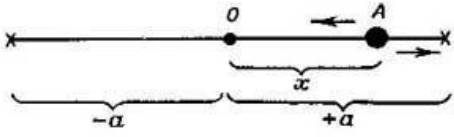


Fig. 243. Separación del punto oscilante de la posición de equilibrio (elongación).

valores negativos y el punto A se desviará hacia la izquierda de la posición O. Cuando $t = \frac{\pi}{\omega}$, el coseno toma el valor de -1, de donde $x = -a$, es decir, el punto alcanza su posición extrema izquierda. Después comienza a moverse hacia la derecha, vuelve a pasar por O, y en el momento en que $t = T = \frac{2\pi}{\omega}$, vuelve a llegar a la máxima elongación derecha, después de lo cual se repite el movimiento. De esta forma, el punto retorna al estado inicial del movimiento al cabo de un tiempo

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \tag{8}$$

Este tiempo T se llama *período de la vibración*. Durante un tiempo igual al período T, el cuerpo A que oscila, pasa por cada punto de su trayectoria dos veces (a excepción de los correspondientes a las elongaciones máximas $x = \pm a$), una vez en una dirección y otra en la contraria.

La magnitud $\omega = \frac{2\pi}{T}$ representa el número de vibraciones u oscilaciones en 2π unidades de tiempo. La magnitud a, llamada *amplitud*, expresa la máxima separación posible del punto vibrante con relación a la posición de equilibrio (elongación máxima).

Cuando $\alpha \neq 0$ tenemos, que en el momento inicial $t = 0$ el punto A se encuentra en el sitio determinado por el valor de $x = a \cos \alpha$. Partiendo de este punto también se puede estudiar el carácter del movimiento durante un período T. Por consiguiente, la fase inicial α determina la posición del punto vibrante en el momento inicial $t = 0$.

Junto con la frecuencia cíclica ω podemos estudiar también la frecuencia ordinaria $\nu = \frac{1}{T}$, que nos da el número de vibraciones por unidad de tiempo. Comparando estas tres magnitudes ω, ν y T, hallamos entre ellas la relación siguiente:

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}. \tag{9}$$

Poniendo estos valores de ω en (6), obtenemos otras dos expresiones del movimiento vibratorio armónico:

$$x = a\cos(2\pi\nu t + \alpha), \tag{6b}$$

$$x = a\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \alpha\right). \tag{6c}$$

Aplicando la fórmula (4) y la correlación $T = \frac{2\pi}{\omega}$, obtenemos para el período la magnitud

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{10}$$

De esta forma, vemos que el período de la vibración depende exclusivamente de las características dinámicas del problema, es decir, de la masa m y del coeficiente k.

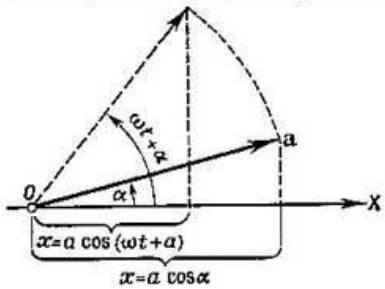


Fig. 244. Representación del movimiento vibratorio armónico como proyección de un vector a, que gira con velocidad angular constante.

En muchos casos relacionados con el estudio del movimiento vibratorio resulta cómodo el procedimiento geométrico de representar la vibración por medio del vector amplitud.

Este procedimiento se reduce a lo siguiente. Tomemos un eje, que llamaremos X (fig. 244) y en él un punto cualquiera O. Apliquemos a este punto, y formando con el eje X un ángulo α igual a la fase inicial de vibración, un vector que, en una escala determinada, sea numéricamente igual a la amplitud a. Como vemos en la figura, la proyección del vector a sobre el eje X nos da la elongación del punto $x = a\cos\alpha$, en la misma escala que la amplitud. Si hacemos que el vector amplitud gire con una velocidad angular ω, en sentido contrario al de las agujas del reloj, llegará un momento t

en que forme con el eje X un ángulo $\omega t + \alpha$ y en el cual su proyección sobre el eje X sea igual a

$$x = a \cos (\omega t + \alpha),$$

es decir, a la elongación del punto vibratorio en el momento t. De aquí podemos sacar la conclusión siguiente: el movimiento vibratorio armónico puede representarse por el movimiento de la proyección del extremo del vector amplitud, aplicado a un punto cualquiera de un eje determinado (formando con él un ángulo igual a la fase inicial), que gira con una velocidad angular ω alrededor de dicho punto. Así se comprende por qué la magnitud ω se llama *frecuencia circular*.

§ 98. Velocidad y aceleración del movimiento vibratorio armónico. Ejemplos. La elongación x de un punto material A que realiza oscilaciones armónicas, según la fórmula (6) del § 97 es igual a

$$x = a \cos (\omega t + \alpha), \tag{1}$$

donde a es la amplitud de la vibración; ω, la frecuencia circular y α, la fase inicial. La velocidad del punto v es igual numéricamente a la derivada con respecto al tiempo de la elongación x, es decir, $v = \frac{dx}{dt}$. Designemos la primera derivada con respecto al tiempo por un punto situado sobre la letra que expresa la magnitud de la cual se toma la derivada. Entonces, derivando, tenemos que

$$v = \dot{x} = -a\omega \operatorname{sen} (\omega t + \alpha). \tag{2}$$

La aceleración del punto A se obtiene tomando la derivada de la velocidad respecto al tiempo:

$$w = \frac{dv}{dt} = \ddot{x} = -a\omega^2 \cos (\omega t + \alpha). \tag{3}$$

Introduciendo en las fórmulas (2) y (3), en lugar de ω, el período $T = \frac{2\pi}{\omega}$, obtenemos

$$v = -\frac{2\pi}{T} a \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{T} t + \alpha\right), \tag{2a}$$

$$w = -\frac{4\pi^2}{T^2} a \cos \left(\frac{2\pi}{T} t + \alpha\right). \tag{3a}$$

Esta última igualdad, basándonos en la fórmula (1), puede escribirse también como sigue:

$$w = -\frac{4\pi^2}{T^2} x,$$

de donde volvemos a obtener que la aceleración del movimiento vibratorio armónico es proporcional a la elongación x y está dirigida hacia la posición de equilibrio (compárese con la pág. 427).

Por las fórmulas (2*a*) y (3*a*) vemos, que la velocidad y la aceleración de un punto que realiza un movimiento vibratorio armónico son funciones periódicas del tiempo, con el mismo período T que tiene la elongación x. Examinemos ahora las variaciones de la velocidad y de la aceleración durante una oscilación. Para ello hagamos una tabla de los valores de v y w, en diferentes momentos, y comparémoslos con los de la elongación x en estos mismos momentos. La fase inicial α volveremos a considerarla igual a cero para mayor facilidad.

En la tabla vemos que la velocidad alcanza sus valores máximos absolutos, $|v|_{\text{máx}} = \frac{2\pi}{T}a$, cuando el punto oscilante A pasa por la posición de equilibrio; en las elongaciones extremas, cuando $x = \pm a$, la velocidad es igual a cero. La aceleración, por el contrario, es igual a cero cuando el punto A pasa por la posición de equilibrio (en este momento la fuerza es igual a cero) y alcanza sus valores máximos absolutos, $|w|_{\text{máx}} = \frac{4\pi^2}{T^2}a$, en las elongaciones extremas. La aceleración siempre está dirigida hacia la posición de equilibrio.

La amplitud de la vibración y la fase inicial, como dijimos antes, se determina partiendo de los datos iniciales. Supongamos que en el momento inicial $t = 0$ conocemos la velocidad v_0 de la partícula y su elongación x_0. En estas condiciones, poniendo $t = 0$ en las expresiones (1) y (2), tenemos

$$x_0 = a\cos\alpha, \quad v_0 = -a\omega\,\text{sen}\,\alpha, \tag{4}$$

o

$$\frac{v_0}{\omega} = -a\,\text{sen}\,\alpha. \tag{5}$$

Tabla XIX

Valores de x, v y w para un movimiento armónico en diferentes momentos de tiempo

t	x	v	w
0	$+a$	0	$-\frac{4\pi^2}{T^2}a$
$\frac{1}{4}T$	0	$-\frac{2\pi}{T}a$	0
$\frac{1}{2}T$	$-a$	0	$+\frac{4\pi^2}{T^2}a$
$\frac{3}{4}T$	0	$+\frac{2\pi}{T}a$	0
T	$+a$	0	$-\frac{4\pi^2}{T^2}a$

Elevando al cuadrado y sumando miembro a miembro las expresiones (4) y (5), obtenemos

$$x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} = a^2,$$

de donde

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}. \qquad (6)$$

Dividiendo la expresión (5) hallada por $x_0 = a \cos \alpha$, obtenemos

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{v_0}{\omega x_0}. \qquad (7)$$

Las expresiones (6) y (7) dan la amplitud a y la fase inicial α, determinadas por medio de la elongación inicial x_0 y de la velocidad inicial v_0. De esta forma vemos, que un punto de masa dada sometido a la acción de una misma fuerza elástica puede realizar vibraciones de distinta amplitud y diferente fase inicial de acuerdo con las condiciones iniciales, pero su período de vibración se conserva siempre igual.

Si un peso colgado de un muelle se separa de su posición de equilibrio, comienza a oscilar con una amplitud que dependerá de la tensión que se le dio al muelle antes de comenzar el movimiento y de la velocidad inicial que se comunicó al peso; el período de la oscilación estará determinado únicamente por la masa m del peso y por la rigidez del muelle k, independientemente de la amplitud.

La fase inicial de la vibración, como hemos visto anteriormente, depende del momento inicial que se elija: como momento inicial puede tomarse, por ejemplo, aquel en el cual la elongación del punto $x_0 = +a$, en este caso, de acuerdo con la correlación (6), tendremos, que $v_0 = 0$, y por la correlación (7) la fase inicial será igual a cero: $\alpha = 0$.

Examinemos varios ejemplos.

Ejemplo 1. Determinar el período de oscilación de un peso $P = 2{,}5$ kgf, colgado de un muelle, si este último se estira 9 cm cuando se le aplica una fuerza de 3 kgf.

Solución. Para obtener el coeficiente de elasticidad del muelle hay que dividir 3 kgf por la deformación que producen:

$$k = \frac{3}{9} \text{ kgf/cm} = \frac{1}{3} \text{ kgf/cm},$$

después de lo cual hallamos T por la fórmula (10) del § 97

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{P}{gk}} = 2\pi \sqrt{\frac{2{,}5 \cdot 3}{981}} \text{ s} = 0{,}55 \text{ s}.$$

Ejemplo 2. Determinar el período de oscilación de un péndulo matemático de longitud l.

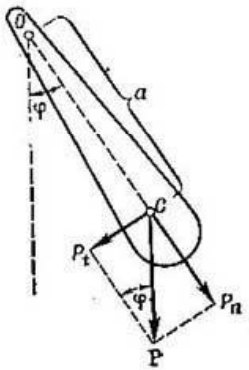
Se llama péndulo simple o matemático aquel que tiene un hilo cuyo peso se puede despreciar dentro de las condiciones del problema dado.

Solución. Llamemos m a la masa del peso del péndulo y supongamos que éste se desvía de la vertical un ángulo φ. La fuerza que hace que el peso del péndulo se mueva en dirección a su posición de equilibrio es la componente de la fuerza de la gravedad P_t perpendicular al hilo (fig. 242). De acuerdo con lo dicho en la pag. 427, esta componente P_t, cuando el ángulo de desviación φ es pequeño, es aproximadamente igual a $P\varphi$ y está dirigida hacia la posición de equilibrio, de donde

$$P_t = -P\varphi = -mg\varphi, \tag{8}$$

donde g es la aceleración de la gravedad; el signo menos indica que la fuerza P_t está dirigida en sentido contrario al de los ángulos positivos de elongación φ.

La aceleración tangencial a la trayectoria del peso es igual a $l\ddot{\varphi}$, de donde por la segunda ley de Newton, tenemos:



$$ml\ddot{\varphi} = P_t$$

o por (8)

$$ml\ddot{\varphi} = -mg\varphi, \quad \text{de donde} \quad \ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\varphi.$$

Designando g/l por medio de ω^2, obtenemos:

$$\ddot{\varphi} = -\omega^2\varphi.$$

Fig. 245. Oscilaciones de un cuerpo pesado alrededor de un eje O.

Esta ecuación relativa a la elongación angular φ del péndulo es totalmente análoga a la ecuación (5) del § 97. Por consiguiente, φ es una función periódica respecto al tiempo, cuyo período es

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{9}$$

La fórmula (9) nos da el período de oscilación de péndulo matemático, que buscábamos, el cual, como vemos, depende exclusivamente de la longitud l del péndulo y de la aceleración de la gravedad g en el lugar dado de la Tierra.

Ejemplo 3. Determinar el período de oscilación alrededor de su eje O (fig. 245) de un cuerpo de peso P, cuyo centro de gravedad C se encuentra situado a una distancia a del eje de rotación. Considerar que los ángulos de desviación φ, respecto a la posición de equilibrio, son pequeños.

Solución. La fuerza de la gravedad $\mathbf{P}$ puede considerarse aplicada al centro de gravedad C. Lo mismo que en el ejemplo anterior, el cuerpo se moverá hacia la posición de equilibrio bajo la acción de la componente P_t de la fuerza de la gravedad, la cual, cuando los ángulos φ son pequeños, es aproximadamente

$$P_t = -P\varphi.$$

El momento de esta fuerza con relación al eje de rotación O (véase el § 35), es

$$M = P_t a = -P\varphi a. \tag{10}$$

Bajo la influencia de este momento M el cuerpo adquiere una acelaración angular $\beta = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}$ (véase el § 35)

$$\beta = \frac{M}{I},$$

donde I es el momento de inercia del cuerpo con respecto a eje O. Poniendo en esta expresión en lugar de M su valor, según (10), y $\ddot{\varphi}$ en lugar de β, obtenemos:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{P \cdot a}{I}\varphi.$$

Esta ecuación es totalmente análoga a la ecuación (5) del § 97 o a la ecuación relativa a φ que examinamos en el ejemplo anterior. De aquí se deduce que cuando los ángulos de elongación del cuerpo sean pequeños, éste realizará un movimiento oscilatorio armónico, respecto a su posición de equilibrio, cuyo período será

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Pa}}. \tag{11}$$

Aprovechando la correlación $P = mg$, donde m es la masa del cuerpo, podemos escribir la expresión del período de la forma siguiente:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{mga}}. \tag{11a}$$

Todo cuerpo capaz de oscilar de esta forma respecto a su posición de equilibrio se llama *péndulo compuesto* o *péndulo físico*.

La magnitud

$$L = \frac{I}{ma} \tag{12}$$

suele llamarse *longitud equivalente del péndulo físico*.

Como quiera que en la expresión del momento de inercia I (véase el § 35) entra la masa, la longitud equivalente del péndulo físico L no depende de su masa total, sino únicamente *de su forma geométrica y de la distribución de las masas en él*.

Poniendo en (11a) el valor de la longitud equivalente del péndulo, obtenemos

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}};$$

de esta forma, la fórmula del período de oscilación del péndulo compuesto o físico toma un aspecto análogo a la del período de oscilación del péndulo simple o matemático [fórmula (9) del ejemplo anterior].

§ 99 Energía del movimiento vibratorio armónico. Supongamos que un punto material de masa m oscila influenciado por una fuerza cuasielástica

$$f = -kx,$$

donde x es la elongación del punto. Al oscilar, el punto material tiene una velocidad y, por consiguiente, una energía cinética

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2. \tag{1}$$

El punto oscilante tendrá además una energía potencial. La circunstancia de que el punto tenga distinta velocidad en sus distintas posiciones indica, que su energía cinética E_c varía con el tiempo. Es evidente que al mismo tiempo varía también la energía potencial. Esta energía potencial se mide por el trabajo realizado por las fuerzas externas para conseguir una determinada desviación x. Como se demostró en el § 25, el trabajo de la fuerza elástica es numéricamente igual a $kx^2/2$. De esta forma, para la energía potencial E_p obtenemos la expresión:

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2. \tag{2}$$

Poniendo en las fórmulas (1) y (2) los valores de v y x que dan las expresiones (1) y (2) del § 98, obtenemos:

$$E_c = \frac{1}{2} ma^2\omega^2 \operatorname{sen}^2(\omega t + \alpha), \tag{1a}$$

$$E_p = \frac{1}{2} ka^2 \cos^2(\omega t + \alpha). \tag{2a}$$

La energía cinética E_c es igual a cero allí donde la potencial alcanza un máximo, es decir, en las posiciones en que la desviación es máxima; la energía cinética alcanza su máximo al pasar el punto por la posición de equilibrio, es decir, cuando la energía potencial es igual a cero.

La energía total E del punto vibrante se expresa por la suma de las dos formas de energía, es decir,

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} ma^2\omega^2 \operatorname{sen}^2(\omega t + \alpha) + \frac{1}{2} ka^2 \cos^2(\omega t + \alpha).$$

Como, de acuerdo con la designación adoptada, $m\omega^2 = k$, esta expresión se puede escribir de la forma:

$$E = \frac{1}{2} ka^2 \operatorname{sen}^2(\omega t + \alpha) + \frac{1}{2} ka^2 \cos^2(\omega t + \alpha),$$

de donde

$$E = \frac{1}{2} ka^2, \tag{3}$$

es decir, la energía total E es proporcional al cuadrado de la amplitud de la oscilación y al coeficiente de elasticidad k.

Haciendo uso de la igualdad $k = m\omega^2 = m\frac{4\pi^2}{T^2}$, la fórmula (3) puede escribirse también de la forma siguiente:

$$E = \frac{2\pi^2 m}{T^2} a^2. \tag{4}$$

Por las fórmulas (3) y (4) puede verse que *la energía total es constante durante todo el tiempo que dura la vibración*, como tenía

que ocurrir de acuerdo con el principio de la conservación de la energía.

En las posiciones correspondientes a la desviación máxima toda la energía pasa a ser potencial, mientras que al atravesar la posición de equilibrio toda la energía pasa a ser cinética; en todas las demás posiciones del punto vibrante existen ambas formas de la energía. La representación gráfica de la energía del movimiento vibratorio fue estudiada en el § 29.

De lo expuesto se deduce, que durante el tiempo que dura el movimiento vibratorio la energía pasa constantemente de potencial a cinética y viceversa. Al ocurrir esto, en cada período T, toda la energía E pasa *dos* veces a ser energía cinética E_c (al atravesar las dos veces la posición de equilibrio) y dos veces a ser energía potencial E_p (en ambas posiciones extremas). En este sentido podemos hablar de «oscilaciones» de la energía, entendiendo por esto su paso de cinética a potencial unas veces y de potencial a cinética otras. Por lo que acabamos de decir se ve, que esta «oscilación» de la energía se realiza con un período T', igual a la mitad del período del propio movimiento vibratorio T.

Examinemos el siguiente ejemplo de determinación de la energía de la vibración.

Determinar la energía de la vibración de un peso, que está colgado de un muelle, por los datos siguientes: el peso se separa 8 cm de la posición de equilibrio en el momento inicial y después se suelta. Sobre el muelle se sabe que sometido a una fuerza de 2 kgf se estira 1 cm.

Solución. Como quiera que en el momento inicial el peso no tiene velocidad ($v_0 = 0$), la amplitud de la oscilación es $a = x_0 = 8$ cm.

El coeficiente de elasticidad k se determina de la forma siguiente:

$$k = \frac{2}{1} \text{ kgf/cm} = 2 \text{ kgf/cm} = 2 \cdot 980 \cdot 10^3 \text{ dinas/cm},$$

de donde la energía total

$$E = \frac{1}{2} ka^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 980 \cdot 10^3 \cdot 64 \text{ ergios} \cong 6{,}3 \cdot 10^7 \text{ ergios} = 6{,}3 \text{ julios}.$$

Como se ve, este resultado no depende de la masa del cuerpo que vibra.

§ 100. Composición de movimientos vibratorios que tienen la misma dirección. Con frecuencia nos encontramos con movimientos en los cuales un cuerpo realiza simultáneamente dos o más oscilaciones. Por ejemplo, si colgamos un peso de un muelle sujeto al techo de un vagón montado sobre ballestas, este peso realizará un movimiento oscilatorio con respecto al punto de sujeción, el cual, a su vez, vibra sobre las ballestas del vagón; de esta forma, el peso realizará un movimiento compuesto de dos vibraciones de una misma dirección.

Veamos qué movimiento resulta al componer estas vibraciones.

Empecemos por estudiar la composición de dos vibraciones que

tengan el mismo sentido e igual período, que se realicen con cierta diferencia de fases y que tengan diferentes amplitudes. Tomemos las vibraciones:

$$x_1 = a_1 \cos(\omega t + \alpha_1), \quad x_2 = a_2 \cos(\omega t + \alpha_2). \tag{1}$$

Las frecuencias cíclicas ω de ambas vibraciones son iguales, puesto que supusimos iguales sus períodos.

La elongación x, cuando el cuerpo toma parte simultáneamente en dos vibraciones, se expresa por la suma algébrica de las elongaciones x_1 y x_2:

$$x = x_1 + x_2 = a_1 \cos(\omega t + \alpha_1) + a_2 \cos(\omega t + \alpha_2). \tag{2}$$

Efectuemos esta suma gráficamente. Representemos ambas vibraciones por sus vectores amplitud (véase el § 97), aplicados a un punto arbitrario O que se encuentre en el eje X (fig. 246). La amplitud a_1

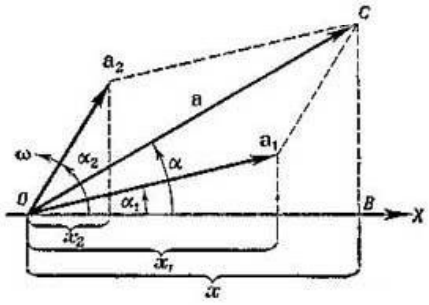


Fig. 246. Suma de vectores representativos de los movimientos vibratorios armónicos de igual período.

se toma en el momento inicial formando un ángulo α_1 con el eje X y la amplitud a_2 formando un ángulo α_2. Ambas amplitudes giran con la misma velocidad angular ω y en sentido contrario al de las agujas del reloj. Por consiguiente, el ángulo que hay entre los vectores $\mathbf{a}_2$ y $\mathbf{a}_1$ todo el tiempo se conserva igual a $\alpha_2 - \alpha_1$. Como la suma de las proyecciones de dos vectores sobre un eje es igual a la proyección, sobre este mismo eje, del vector resultante de aquéllos, la vibración resultante se puede representar por el vector amplitud $\mathbf{a}$, igual a la suma geométrica de los vectores amplitud $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$, es decir,

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2. \tag{3}$$

Observando la fig. 246 vemos que

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1). \tag{4}$$

El vector amplitud resultante a gira, evidentemente, con la misma velocidad angular que los vectores amplitud de las vibraciones que se componen.

El ángulo α, formado por el vector amplitud resultante con el eje X en el momento inicial, como vemos en la fig. 246, es igual a

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{OB} = \frac{a_1 \operatorname{sen}\alpha_1 + a_2 \operatorname{sen}\alpha_2}{a_1 \cos\alpha_1 + a_2 \cos\alpha_2}. \qquad (5)$$

La oscilación resultante vendrá expresada por la proyección del vector amplitud a sobre el eje X, es decir, será igual a

$$x = x_1 + x_2 = a \cos(\omega t + \alpha). \qquad (6)$$

Vemos, pues, que el movimiento resultante es una vibración armónica de la misma dirección y período que las vibraciones componentes. La amplitud a y la fase inicial α de la vibración resultante se determinan respectivamente por medio de las amplitudes y de las fases iniciales de las vibraciones componentes, por las fórmulas (4) y (5).

Tiene importancia advertir, que, de acuerdo con la fórmula (4), *la amplitud de la oscilación resultante a depende de la diferencia de fases* $\alpha_2 - \alpha_1$ *de las vibraciones componentes*. Como el coseno no puede ser mayor que $+1$ ni menor que -1, por la fórmula (4) vemos, que la amplitud resultante a no puede ser mayor que la suma ni menor que la diferencia de las amplitudes componentes a_1 y a_2, es decir, que tiene que estar comprendida entre los límites

$$a_1 + a_2 \geqslant a \geqslant |a_2 - a_1|.$$

Si la diferencia de fases de las vibraciones componentes es *igual a cero o a* $2k\pi$, siendo k un número entero, el coseno de la diferencia de las fases será igual a $+1$, y por la fórmula (4) obtendremos

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2,$$

de donde

$$a = a_1 + a_2,$$

es decir, *la amplitud de la oscilación resultante a es igual a la suma de las amplitudes de las vibraciones componentes* a_1 *y* a_2, *cuando la diferencia de fases* $\alpha_2 - \alpha_1 = 2k\pi$, *siendo* $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Si *la diferencia de fases* de las vibraciones componentes *es igual a un múltiplo impar de* π, el coseno de dicha diferencia será igual a -1, y para la amplitud a obtendremos por (4), el valor:

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2,$$

de donde

$$a = |a_2 - a_1|.$$

Tomamos aquí el valor absoluto de la diferencia $a_2 - a_1$, porque la amplitud a, por su propio significado, solamente puede ser una magnitud positiva.

De lo expuesto de deduce, que la *amplitud de la oscilación resultante a es igual al valor absoluto de la diferencia de amplitudes de las vibraciones componentes* a_2 *y* a_1, *cuando la diferencia de las fases es* $\alpha_2 - \alpha_1 = (2k + 1)\pi$, *siendo* $k = 0, 1, 2, \ldots$

Supongamos ahora que las vibraciones que se componen tienen la misma dirección pero períodos distintos. Entonces, en el diagrama vectorial del movimiento vibratorio (fig. 247) los vectores amplitud componentes a_1 y a_2 giran con distintas velocidades y, por consiguiente, el ángulo que forman entre sí no es constante, sino que varía

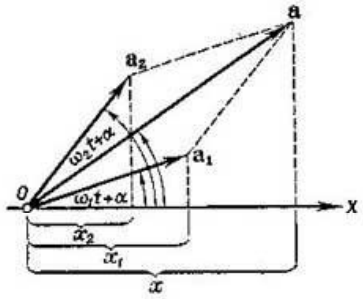


Fig. 247. Suma de vectores representativos de los movimientos vibratorios armónicos de períodos distintos.

con el tiempo. Como consecuencia de esto varía también la magnitud de la amplitud resultante a.

Supongamos que las vibraciones componentes tienen unas frecuencias cíclicas ω_1 y ω_2. Como la diferencia de fases de las vibraciones componentes es variable, podemos tomar en calidad de momento inicial aquel en que las fases iniciales de las dos vibraciones sean iguales, es decir, representar las oscilaciones en la forma:

$$x_1 = a_1 \cos(\omega_1 t + \alpha), \quad x_2 = a_2 \cos(\omega_2 t + \alpha), \tag{7}$$

donde se supone que $\omega_2 > \omega_1$.

La diferencia de fases de las amplitudes componentes será igual a $(\omega_2 - \omega_1)\, t$. Poniendo este valor de la diferencia de fases en la fórmula (4), en lugar de $\alpha_2 - \alpha_1$, obtenemos la siguiente expresión del cuadrado de la amplitud resultante

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(\omega_2 - \omega_1)\, t. \tag{8}$$

De esta forma, la magnitud de la amplitud a de la oscilación resultante varía con el tiempo con un período determinado.

La velocidad angular con que gira el vector amplitud resultante, en este caso, no es constante, y, por lo tanto, el movimiento resultante *no es una vibración armónica.*

Estudiemos especialmente el resultado de la composición de dos vibraciones de igual amplitud $a_1 = a_2$, cuyos períodos y, por consiguiente, frecuencias cíclicas se diferencien entre sí muy poco.

Suponiendo $a_1 = a_2$ en la fórmula (8), obtenemos:

$$a^2 = 2a_1^2 [1 + \cos(\omega_2 - \omega_1) t] = 4a_1^2 \cos^2 \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t$$

o

$$a = \left| 2a_1 \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right|. \qquad (9)$$

Aquí, lo mismo que en la pág. 438 tomamos los valores absolutos de las magnitudes de la derecha, porque la amplitud es una magnitud positiva en esencia. El período del valor *absoluto* del coseno es igual a π; por consiguiente, el período τ de la variación del valor absoluto de la amplitud será igual al tiempo durante el cual el argumento del coseno varía en π, es decir, τ se determina por la condición:

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \tau = \pi,$$

de donde

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}. \qquad (10)$$

La frecuencia ν de variación de la amplitud, o sea, la magnitud inversa del período τ, es igual

$$\nu = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi} = \nu_2 - \nu_1, \qquad (10a)$$

es decir, *la frecuencia ν de variación de la amplitud de la vibración resultante es igual a la diferencia de frecuencias $\nu_2 - \nu_1$ de las vibraciones componentes.* El ángulo que forma la amplitud resultante con el eje X, como vemos en la fig. 247, es igual a $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \alpha$; por consiguiente, el vector amplitud resultante gira en este caso con una velocidad angular constante, igual a la semisuma de las frecuencias cíclicas de las vibraciones componentes. El movimiento resultante podemos obtenerlo tomando la proyección del vector amplitud resultante sobre el eje X, de donde la elongación resultante x será

$$x = a \cos \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \alpha \right)$$

o por la fórmula (9)

$$x = \left| 2a_1 \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right| \cos \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \alpha \right). \qquad (11)$$

Como supusimos que ω_2 se diferencia poco de ω_1, la magnitud $\omega' = \omega_2 - \omega_1$ será pequeña en comparación con la magnitud $\omega_1 + \omega_2$, de donde tenemos: que la vibración resultante (11) puede considerarse como un movimiento vibratorio armónico que se realiza con una frecuencia cíclica de $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ y cuya amplitud a no perma-

nece constante, sino que varía periódicamente con el tiempo de acuerdo con la correlación (9). El período τ de variación de la amplitud a viene dado por la fórmula (10). Gráficamente, este género de vibraciones está representado en la fig. 248. La amplitud de esta vibración unas veces aumenta y otras disminuye; este fenómeno se conoce con el nombre de *pulsación*.

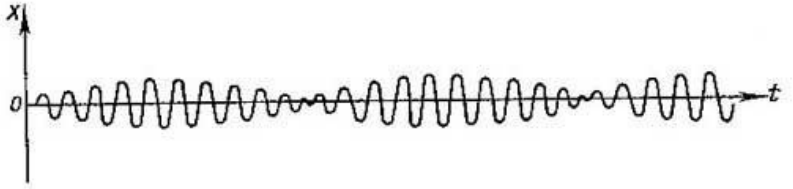


Fig. 248. Pulsación.

§ 101. Composición de movimientos vibratorios perpendiculares entre sí. Estudiemos ahora el resultado de la composición de dos movimientos vibratorios cuyas direcciones sean perpendiculares entre sí. Supongamos primeramente que el punto material realiza simultáneamente dos vibraciones perpendiculares entre sí y de igual período. Sean las direcciones correspondientes a dichas vibraciones las señaladas por los ejes OX y OY.

Las ecuaciones de las vibraciones serán:

$$x = a_1 \cos(\omega t + \alpha_1), \quad y = a_2 \cos(\omega t + \alpha_2), \tag{1}$$

donde a_1 y a_2, y α_1 y α_2 son respectivamente las amplitudes y las fases de las vibraciones primera y segunda.

Determinemos la ecuación de la trayectoria del punto, para lo cual eliminaremos el tiempo en las ecuaciones (1).

Escribamos la ecuación (1) de la forma

$$\frac{x}{a_1} = \cos\omega t \cdot \cos\alpha_1 - \operatorname{sen}\omega t \cdot \operatorname{sen}\alpha_1, \tag{2}$$

$$\frac{y}{a_2} = \cos\omega t \cdot \cos\alpha_2 - \operatorname{sen}\omega t \cdot \operatorname{sen}\alpha_2. \tag{2a}$$

Multiplicando (2) por $\cos\alpha_2$ y (2a) por $\cos\alpha_1$, y restándolas miembro a miembro, obtenemos

$$\frac{x}{a_1}\cos\alpha_2 - \frac{y}{a^2}\cos\alpha_1 = \operatorname{sen}\omega t \cdot \operatorname{sen}(\alpha_2 - \alpha_1).$$

Multiplicando (2) por $\operatorname{sen}\alpha_2$ y (2a) por $\operatorname{sen}\alpha_1$, y restándolas miembro a miembro, obtenemos

$$\frac{x}{a_1}\operatorname{sen}\alpha_2 - \frac{y}{a_2}\operatorname{sen}\alpha_1 = \cos\omega t \cdot \operatorname{sen}(\alpha_2 - \alpha_1).$$

Elevando al cuadrado y sumando miembro a miembro las dos últimas ecuaciones, hallamos la ecuación de la trayectoria:

$$\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{a_2^2}-\frac{2xy}{a_1a_2}\cos(\alpha_2-\alpha_1)=\operatorname{sen}^2(\alpha_2-\alpha_1). \qquad (3)$$

Esta es la ecuación de una elipse, cuyas características vienen determinadas por el valor de la diferencia de fases $\alpha_2-\alpha_1$. Estudiemos varios casos particulares. Supongamos que la diferencia de fases $\alpha_2-\alpha_1$ de las oscilaciones componentes es igual a cero, es decir,

$$\alpha_1=\alpha_2=\alpha.$$

La ecuación de la trayectoria (3) tomará en este caso la forma:

$$\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{a_2^2}-\frac{2xy}{a_1a_2}=0 \quad \text{o} \quad \left(\frac{x}{a_1}-\frac{y}{a^2}\right)^2=0,$$

de donde

$$\frac{x}{y}=\frac{a_1}{a_2},$$

es decir, obtenemos la ecuación de una recta que pasa por el origen de coordenadas y que forma con el eje OX un ángulo cuya tangente es igual a a_2/a_1 (fig. 249, *a*).

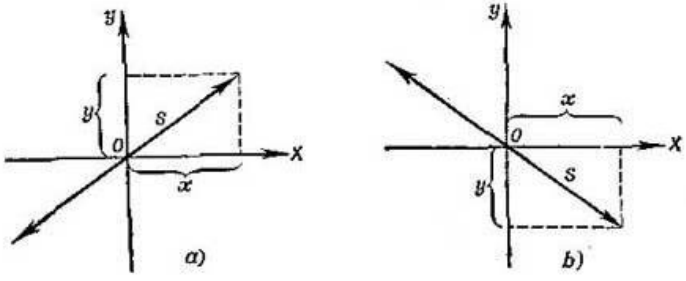


Fig. 249. De la composición de dos movimientos vibratorios perpendiculares entre sí, con fases iguales u opuestas, resulta un movimiento vibratorio armónico a lo largo de una recta.

Por esta recta realiza el punto vibraciones armónicas, puesto que su posición sobre la recta viene dada por el segmento s, igual a

$$s=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{a_1^2\cos^2(\omega t+\alpha)+a_2^2\cos^2(\omega t+\alpha)}=$$
$$=\sqrt{a_1^2+a_2^2}\cos(\omega t+\alpha);$$

por consiguiente, el período de la vibración resultante es igual al de las vibraciones componentes, y la amplitud a de la resultante es igual a

$$a=\sqrt{a_1^2+a_2^2}.$$

Supongamos ahora que la diferencia de fases $\alpha_2 - \alpha_1$ de las vibraciones componentes es igual a π, es decir,

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \pi.$$

La ecuación de la trayectoria (3) tomará en este caso el aspecto:

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} + \frac{2xy}{a_1 a_2} = 0, \quad \text{de donde} \quad \frac{x}{y} = -\frac{a_1}{a_2}.$$

Esta ecuación también representa una recta situada como se muestra en la figura 249,*b*; el punto realiza por esta recta oscilaciones armónicas de la misma amplitud que en el caso anterior.

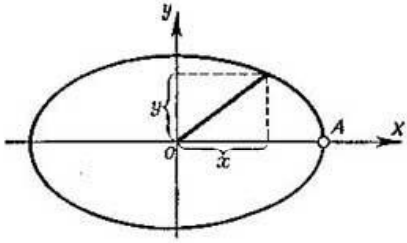


Fig. 250. Obtención de un movimiento elíptico por composición de dos movimientos vibratorios armónicos perpendiculares entre sí.

Si la diferencia de fases $\alpha_2 - \alpha_1$ de las vibraciones componentes es igual a $\pi/2$ ó $3\pi/2$, la ecuación de la trayectoria toma la forma:

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} = 1. \qquad (4)$$

Esta es la ecuación de una elipse referida a los ejes OX y XY (fig. 250). Si la diferencia de fases $\alpha_2 - \alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, el punto se mueve por la elipse siguiendo la dirección de las agujas del reloj. Esto puede demostrarse escribiendo la ecuación de las oscilaciones componentes de la forma siguiente:

$$x = a_1 \cos(\omega t + \alpha),$$

$$y = a_2 \cos\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -a_2 \operatorname{sen}(\omega t + \alpha).$$

En un momento determinado el argumento de ambas expresiones es igual a cero; en este momento el punto vibrante se encuentra en A (fig. 250); en el momento siguiente el argumento aumenta y, por consiguiente, x será positiva e y negativa; el punto irá hacia abajo y se moverá en el sentido de las agujas del reloj. Cuando la diferencia de fases de las vibraciones componentes es igual a $3\pi/2$, razonando de manera análoga se puede demostrar que el punto se moverá por la elipse en sentido contrario al de las agujas del reloj.

Cuando la diferencia de fases cambia de signo, el punto invierte el sentido de su movimiento por la elipse. Por ejemplo, cuando $\alpha_2 -$

$-\alpha_1 = -\frac{\pi}{2}$ obtenemos un movimiento en sentido contrario al de las agujas del reloj, mientras que si $\alpha_2 - \alpha_1 = -\frac{3\pi}{2}$, el sentido del movimiento del punto coincidirá con el de las agujas. Es evidente, que cuando las amplitudes sean iguales la elipse se transformará en una circunferencia.

De esta forma, dos oscilaciones armónicas perpendiculares entre sí

$$x = a\cos\omega t,$$

$$y = a\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right), \tag{5}$$

que pueden escribirse tambien de la forma

$$x = a\cos\omega t, \quad y = -a\,\text{sen}\,\omega t, \tag{5a}$$

dan al componerse un movimiento uniforme siguiendo una circunferencia de radio a con una velocidad angular ω, *en el sentido de las agujas del reloj.*

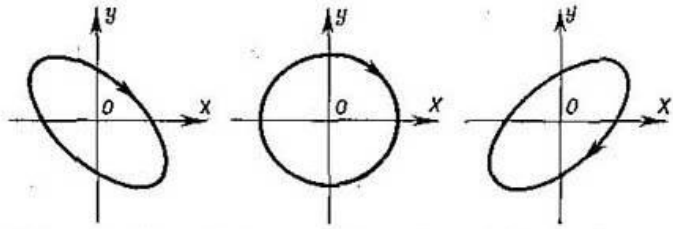


Fig. 251. Diferentes tipos de trayectorias que se producen al componer dos movimientos vibratorios armónicos perpendiculares entre sí de un mismo período.

Y al contrario, todo movimiento uniforme que se realice siguiendo una circunferencia de radio a, en el sentido de las agujas del reloj y con una velocidad angular ω, puede descomponerse en dos oscilaciones armónicas perpendiculares entre sí como las representadas por las fórmulas (5) ó (5a).

Del mismo modo, dos vibraciones armónicas perpendiculares entre sí:

$$x = a\cos\omega t, \quad y = a\cos\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right) = a\,\text{sen}\,\omega t \tag{6}$$

dan al componerse un movimiento circular uniforme, de radio a y velocidad angular ω, en sentido contrario al de las agujas del reloj.

Todos los demás valores de la diferencia de fases, a excepción de $\pm\pi/2$ y $\pm 3\pi/2$, dan elipses no reducidas a los ejes OX y OY. En la fig. 251 se representan algunas de las formas de las trayectorias que pueden resultar de la composición de dos movimientos vibratorios armónicos perpendiculares entre sí que tengan el mismo período.

De lo anteriormente expuesto se deduce que el movimiento de un punto por una elipse también puede descomponerse en dos vibraciones perpendiculares entre sí, cuyas fases se diferencien según la forma de la elipse y la dirección del movimiento del punto.

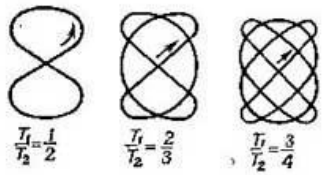


Fig. 252. Diferentes tipos de trayectorias que se producen al componer dos movimientos vibratorios armónicos perpendiculares entre sí y de períodos distintos (figuras de Lissajous).

Si las vibraciones perpendiculares entre sí tienen períodos distintos, las trayectorias que se obtienen al componerlas tienen formas más complicadas. En la fig. 252 están representadas las trayectorias correspondientes a algunos casos particulares; estas trayectorias reciben el nombre de *figuras de Lissajous*.

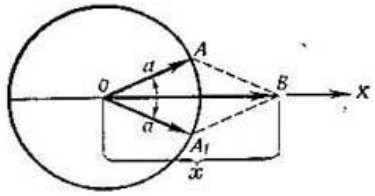


Fig. 253. Composición de dos vibraciones circulares representadas por los vectores OA y OA_1 que giran en sentidos opuestos.

Finalmente estudiemos la posibilidad de descomponer la vibración rectilínea de un punto en dos «vibraciones circulares». Para explicar esto, fijémonos en la fig. 253. Supongamos que un punto, a partir de su posición de equilibrio O, se desvía al mismo tiempo en dos direcciones. Una de estas desviaciones está representada por el vector OA y la otra por el vector OA_1, numéricamente igual a OA. Llamemos a la longitud de cada uno de estos vectores elongación. La elongación resultante será igual a la suma geométrica de las dos componentes; por consiguiente, la posición del punto vibrante estará determinada por el punto B de la fig. 253. Supongamos que los vectores elongación giran alrededor del punto O en dos direcciones contrarias, pero con igual velocidad angular ω; en este caso la elongación resultante tendrá la dirección de la recta OB, que llamaremos eje X. La distancia del punto B a la posición de equilibrio O estará determinada en un momento dado por la magnitud x, la cual, como puede verse en la figura, es igual a

$$x = 2a \cos (\omega t + \alpha),$$

es decir, la elongación resultante es de por sí una vibración armónica cuya amplitud es igual al doble del radio de la circunferencia que

recorren los extremos de los vectores OA y OA_1. El período de la oscilación es igual al período de giro de los vectores elongación.

De aquí se deduce, que la elongación puede considerarse en el movimiento armónico rectilíneo como la suma geométrica de dos vectores elongación, que giran en sentidos contrarios y con una velocidad angular igual a la frecuencia cíclica ω de la vibración. La magnitud de estos vectores es igual a la mitad de la amplitud de la vibración y en cada momento dado están situados simétricamente con relación a la recta que sirve de trayectoria al punto.

§ 102. Oscilaciones amortiguadas. En la práctica, toda vibración de un punto material que no sea mantenida por energía exterior, se amortigua, es decir, su amplitud disminuye a medida que pasa el tiempo. Esto amortiguamiento se debe a las fuerzas que frenan el movimiento vibratorio, como, por ejemplo, la de rozamiento en el punto de suspensión cuando se trata de un péndulo, o la de la resistencia que opone el medio. Para analizar esta cuestión hay que escribir la ecuación que expresa la segunda ley de Newton, teniendo en cuenta la resistencia. Nosotros nos limitaremos a estudiar el caso en que un punto realiza vibraciones rectilíneas en un medio viscoso. La resistencia del medio depende de la velocidad con que se mueve el punto y, como vimos en el § 42, cuando dicha velocidad es pequeña puede considerarse proporcional a ella y dirigida en sentido contrario. Por consiguiente, la resistencia del medio puede suponerse igual a $-r\dot{x}$, donde r es una magnitud constante denominada *coeficiente de resistencia*. Esta fuerza se suma a la fuerza elástica $-kx$, de donde la fuerza total que actúa sobre el punto será $f = -kx - r\dot{x}$ y, por consiguiente, la segunda ley de Newton puede escribirse de la forma siguiente:

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}. \tag{1}$$

Dividiendo los dos miembros de esta ecuación por la masa m, obtenemos

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x - \frac{r}{m}\dot{x}. \tag{1a}$$

Haciendo

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2 \quad \text{y} \quad \frac{r}{m} = 2\beta, \tag{2}$$

donde ω_0^2 y β son magnitudes positivas, podemos escribir la ecuación (1a) de la forma

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - 2\beta\dot{x}. \tag{1b}$$

A la ecuación (1b) puede dársele la forma que vimos en el § 97. Para ello introducimos una nueva variable z, ligada a x por la ecuación:

$$x = z \cdot e^{-\beta t}. \tag{3}$$

Realicemos un cambio de variables en la ecuación (1b) valiéndonos de las igualdades:

$$\dot{x} = e^{-\beta t}\cdot\dot{z} - \beta e^{-\beta t}\cdot z;$$

$$\ddot{x} = e^{-\beta t}\cdot\ddot{z} - 2\beta e^{-\beta t}\cdot\dot{z} + \beta^2 e^{-\beta t} z.$$

Poniendo estos valores de $\dot{x}$ y $\ddot{x}$ en la ecuación (1b) y simplificando todos sus términos en $e^{-\beta t}$, obtenemos

$$\ddot{z} - 2\beta\dot{z} + \beta^2 z = -\omega_0^2 z + 2\beta^2 z - 2\beta\dot{z}.$$

o

$$\ddot{z} = -(\omega_0^2 - \beta^2)\, z. \tag{4}$$

Suponiendo que la resistencia del medio es tan pequeña que $\omega_0^2 > \beta^2$*), tendremos que $\omega_0^2 - \beta_0^2$ será una magnitud positiva que podremos representar por $\omega_0^2 - \beta^2 = \omega^2$, después de lo cual la ecuación (4) tomará la forma:

$$\ddot{z} = -\omega^2 z. \tag{4a}$$

La ecuación (4a) coincide con la (5) del § 97, cuya solución conocemos. Por esto, por analogía, podemos escribir la solución de la ecuación (4a) de la forma:

$$z = a_0 \cos(\omega t + \alpha), \tag{5}$$

donde a_0 y α son constantes que deben determinarse de acuerdo con las condiciones iniciales. Repitiendo los razonamientos expuestos en el § 97, llegamos a la conclusión de que z varía periódicamente y de que el período de la variación es

$$T = \frac{2\pi}{\omega},$$

y, poniendo en lugar de ω su valor $\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$,

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \tag{6}$$

Utilizando las expresiones (2), el período T también puede representarse de la forma:

$$T = \frac{2\pi m}{\sqrt{km - \frac{1}{4}r^2}}. \tag{6a}$$

*) Cuando la resistencia del medio es mayor, $\beta^2 > \omega_0^2$, y entonces, como puede demostrarse, el movimiento deja de ser periódico. Pero nosotros no estudiaremos este caso.

Poniendo en la solución (5) en lugar de z su valor, obtenemos, por la fórmula (3), la ecuación del movimiento de un punto sometido a la acción de una fuerza elástica en un medio que ofrece resistencia:

$$x = a_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha), \tag{7}$$

fórmula que puede presentarse también como

$$x = a \cos(\omega t + \alpha). \tag{7a}$$

Esta solución representa *una vibración cuya amplitud* $a = a_0 e^{-\beta t}$ *disminuye al transcurrir el tiempo.*

El período de la oscilación $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$ en un medio que ofrece resistencia es mayor que el período $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ de un punto de igual masa m, sometido a la acción de una misma fuerza elástica $f = -kx$, pero que se encuentre en un medio que no ofrezca resistencia.

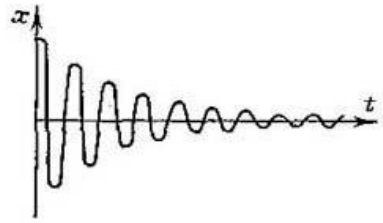


Fig. 254. Vibraciones amortiguadas.

El diagrama de x en función del tiempo se representa en la fig. 254. Como puede verse, la vibración se amortigua con el tiempo.

En estos amortiguamientos de tipo oscilante el logaritmo de la relación entre dos valores sucesivos de la amplitud, separados entre sí por un tiempo igual al período T, se llama *decremento logarítmico*. Llamando λ a este decremento, por definición, tendremos que

$$\lambda = \ln \frac{a_0 e^{-\beta t}}{a_0 e^{-\beta(t+T)}} = \ln e^{\beta T}, \quad \text{es decir,} \quad \lambda = \beta T. \tag{8}$$

Poniendo en la fórmula (7), en lugar de β, el decremento logarítmico λ obtenido por la fórmula (8) y, en lugar de ω, el período $T = \frac{2\pi}{\omega}$ obtenemos otra expresión de las vibraciones amortiguadas:

$$x = a_0 e^{-\lambda \frac{t}{T}} \cos\left(2\pi \frac{t}{T} + \alpha\right), \tag{7b}$$

donde el período T se determina por la fórmula (6) ó (6a).

El decremento logarítmico λ puede hallarse directamente por medio de observaciones, midiendo los valores de las amplitudes a_1 y a_2 de dos oscilaciones consecutivas, en cuyo caso, por definición,

tendremos que:

$$\lambda = \ln \frac{a_1}{a_2}.$$

Conociendo λ y valiéndonos de la correlación

$$r = 2\beta m = 2\frac{\lambda}{T} m,$$

podemos determinar el coeficiente de resistencia r.

Según la fórmula (7) las vibraciones no cesan totalmente hasta que no transcurra un plazo de tiempo infinitamente grande. Pero en realidad cesan dentro de un plazo finito, puesto que cuando la magnitud de las amplitudes llega a ser del mismo orden que las dimensiones de los átomos no es posible que existan vibraciones en un sistema macroscópico tomado en su conjunto. Cuando existe amortiguamiento, la energía comunicada al sistema al separarlo de su posición de equilibrio se va gastando paulatinamente en el trabajo que se realiza para vencer las fuerzas de rozamiento. Si se quiere que las vibraciones se mantengan hay que comunicar constantemente al sistema energía del exterior.

El péndulo de reloj puede servir de ejemplo de un sistema cuyas oscilaciones, a pesar de las fuerzas de rozamiento, conservan invariable la amplitud gracias a la energía que reciben. El mecanismo de escape del reloj empuja al péndulo de una manera acompasada con sus oscilaciones. La energía que se le comunica al ocurrir esto se toma de un muelle que se desenrolla o de una pesa que cae.

Todo sistema de esta especie, que mantenga invariable la amplitud de sus vibraciones, recibe el nombre de *sistema autooscilador*.

Para formarnos una idea más concreta de las vibraciones amortiguadas, resolvamos los dos ejemplos siguientes.

Ejemplo 1. El decremento logarítmico de las oscilaciones de un péndulo es igual a $\lambda = 0{,}02$. Determinar cuántas veces menor será la amplitud después de 100 oscilaciones completas de dicho péndulo.

Solución. En el momento inicial, cuando $t = 0$, la amplitud de la oscilación será

$$a = a_0 e^{-\beta t} = a_0 e^{-\lambda \frac{t}{T}}$$

igual a a_0.

Después de 100 oscilaciones, es decir, en el momento en que $t = 100\ T$, la amplitud de la oscilación será

$$a_{100} = a_0 e^{-\lambda \cdot 100}, \quad \text{de donde} \quad \frac{a_0}{a_{100}} = \frac{1}{e^{-\lambda \cdot 100}} = e^{\lambda \cdot 100} = e^2 \cong 7{,}4,$$

es decir, al cabo de 100 oscilaciones la amplitud disminuye en 7,4 veces.

Ejemplo 2. Hallar el decremento logarítmico de las oscilaciones amortiguadas de un péndulo, cuya longitud es $l = 50$ cm, si en 8 minutos pierde el 99% de su energía.

Solución. Llamemos a la energía de la oscilación del péndulo E_0 en el momento inicial y E_t después de transcurrir un tiempo $t = 8$ min =

= 480 s. Entonces, de acuerdo con las condiciones del ejemplo

$$\frac{E_t}{E_0} = \frac{1}{100}.$$

Y como la energía de las oscilaciones es directamente proporcional al cuadrado de las amplitudes, tendremos que

$$\frac{a_t}{a_0} = \sqrt{\frac{1}{100}} = \frac{1}{10}.$$

La amplitud en el momento inicial, en que $t = 0$, es igual a a_0; la amplitud al cabo de un tiempo t es igual a $a_t = a_0 e^{-\lambda \frac{t}{T}}$, siendo T el período de oscilación del péndulo, de donde $\frac{a_t}{a_0} = e^{-\lambda \frac{t}{T}} = \frac{1}{10}$, y el decremento logarítmico buscado del amortiguamiento será $\lambda = \frac{T}{t} \ln 10$. Teniendo en cuenta que este amortiguamiento es muy débil, el período de oscilación T puede expresarse aproximadamente por medio de la fórmula ordinaria del período, es decir,

$$T \cong 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}};$$

de donde

$$\lambda \cong 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{\ln 10}{t} = 0{,}0068.$$

§ 103. Vibraciones forzadas. Estudiemos ahora las vibraciones de un punto material sobre el que actúa, además de la fuerza elástica y las de resistencia, una fuerza periódica complementaria. Un ejemplo de este tipo puede ser el de un peso, que estando colgado de un muelle, recibe impulsos a intervalos iguales de tiempo. Supongamos que esta *fuerza excitatriz* complementaria f_1 varía con el tiempo según la ley del seno o del coseno, es decir, que puede expresarse, por ejemplo, por la fórmula

$$f_1 = H \cos \omega t. \tag{1}$$

Esta suposición se reduce a admitir que dicha fuerza varía periódicamente y que su período es $T = \frac{2\pi}{\omega}$; la magnitud H recibe el nombre de amplitud de la fuerza y representa su valor máximo.

En este caso, la ecuación que expresa la segunda ley de Newton se escribe de la forma siguiente:

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + H \cos \omega t; \tag{2}$$

el segundo miembro de esta igualdad es la suma de las fuerzas elásticas $-kx$, de la resistencia del medio $-r\dot{x}$ y de la excitación $H \cos \omega t$. Escribamos esta ecuación en la forma

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - 2\beta \dot{x} + h \cos \omega t, \tag{2a}$$

donde ω_0 y β tienen el mismo significado que en el § 102 [fórmula (2)] y h es igual a la razón de la amplitud de la fuerza a la masa del punto

$$h = \frac{H}{m}. \tag{3}$$

Cuando no existe fuerza excitatriz ($h \cos \omega t = 0$) ni de rozamiento, el punto vibra con una frecuencia circular ω_0 (*oscilaciones libres o propias*).

Intentemos ahora hallar la solución de la ecuación (2a), suponiendo que

$$x = a \cos (\omega t + \alpha); \tag{4}$$

dicho de otro modo, vamos a buscar la solución suponiendo que como resultado de la acción de todas las fuerzas se obtiene una vibración cuyo período es igual al de la fuerza excitatriz. Poniendo la función (4) en la ecuación (2a), hallamos las magnitudes a y α, partiendo de la condición de que dicha ecuación ha de convertirse en identidad. Por la expresión (4) hallamos los valores siguientes de las derivadas primera y segunda de x respecto a t.

$$\dot{x} = -a\omega \operatorname{sen} (\omega t + \alpha), \quad \ddot{x} = -a\omega^2 \cos (\omega t + \alpha);$$

poniendo estos valores de $\dot{x}$ y $\ddot{x}$ en la ecuación (2a) obtenemos $-a\omega^2 \cos (\omega t + \alpha) = -\omega_0^2 a \cos (\omega t + \alpha) + 2\beta a\omega \operatorname{sen} (\omega t + \alpha) + h \cos \omega t$ o representando la función trigonométrica del argumento complejo en forma desarrollada:

$$-a\omega^2 (\cos \omega t \cos \alpha - \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} \alpha) =$$
$$= -\omega_0^2 a (\cos \omega t \cdot \cos \alpha - \operatorname{sen} \omega t \cdot \operatorname{sen} \alpha) +$$
$$+ 2\beta a\omega (\operatorname{sen} \omega t \cdot \cos \alpha + \cos \omega t \cdot \operatorname{sen} \alpha) + h \cos \omega t.$$

Para que esta ecuación se transforme en identidad es necesario que los coeficientes de $\cos \omega t$ y de $\operatorname{sen} \omega t$ sean iguales en ambos miembros; por lo tanto, obtenemos

$$-a\omega^2 \cos \alpha = -a\omega_0^2 \cos \alpha + 2\beta a\omega \operatorname{sen} \alpha + h,$$
$$a\omega^2 \operatorname{sen} \alpha = a\omega_0^2 \operatorname{sen} \alpha + 2\beta a\omega \cos \alpha$$

o

$$\left.\begin{aligned} a(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \alpha - 2\beta a\omega \cdot \operatorname{sen} \alpha = h, \\ a(\omega_0^2 - \omega^2) \operatorname{sen} \alpha + 2\beta a\omega \cdot \cos \alpha = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

De la segunda ecuación (5) obtenemos

$$tg\, \alpha = -\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \tag{6}$$

Elevando al cuadrado ambas ecuaciones (5) y sumándolas, tenemos

$$a^2 [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2] = h^2,$$

de donde

$$a = \frac{h}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \qquad (7)$$

Las expresiones (6) y (7) determinan respectivamente la fase y la amplitud de las *vibraciones forzadas* estabilizadas*).

Si sobre un cuerpo en reposo comienza a actuar una fuerza excitatriz $f_1 = H \cos \omega t$, aquél empezará a realizar vibraciones forzadas

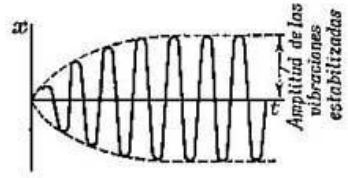


Fig. 255. Crecimiento de la amplitud de las vibraciones forzadas con el tiempo.

cuyas amplitudes irán aumentando hasta llegar al valor que determina la igualdad (7). La fig. 255 representa el aumento que experimentan con el tiempo las amplitudes de las vibraciones forzadas. En cuanto estas vibraciones se estabilizan, cesa el aumento de las amplitudes.

Por las fórmulas (6) y (7) vemos, que la amplitud a y la fase α de las vibraciones forzadas dependen de la correlación que existe entre la frecuencia ω de la fuerza excitatriz y la frecuencia ω_0 de las oscilaciones propias del punto. Las vibraciones, en términos generales, no coinciden «en fase» con la fuerza, es decir, la máxima elongación del punto no coincide con el momento en que la fuerza es máxima. Por la fórmula (6) vemos, que cuando la resistencia del medio es igual a cero, es decir, $\beta = 0$, las vibraciones y la fuerza tienen las mismas fases; en todos los demás casos la fase $\alpha \neq 0$. La expresión que ofrece más interés es la (7), que da las amplitudes de las vibraciones forzadas. La amplitud de la oscilación es proporcional a la amplitud de la fuerza. Cuando varía la frecuencia ω de la fuerza excitatriz, permaneciendo constante la frecuencia ω_0 de la oscilación propia, la amplitud de las oscilaciones forzadas también varía. Puede demostrarse que la amplitud de las vibraciones forzadas tiene un máximo cuando la frecuencia de la fuerza excitatriz ω_{res} satisface la correlación

---

*) En la teoría de las ecuaciones diferenciales se demuestra, que para hallar la solución general de la ecuación (2a) es necesario sumar las soluciones de la ecuación (4) y de la ecuación $\ddot{x} = -\omega_0^2 x - 2\beta\dot{x}$; no obstante, la solución de esta última ecuación, como demostramos en el § 102, representa de por sí unas vibraciones amortiguadas que, con el tiempo, dejan de representar un papel importante. Por el contrario, la solución de (4) no es amortiguada y se cumple mientras existe la fuerza excitatriz f_1.

$\omega_{res}^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2$ *). Este máximo da lugar al llamado *fenómeno de la resonancia*. Basándonos en la correlación obtenida tenemos, que *la frecuencia de resonancia* ω_{res} será igual a

$$\omega_{res} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (8)$$

Al mismo tiempo, por la fórmula (7), la amplitud máxima (de resonancia) alcanza el valor

$$a_{res} = \frac{h}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (9)$$

Si la resistencia del medio es igual a cero, es decir, $\beta = 0$, la amplitud máxima se obtiene cuando

$$\omega_{res} = \omega_0,$$

es decir, cuando la frecuencia de la fuerza excitatriz ω se hace igual a la frecuencia ω_0 de las oscilaciones propias; en este caso la amplitud de las vibraciones forzadas se hace infinita. Cuando el valor de β es diferente de cero, la amplitud nunca llega al ser igual al infinito y su máximo se obtiene para los valores de ω_{res} menores de ω_0. En la fig. 256 se muestra cómo las amplitudes de las vibraciones forzadas dependen de la frecuencia de la fuerza excitatriz, para distintos valores de β. Como puede verse, cuanto mayor es el coeficiente de amortiguamiento β, menos agudamente se manifiesta el máximo de la amplitud.

Las curvas de la fig. 256 se llaman *curvas de resonancia*. Estas curvas tienen un máximo tanto más alto y agudo cuanto menor es el amortiguamiento β del sistema resonante. Como en realidad β siempre es distinta de cero, con la resonancia es imposible que se produzcan amplitudes infinitas.

Veamos además la dependencia que existe entre la fase de las vibraciones forzadas α y la frecuencia [fórmula (6)]. Cuando $0 \leqslant \omega < \omega_0$ la tangente toma valores negativos y, por consiguiente, se obtienen para α las siguientes desigualdades: $0 \geqslant \alpha > -\frac{\pi}{2}$ ó $\pi \geqslant \alpha > \frac{\pi}{2}$. Suponiendo que en la primera de las ecuaciones (5) $\omega = 0$, hallamos: $a\omega_0^2 \cos\alpha = h$, y como quiera que a y h son positivas, cuando $\omega = 0$ obtenemos que el $\cos\alpha$ debe ser mayor que

---

*) Para convencerse de esto hay que hallar un mínimo del denominador de la expresión (7). Con este fin, igualamos a cero la derivada de dicho denominador:

$$-2(\omega_0^2 - \omega^2)\cdot 2\omega + 8\beta^2\omega = 0.$$

Y como ω no es igual a cero (puesto que a $\omega = 0$ corresponde un máximo), tendremos que el denominador de la expresión (7) alcanzará un mínimo para

$$\omega^2 = \omega_0^2 - 2\beta^2.$$

cero. Esta condición nos obliga a elegir una sola de las dos desigualdades, es decir, $0 \geqslant \alpha > -\frac{\pi}{2}$. De esta forma, cuando $0 \leqslant \omega \leqslant \omega_0$, la diferencia de fases α es negativa, es decir, la fase de las vibraciones forzadas se retrasa respecto a la de la fuerza excitatriz. Este retraso de fase aumenta a medida que el valor de ω se aproxima al de la frecuencia de resonancia ω_{res}. Cuando se produce la resonancia,

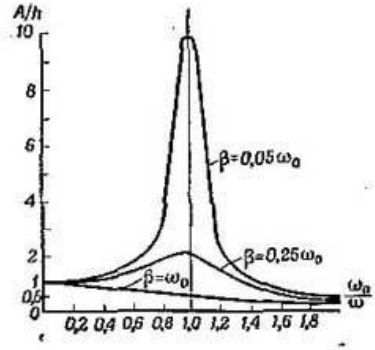


Fig. 256. Relación entre las amplitudes de las vibraciones forzadas y la frecuencia de la fuerza excitatriz, para diferentes coeficientes de amortiguamiento.

es decir, cuando $\omega = \omega_{res} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$, según la fórmula (6), la fase de las vibraciones forzadas viene determinada por la correlación:

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}{\beta}.$$

En los casos de resonancia aguda, β es pequeña, y para la tg α obtenemos aproximadamente

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\omega_0}{\beta}.$$

Como la magnitud ω_0/β es grande, la fase α se aproxima a $-\frac{\pi}{2}$. Cuando $\omega = \omega_0$, la fase $\alpha = -\frac{\pi}{2}$. Si $\omega > \omega_0$ la tangente del ángulo α es positiva y, por consiguiente, $\alpha < -\frac{\pi}{2}$, es decir, el retraso de fase aumenta todavía más. Cuando las frecuencias de la fuerza excitatriz son mucho mayores que las de las oscilaciones propias ω_0, la fase α, aunque sigue siendo negativa, tiende a $-\pi$. La relación entre α y la razón ω/ω_0 se muestra gráficamente en la fig. 257 referida a dos valores distintos de β: la curva *1* corresponde al valor menor de β (pequeño amortiguamiento) y la *2*, al valor mayor de β (gran amortiguamiento).

En las proximidades de la resonancia, donde $\alpha \cong -\pi/2$, la fuerza es positiva durante todo el tiempo que dura el movimiento, desde la elongación máxima negativa hasta la elongación máxima positiva, y es negativa durante el movimiento inverso; de forma, que dicha fuerza hace que aumente constantemente la amplitud de las vibraciones. Este aumento de amplitudes tiene lugar hasta que la totalidad del trabajo de la fuerzas externas se gaste en vencer las fuerzas de rozamiento que dan lugar a que se amortiguen las vibraciones. En

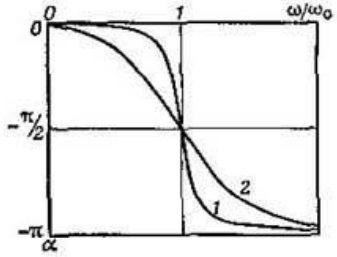


Fig. 257. Relación entre la face de las vibraciones forzadas y la frecuencia de la fuerza excitatriz.

estas condiciones, las amplitudes alcanzan el valor correspondiente a las vibraciones forzadas estabilizadas.

El trabajo de la fuerza exterior es máximo cuando la diferencia de fases es igual a $-\frac{\pi}{2}$, es decir, cuando la frecuencia se aproxima a la de resonancia. Para los demás desplazamientos de fase esta fuerza actúa unas veces como aceleradora y otras como retardadora del movimiento. Cuando $\alpha = 0$ ó $\alpha = -\pi$ la fuerza acelera el movimiento durante la mitad del tiempo y lo retarda durante la otra mitad, es decir, en total no realiza ningún trabajo.

De esto se deduce que, fuera del campo de la resonancia, la fuerza exterior sólo realiza un trabajo insignificante, pero al producirse la resonancia aumenta el trabajo. Este efecto se revela especialmente cuando la resonancia es aguda. En este caso β es pequeña y, como se ve en la fig. 257, es suficiente que la magnitud ω varíe desde un valor poco menor que ω_0 hasta otro poco mayor de ω_0, para que α varíe desde un valor próximo a $\alpha = 0$ hasta otro próximo a $\alpha = -\pi$. En este sentido se puede decir que la diferencia de fases entre la fuerza y la elongación se invierte al pasar la frecuencia por el valor $\omega_0 \cong \omega_{res}$.

El fenómeno de la resonancia desempeña un gran papel en muchos procesos físicos y en la técnica. En algunos casos este fenómeno resulta perjudicial. Veamos lo que ocurriría, por ejemplo, con un motor provisto de una excéntrica y sujeto a un soporte capaz de efectuar vibraciones elásticas. Al funcionar el motor se produciría una fuerza periódica que agitaría el soporte y provocaría en él vibraciones forzadas. Al producirse la resonancia, el motor comunicaría al soporte

una energía considerable y la amplitud de las vibraciones de este último podría llegar a alcanzar unas dimensiones peligrosas para su resistencia. Si el número de revoluciones del motor siguiera aumentando, cambiaría la diferencia de fases existente entre la fuerza que agitaba el soporte y los desplazamientos de éste; el trabajo de agitación del soporte, producido por el motor, disminuiría y con ello aumentaría todavía más su número de revoluciones, cosa también perniciosa, puesto que puede dar lugar a que se estropee el propio motor.

Una forma peculiar de resonancia es la llamada *resonancia paramétrica*. Las vibraciones de un sistema pueden ser producidas no sólo por la acción de fuerzas excitatrices como las que acabamos de estudiar, sino también a causa del cambio periódico de uno de sus parámetros, que en las vibraciones libres permanece constante. Por ejemplo, en un sistema mecánico las vibraciones pueden producirse como resultado de la variación del momento de inercia, de las dimensiones, de la tensión, etc. La amplitud de las vibraciones llega al máximo cuando existe una relación determinada entre la frecuencia ν_p de variación del parámetro y la frecuencia media de las oscilaciones propias $\overline{\nu}_0$. Esta relación es $\nu_p/\overline{\nu}_0 = 2/k$, donde k es un número entero, es decir, cuando $\nu_p/\overline{\nu}_0$ toma uno de los valores 2, 1, 1/2, 1/3, etc.

Las condiciones apropiadas para la resonancia paramétrica se producen tanto más fácilmente, cuanto mayor es la variación del parámetro y menores son las pérdidas de energía del sistema (rozamiento, resistencia). Lo más frecuente es que la resonancia paramétrica se produzca cuando $\nu_p/\overline{\nu}_0 = 2$. Como ejemplo sencillo de resonancia paramétrica puede servir el del balanceo de un columpio, cuando los que se mecen se agachan al compás de las oscilaciones de aquél. Al agacharse, la longitud equivalente del péndulo físico, que representa de por sí el columpio, varía periódicamente. Otro ejemplo de resonancia paramétrica nos lo ofrece la excitación de vibraciones que se producen en una cuerda variando periódicamente su tensión. Si la frecuencia de la variación periódica de la tensión se aproxima al doble de la frecuencia de las vibraciones propias de la cuerda, en ésta se producen fuertes vibraciones transversales, a pesar de que las fuerzas exteriores (la tensión) actúan a lo largo de ella. Las vibraciones que se producen a causa de la resonancia paramétrica pueden ser perjudiciales, por ejemplo, en las máquinas que tienen órganos móviles pueden dar lugar a la destrucción de sus cojinetes.

Examinemos un ejemplo sobre vibraciones forzadas.

E j e m p l o. Un cuerpo cuya masa es de 400 g está colgado de un muelle. Bajo la acción de un peso de 40 gf el muelle se estira 1 cm. El decremento logarítmico de las vibraciones del cuerpo es $\lambda = 1{,}57$. Determinar cuál es el período

de la oscilación en que se produce la resonancia y la amplitud correspondiente de resonancia, sabiendo que la amplitud de la fuerza excitatriz es igual a $H = 200$ gf.

S o l u c i ó n. Cuando el amortiguamiento es pequeño $\omega \cong \omega_0$ y, por consiguiente, el decremento logarítmico $\lambda = \frac{2\pi}{\omega}\beta \cong \frac{2\pi}{\omega_0}\beta$. Poniendo en la fórmula (8), en lugar de β, su valor aproximado en función de λ, obtenemos para la frecuencia de resonancia el valor

$$\omega_{res} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2};$$

en nuestro caso

$$\omega_{res} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1{,}57}{\pi}\right)^2} \cong 0{,}94\omega_0;$$

de donde

$$T_{res} = \frac{1}{0{,}94} T_0$$

o

$$T_{res} = 1{,}07 T_0,$$

donde T_{res} es el período en que se produce la resonancia y T_0 es el período de oscilaciones propias del cuerpo colgado del muelle. Según los datos del ejemplo:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{400}{40 \cdot 981}}\ \text{s} \cong 0{,}63\ \text{s}.$$

Por lo tanto, la resonancia se produce cuando el período

$$T_{res} = 1{,}07 \cdot 0{,}63\ \text{s} \cong 0{,}67\ \text{s}.$$

Poniendo en la fórmula (9) en lugar de k su valor H/m y en lugar de β el decremento logarítmico λ, obtenemos

$$a_{res} = \frac{\frac{H}{m}}{\omega_0^2 \frac{\lambda}{\pi} \sqrt{1 - \frac{1}{4}\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2}},$$

de donde, aplicando los datos numéricos hallamos que $a_{res} \cong 10$ cm.

§ 104. Representación de tipos oscilatorios cualesquiera por medio de vibraciones armónicas. Hasta ahora hemos estudiado en lo fundamental el movimiento armónico simple, es decir, el movimiento en que la elongación x de la partícula vibrante se expresa por la fórmula

$$x = a \cos(\omega t + \alpha), \tag{1}$$

o lo que es lo mismo (véase la pág. 428)

$$x = a \operatorname{sen}(\omega t + \alpha'), \tag{1a}$$

donde a es la amplitud de la vibración, ω es la frecuencia circular y α y α' son las fases iniciales. Estas vibraciones se representan gráficamente por una sinusoide.

Pero las vibraciones reales sólo pueden aproximarse más o menos a las sinusoidales propiamente dichas, puesto que toda vibración real va acompañada de su amortiguamiento (véase el § 102). Además, son muy frecuentes los casos en que las vibraciones tienen, en general, un carácter más complejo. No obstante, el estudio de las vibraciones armónicas tiene mucha importancia, ya que las vibraciones complejas pueden considerarse compuestas de vibraciones armónicas.

Vimos con anterioridad (§ 100) que cuando se componen dos movimientos vibratorios armónicos x_1 y x_2, que tienen una misma dirección

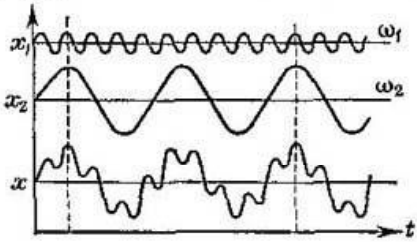


Fig. 258. Composición de dos movimientos vibratorios armónicos cuyas frecuencias son ω_1 y ω_2.

e *igual frecuencia* ω_1, la vibración resultante es también un movimiento vibratorio armónico. Pero esto solamente ocurre cuando se componen vibraciones de una misma frecuencia. Si los dos movimientos armónicos que se componen tienen *frecuencias diferentes*, la oscilación resultante tiene un carácter más complicado. En el renglón superior de la fig. 258 está representado gráficamente un movimiento vibratorio armónico de frecuencia ω_1 y amplitud a_1 determinadas (sobre el eje de ordenadas se toman las elongaciones x_1 y sobre el de abscisas el tiempo). En el rengón intermedio se representa otra vibración armónica x_2 cuya frecuencia ω_2 es 4,5 veces menor que la frecuencia ω_1 del primer movimiento y cuya amplitud $a_2 = 2{,}5\ a_1$. Finalmente, en el renglón de abajo está representada la vibración compuesta de las dos primeras; la elongación x del punto que realiza esta vibración compuesta es igual en cada momento dado a

$$x = x_1 + x_2.$$

Podríamos plantearnos el problema inverso, es decir, dada una vibración compleja considerarla como una suma de armónicas y determinar cuáles son éstas. En el caso de la oscilación compleja representada en el renglón inferior de la fig. 258 podremos descomponerla en las armónicas representadas en los otros dos renglones de la misma figura.

En el § 100 estudiamos el fenómeno conocido con el nombre de pulsación. Este fenómeno consiste en que si dos vibraciones $x_1 = a_1 \cos(\omega_1 t + \alpha)$ y $x_2 = a_1 \cos(\omega_2 t + \alpha)$, cuyas frecuencias ω_1 y ω_2 se diferencian poco entre sí, sumándolas dan una vibración de frecuen-

cia $\omega = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ cuya amplitud a varía según la ley

$$a = \left| 2a_1 \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right|. \qquad (2)$$

Recíprocamente podemos decir, que una vibración compleja cuya amplitud varíe de acuerdo con la ley (2) puede descomponerse en dos movimientos vibratorios armónicos puros cuyas frecuencias serán ω_1 y ω_2.

Análogamente podemos imaginar otra vibración compleja cuya amplitud varíe lentamente (en comparación con el período de las propias vibraciones) según otra ley cualquiera. Este tipo de vibraciones se conoce con el nombre de *vibraciones moduladas*. Estas vibraciones moduladas no son armónicas, pero se pueden descomponer en una serie de movimientos de este tipo. Tomemos como ejemplo la vibración

$$x = a \cos \omega_0 t,$$

cuya amplitud varía de acuerdo con la ley

$$a = a_1 + a_2 \cos \omega t,$$

donde a_1 y a_2 son constantes, con la particularidad de que $a_2 < a_1$ y $\omega \ll \omega_0$. Esta ley significa que la amplitud a varía con el tiempo entre los valores $a_1 + a_2$ y $a_1 - a_2$. Poniendo el valor dado de a en la expresión de x, obtenemos:

$$x = (a_1 + a_2 \cos \omega_0 t) \cdot \cos \omega_0 t = a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \cos \omega t \cdot \cos \omega_0 t$$

ó

$$x = a_1 \cos \omega_0 t + \frac{a_2}{2} \cos (\omega_0 + \omega) t + \frac{a_2}{2} \cos (\omega_0 - \omega) t, \qquad (3)$$

es decir, que la vibración modulada que estudiamos puede descomponerse en una suma de tres armónicas cuyas frecuencias serán ω_0, $\omega_0 + \omega$ y $\omega_0 - \omega$ y a las cuales corresponderán respectivamente las amplitudes a_1, $a_2/2$ y $a_2/2$.

El resultado de la composición de dos vibraciones armónicas depende de sus frecuencias, amplitudes y fases iniciales. Según cuales sean los valores de las frecuencias, fases y amplitudes, las vibraciones compuestas que se obtengan pueden ser muy diversas. Aún es más complejo el carácter de las vibraciones que se obtienen al componer tres o más armónicas. Y, recíprocamente, una vibración de carácter muy complejo puede descomponerse en un número determinado de vibraciones armónicas de diferentes amplitudes y frecuencias.

En la teoría de las series trigonométricas se demuestra, que toda función periódica de período 2π

$$x = F(\omega t)$$

puede representarse en forma de serie trigonométrica ilimitada

$$\left.\begin{aligned} x = A_0 + A_1 \cos \omega t + A_2 \cos 2\omega t + A_3 \cos 3\omega t + \ldots + \\ + B_1 \operatorname{sen} \omega t + B_2 \operatorname{sen} 2\omega t + B_3 \operatorname{sen} 3\omega t + \ldots \end{aligned}\right\}. \qquad (4)$$

Esta serie se llama *serie de Fourier**); los coeficientes A_0, A_1, A_2, A_3 ... y B_1, B_2, B_3 ... para este tipo de $F(\omega t)$ se calculan por medio de fórmulas determinadas.

Si *la función es par*, es decir, si conserva su valor cuando se cambia el signo del argumento por el contrario

$$F(-\omega t) = F(\omega t),$$

todos los coeficientes B_1, B_2, B_3, ... son iguales a cero y, por lo tanto, el desarrollo en serie toma la forma siguiente:

$$x = A_0 + A_1 \cos \omega t + A_2 \cos 2\omega t + A_3 \cos 3\ \omega t + \ldots \qquad (5)$$

Si *la función es impar*, es decir, si dicha función cambia de signo al cambiar el signo del argumento

$$F(-\omega t) = -F(\omega t),$$

todos los coeficientes A_0, A_1, A_2, A_3, ... son iguales a cero y el desarrollo en serie toma la forma:

$$x = B_1 \operatorname{sen} \omega t + B_2 \operatorname{sen} 2\omega t + B_3 \operatorname{sen} 3\omega t + \ldots \qquad (6)$$

Como vemos, hablando en términos generales, cualquier vibración periódica puede representarse matemáticamente como una suma de armónicas, cuyas frecuencias son múltiplos de ω, 2ω, 3ω, etc.

En la parte baja de la fig. 259 está representada una vibración parecida a una línea quebrada; más arriba se ven las cuatro sinusoides en que puede descomponerse. Analíticamente, esta descomposición tiene la forma:

$$x = 10a \operatorname{sen} \omega t - 1{,}5a \operatorname{sen} 3\ \omega t + 0{,}6a \operatorname{sen} 5\omega t - 0{,}3a \operatorname{sen} 7\omega t. \qquad (7)$$

En este desarrollo $B_1 = 10a$, $B_3 = -1{,}5a$, $B_5 = 0{,}6a$ y $B_7 = -0{,}3a$; todos los demás coeficientes B_i son iguales a cero.

---

*) De una forma más general se demuestra, que cualquier función $y = F(x)$, que satisfaga las llamadas condiciones de Dirichlet y que venga dada en un intervalo comprendido entre $-l$ y $+l$, puede representarse en forma de serie:

$$\left.\begin{aligned} y = A_0 + A_1 \cos \frac{\pi x}{l} + A_2 \cos \frac{2\pi x}{l} + A_3 \cos \frac{3\pi x}{l} + \ldots + \\ + B_1 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} + B_2 \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{l} + B_3 \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{l} + \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (4a)$$

El resultado del desarrollo de una oscilación compleja en serie de Fourier puede representarse escribiendo todas aquellas frecuencias cuyas amplitudes son diferentes de cero y los valores de las amplitudes correspondientes. Es preferible hacer esta anotación gráficamente, tomando sobre el eje de abscisas la escala de las frecuencias

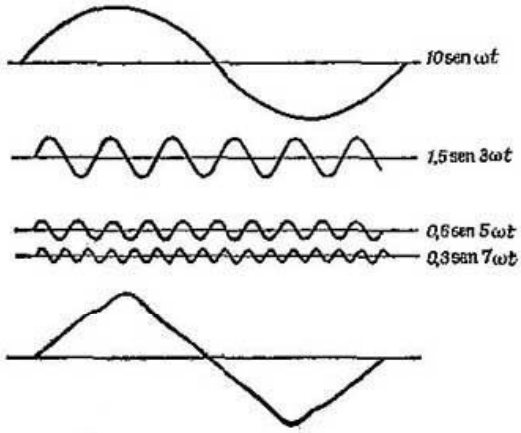


Fig. 259. Descomposición de un movimiento vibratorio complejo en una serie de movimientos vibratorios armónicos.

y trazando en los sitios correspondientes de este eje líneas verticales cuya longitud, en escala determinada, represente su amplitud. Este diagrama suele llamarse *espectro* de la oscilación. En la fig. 260

Fig. 260. Espectro de la vibración compleja representada en la fig. 258.

se muestra el espectro de la vibración compleja del renglón inferior de la fig. 258. Como quiera que esta vibración puede descomponerse en dos sinusoides cuyas frecuencias son ω_1 y $\omega_2 = \frac{\omega_1}{4,5}$ y cuyas amplitudes son a_1 y $a_2 = 2,5\ a_1$, su espectro se representa por dos líneas verticales, a las que corresponden respectivamente las abscisas ω_1 y $\frac{\omega_1}{4,5}$, de las cuales la segunda tiene una longitud 2,5 veces mayor que la primera.

En la fig. 261 se muestra el espectro de la vibración compleja representada en la fig. 259. De acuerdo con la descomposición (7),

este espectro consta de cuatro líneas cuyas frecuencias son ω, 3ω, 5ω y 7ω; las longitudes respectivas de estas líneas, en una escala determinada, son iguales a 10; 1,5; 0,6 y 0,3 unidades de longitud.

La representación de las vibraciones complejas por medio de este tipo de espectros no es completa, puesto que solamente da las frecuencias y las amplitudes de las vibraciones armónicas componentes,

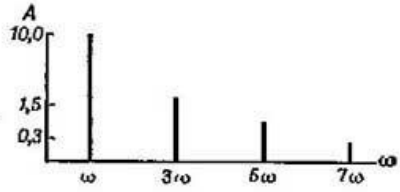


Fig. 261. Espectro de la vibración compleja representada en la fig. 259.

omitiendo sus fases iniciales; no obstante, son muchos los casos en que es suficiente conocer la frecuencia y la amplitud.

Hasta ahora hemos estudiado la descomposición en armónicas de oscilaciones complejas, que tienen caracter periódico. Pero el movimiento vibratorio puede tener carácter aperiódico. Como ejemplo podemos citar la vibración amortiguada representada en la fig. 254. La amplitud de esta vibración se amortigua continuamente de tal manera, que cualquier estado determinado del movimiento puede producirse una vez y no repetirse más. Este movimiento no es periódico ni puede desarrollarse en serie de Fourier con una serie discontinua de frecuencias ω, 2ω, 3ω, . . . No obstante, puede descomponerse en una multitud infinita de movimientos vibratorios armónicos, con la particularidad de que las frecuencias de las vibraciones «contiguas» se diferenciarán entre sí infinitamente poco y las amplitudes ΔA_i de las distintas vibraciones elementales serán también infinitamente pequeñas*).

A este tipo de vibraciones no corresponde ya gráficamente un espectro formado por líneas aisladas («espectro de rayas»), sino un espectro continuo, lo que denota la existencia de vibraciones con «todas» las frecuencias. Para representar gráficamente un espectro continuo volvamos a tomar como abscisas las frecuencias ω y como ordenadas la razón $\Delta A_i/\Delta\omega_i$. La curva así construida nos dará el diagrama de «distribución de las amplitudes» por frecuencias en el espectro continuo de la vibración compuesta de que se trata. En la fig. 262, *a* se vuelve a representar la vibración amortiguada y en la 262, *b* la «distribución de las amplitudes» por frecuencias en el espectro continuo de esta misma vibración. Las ordenadas de este diagrama multiplicadas por el intervalo de frecuencias correspondiente $\Delta\omega_i$, dan la amplitud media de las vibraciones en dicho intervalo. Como puede verse en la fig. 262, *b*, la curva tiene un máximo, que es tanto más agudo cuanto más débil es el amortiguamiento.

Para otros movimientos no periódicos se obtienen espectros continuos con distinta distribución de amplitudes por frecuencias.

---

*) Matemáticamente esto corresponde a la representación de la función en forma de la integral de Fourier:

$$F(\omega t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} F(\theta) \cos \alpha (\theta - \omega t)\, d\theta.$$

Veamos ahora qué significado físico tiene la descomposición de un movimiento inarmónico en sus componentes armónicas, es decir, de qué forma pueden descubrirse en la práctica estas componentes (armónicas). Supongamos que un proceso determinado depende del tiempo y esta dependencia se expresa por una función $f(t)$, que puede

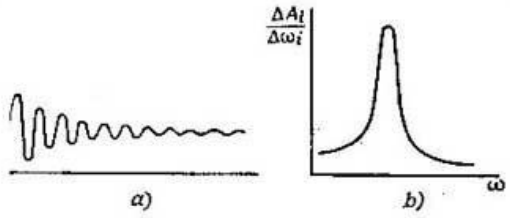


Fig. 262. Vibración amortiguada (*a*) y distribución de las amplitudes en su espectro (*b*).

desarrollarse en serie de Fourier. Admitamos, por ejemplo, que este desarrollo puede representarse de la forma:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \operatorname{sen} n\omega t). \qquad (8)$$

Ambos miembros de esta ecuación son matemáticamente idénticos, es decir, que el conjunto de las armónicas no se diferencia de la función $f(t)$.

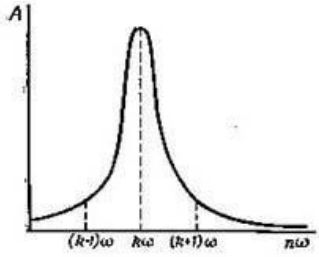


Fig. 263. Amplitudes de las vibraciones forzadas.

Para registrar un término *aislado* de la serie (8) (es decir, una armónica aislada) hay que hacer una experimento en condiciones que permitan descubrirla. Esto se puede conseguir, por ejemplo, de la siguiente manera: supongamos que la función $f(t)$ caracteriza la fuerza excitatriz que actúa sobre un sistema (resonador) capaz de realizar vibraciones forzadas (§ 103). Supongamos también que este resonador tiene una frecuencia propia de oscilación (frecuencia de resonancia) que coincide con la frecuencia $k\omega$ de una de las armónicas de la serie (8). Si la curva de resonancia del resonador es tan aguda

que las frecuencias de las armónicas contiguas $(k \pm 1)\,\omega$ se encuentran en un campo de amplitudes muy pequeñas de las vibraciones forzadas (fig. 263), el resonador sólo realizará prácticamente vibraciones de frecuencia $k\omega$, con una amplitud proporcional a la de la armónica $k\omega$ correspondiente de la serie (8). Variando la frecuencia de resonancia del resonador (es decir, sintonizándolo), se pueden crear sucesivamente las condiciones necesarias para registrar las demás armónicas componentes (8).

Fenómenos de este tipo tienen lugar en los instrumentos que se utilizan para determinar la composición espectral de algunos procesos físicos, como, por ejemplo, las perturbaciones luminosas o sonoras y las oscilaciones eléctricas.

§ 105. Representación de los procesos vibratorios por medio de números complejos. Por la teoría de los números complejos sabemos, que todo número complejo expresado en la forma $\xi = a \cdot e^{i\varphi}$ (donde a y φ son números reales; e, es la base de los logaritmos naturales; $i = \sqrt{-1}$, puede representarse de la forma a (cos φ + i sen φ). Por lo tanto,

$$\xi = a \cdot e^{i\varphi} = a\,(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi), \tag{1}$$

donde la parte real del número complejo ξ, que nosotros designaremos por $|\,\xi\,|$, vendrá expresada de la forma siguiente:

$$|\,\xi\,| = a \cos\varphi. \tag{2}$$

Esta última correlación tiene carácter de identidad, por consiguiente, en lugar de la función trigonométrica $a \cos\varphi$ podemos considerar la parte real del número complejo $\xi = a \cdot e^{i\varphi}$. Esta sustitución es de por sí completamente formal y no nos da nada nuevo. Pero la cuestión está en lo siguiente: si con una serie de números complejos ξ hacemos determinadas operaciones matemáticas (sumas, restas, multiplicaciones, derivaciones, integraciones, etc.) y después separamos la parte real de la imaginaria, obtenemos el mismo resultado que si hiciéramos operaciones análogas con las funciones trigonométricas correspondientes. Esta peculiaridad permite sustituir las operaciones trigonométricas, que exigen un trabajo relativamente grande, por operaciones más simples con funciones exponenciales. Por esta razón, el empleo de funciones con exponentes imaginarios, en lugar de las funciones trigonométricas correspondientes, es muy cómodo para el cálculo.

Como vimos anteriormente, una expresión de la forma

$$x = a \cos(\omega t + \alpha)$$

representa un movimiento vibratorio armónico de amplitud a, frecuencia circular ω y fase inicial α; la magnitud t es el tiempo, contado a partir de un determinado momento inicial.

Basándonos en lo expuesto, está claro que este movimiento armónico también puede representarse como la parte real $|\,\xi\,|$ de un número complejo

$$\xi = \alpha \cdot e^{i(\omega t + \alpha)}.$$

Ya hemos visto que para resolver muchos problemas basta conocer el cuadrado de la amplitud, es decir, la magnitud a^2, puesto que la energía de la vibración es proporcional a a^2; mientras que el valor de la fase inicial α puede no interesar. Es fácil demostrar, que para hallar a^2 no es necesario separar, de hecho, la parte real de la imaginaria en el número complejo de la forma (3), sino que es sufi-

ciente formar la expresión $\xi\xi^*$, donde ξ^* es un número complejo conjugado de ξ. (Recordemos, que recibe el nombre de número complejo conjugado de otro, el que se obtiene de este último mediante el cambio de signo de todas las unidades imaginarias i). Según esto, el número complejo conjugado de ξ, expresado por la fórmula (3), será:

$$\xi^* = ae^{-i(\omega t+\alpha)}. \tag{3a}$$

Formando la expresión $\xi\xi^*$, obtenemos:

$$\xi\xi^* = ae^{i(\omega t+\alpha)} \cdot ae^{-i(\omega t+\alpha)} = a^2, \tag{4}$$

es decir, que $\xi\xi^*$ nos da directamente el cuadrado de la amplitud.

Generalizando la expresión (3) podemos suponer que la magnitud a también es compleja; en este caso no puede expresar directamente la amplitud real de la vibración, puesto que esta amplitud es siempre una magnitud real. No obstante, empecemos por esclarecer qué sentido físico tiene esta «amplitud compleja». Para esto supongamos que $a = a_0 e^{i\alpha_0}$, donde a_0 y α_0 son números reales, entonces

$$\xi = a_0 e^{i\alpha_0} \cdot e^{i(\omega t+\alpha)}$$

o

$$\xi = a_0 e^{i(\omega t+\alpha+\alpha_0)}. \tag{4a}$$

Separando la parte real de la imaginaria, obtenemos:

$$|\xi| = a_0 \cos(\omega t + \alpha + \alpha_0), \tag{5}$$

donde puede verse que $|\xi|$ representa de por sí un movimiento oscilatorio armónico, cuya amplitud es a_0, que tiene una fase inicial $\alpha + \alpha_0$. De esta forma, el valor complejo de la amplitud indica que la fase inicial ha variado en α_0. Es fácil comprobar que, en este caso, $\xi\xi^*$ da también el cuadrado de la amplitud real: $\xi\xi^* = a_0^2$.

Para que quede clara la comodidad que ofrece la utilización de los números complejos para representar los movimientos vibratorios armónicos, resolvamos un problema de composición de dos armónicas. Sean estas dos vibraciones $x_1 = a_1 \cos(\omega t + \alpha_1)$ y $x_2 = a_2 \cos(\omega t + \alpha_2)$ y consideremos que tienen una misma frecuencia ω y que se realizan a lo largo de una misma recta. (Este problema fue resuelto en el § 100 por el procedimiento de la suma de los vectores amplitud). Utilizando los números complejos, obtenemos:

$$x_1 = a_1 e^{i(\omega t+\alpha_1)}, \quad x_2 = a_2 e^{i(\omega t+\alpha_2)}.$$

La vibración resultante será:

$$x = x_1 + x_2 = a_1 e^{i(\omega t+\alpha_1)} + a_2 e^{i(\omega t+\alpha_2)}.$$

El cuadrado de su amplitud a^2 lo obtenemos multiplicando el segundo miembro de esta expresión por su magnitud conjugada:

$$a^2 = [a_1 e^{i(\omega t+\alpha_1)} + a_2 e^{i(\omega t+\alpha_2)}][a_1 e^{-i(\omega t+\alpha_1)} + a_2 e^{-i(\omega t+\alpha_2)}],$$

de donde

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_1 a_2 (e^{i(\alpha_2-\alpha_1)} + e^{-i(\alpha_2-\alpha_1)}),$$

pero por la fórmula (1)

$$e^{i(\alpha_2-\alpha_1)} + e^{-i(\alpha_2-\alpha_1)} = 2\cos(\alpha_2 - \alpha_1),$$

de donde

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1),$$

lo que coincide con la fórmula (4) del § 100.

CAPITULO XII

Ondas

§ 106. Propagación de las ondas en un medio elástico. Sea un punto vibrante que se encuentra en un medio cuyas partículas están enlazadas entre sí. En estas condiciones, la energía de las vibraciones del punto puede transmitirse a los puntos que lo rodean haciendo que vibren. El fenómeno de la propagación de las vibraciones en un medio se llama *onda*. Un ejemplo de formación de ondas lo tenemos cuando lanzamos una piedra sobre la superficie del agua. La región de la superficie del agua que resulta perturbada directamente por la caída de la piedra comienza a vibrar y esta vibración se propaga de esta región a la siguiente, con lo cual obtenemos en dicha superficie una

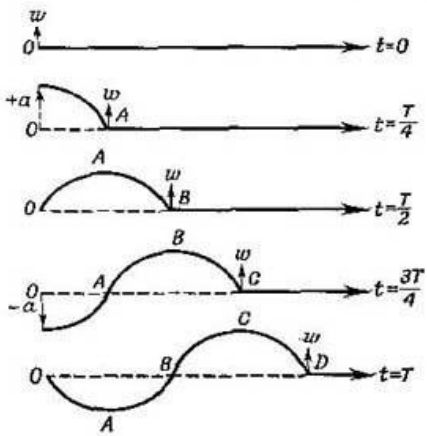


Fig. 264. Esquema de propagación de una onda transversal.

onda. Otro ejemplo de formación de ondas puede conseguirse cogiendo una cuerda por uno de sus extremos y haciendo con la mano movimientos oscilatorios. En este caso las oscilaciones también se propagan a lo largo de la cuerda, es decir, la onda avanza por la cuerda.

Advirtamos desde el primer momento, que al propagarse las oscilaciones las partículas vibrantes no se desplazan a medida que avanza la onda, sino que continúan vibrando en torno a sus posiciones de equilibrio.

Si las partículas vibran siguiendo trayectorias que coinciden con la directa de propagación, la onda se llama *longitudinal*; si la vibración de las partículas es perpendicular a esta dirección, la onda se llama *transversal*.

En la fig. 264 se muestra el esquema de la propagación de una onda transversal. Los cinco renglones de esta figura representan las posiciones de las partículas del medio en los sucesivos momentos. El primer renglón muestra la posición de las partículas en el momento inicial, es decir, cuando $t = 0$; en él todas las partículas ocupan su posición de equilibrio, aunque la partícula O del extremo ha recibido una aceleración w dirigida hacia arriba. El segundo renglón da la posición de las partículas al cabo de un cuarto de período: la partícula O ha alcanzado su máxima elongación hacia arriba, mientras

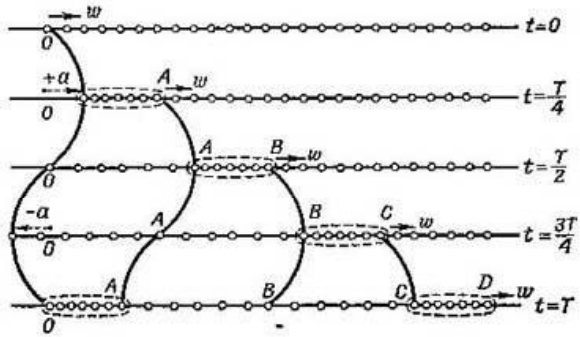


Fig. 265. Esquema de propagación de una onda longitudinal.

que la partícula A solamente ha adquirido una aceleración w dirigida también hacia arriba. El tercer renglón representa las posiciones correspondientes al cabo de medio período: la partícula O atraviesa su posición de equilibrio moviéndose hacia abajo y la partícula A ha alcanzado su separación máxima hacia arriba, mientras que la B acaba de adquirir una aceleración w dirigida hacia arriba. El cuarto renglón nos ofrece la posición de las partículas al transcurrir tres cuartos de período: la partícula O ha alcanzado su desviación máxima inferior, la A atraviesa su posición de equilibrio moviéndose hacia abajo, la B ha alcanzado su elongación máxima hacia arriba y la C adquiere una aceleración w también hacia arriba. Finalmente, en el quinto renglón se dan las posiciones de las partículas al cabo de un período completo: la partícula O atraviesa otra vez su posición de equilibrio, pero moviéndose hacia arriba; la partícula A ha alcanzado su desviación máxima inferior; la B pasa por la posición de equilibrio hacia abajo; la C ha alcanzado su elongación máxima hacia arriba y la D ha adquirido una aceleración w también hacia arriba. De esta misma forma se puede seguir observando la propagación de la onda.

En la fig. 265 se da un esquema semejante de la propagación de una onda longitudinal. La única diferencia consiste en que la desvia-

ción de las partículas ocurre en la misma dirección que tiene la propagación de la onda. Como puede verse en la fig. 265, en la onda longitudinal se observan aproximaciones y separaciones de las partículas entre sí, como consecuencia de lo cual se producen condensaciones (en las regiones agrupadas en la figura) y dilataciones o enrarecimientos; el proceso de propagación de la onda va acompañado de un desplazamiento de las regiones de condensación y dilatación.

El hecho de que las ondas que se propagan en un medio sean longitudinales o transversales depende de las propiedades elásticas de dicho medio.

Si al desplazarse una capa del medio con relación a otra se producen fuerzas elásticas que tienden a hacer volver la capa desplazada a su posición de equilibrio, en este medio pueden propagarse las ondas transversales (este medio, en términos generales, es el que forman los cuerpos sólidos). Si en el medio no se producen fuerzas elásticas al desplazarse unas capas paralelamente con respecto a otras, en este medio no pueden formarse ondas transversales. Por ejemplo, los gases y los líquidos son medios en los cuales las ondas transversales no se propagan (esto no se refiere a la superficie de los líquidos, en la cual pueden propagarse ondas transversales, aunque su carácter es más complicado, puesto que sus partículas se mueven describiendo trayectorias circulares o elípticas cerradas). Cuando en el medio aparecen fuerzas elásticas al producirse deformaciones por compresión o tensión, en este medio se pueden propagar las ondas longitudinales. Por ejemplo, en los líquidos y en los gases sometidos a compresión se produce un aumento de presión, cuya fuerza, como vimos anteriormente, representa el papel de fuerza elástica en las deformaciones por compresión. En los líquidos y en los gases sólo se propagan las ondas longitudinales. En los cuerpos sólidos pueden producirse tanto ondas longitudinales como transversales.

La velocidad de propagación de las ondas longitudinales V, como demuestra la teoría (véase el § 111), es inversamente proporcional a la raíz cuadrada del coeficiente de elasticidad α del medio y de su densidad ρ:

$$V = \sqrt{\frac{1}{\alpha\rho}}.$$

Esta correlación puede sustituirse aproximadamente por la siguiente:

$$V = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

donde E es el módulo de Young del medio.

La velocidad de propagación de las ondas transversales depende del módulo de rigidez N:

$$V = \sqrt{\frac{N}{\rho}}.$$

La distancia a que una fase determinada de la vibración se propaga durante un período se llama *longitud de onda* y se designa con la letra λ.

En la fig. 266 se muestra una serie de puntos saparados entre sí por la distancia λ.

En esta figura se ve claramente que *la longitud de onda es la distancia mínima entre dos puntos que se encuentran en fase iguales.* Por velocidad de propagación de la onda se entiende *su velocidad de fase*, es decir, la velocidad con que se propaga una fase dada de la vibración; por ejemplo: en el momento $t = 0$ el punto O de la

Fig. 266. La distancia que media entre los puntos más próximos que vibran en fases iguales determina la longitud de onda λ.

fig. 264 estaba en su fase inicial, es decir, salía de su posición de equilibrio; al cabo de un tiempo T, el que se encuentra en la fase inicial es el punto D, separado del O por una distancia λ. Por consiguiente, la fase inicial, durante un tiempo igual al período T, se propagó a una distancia igual a la longitud de onda λ. De aquí obtenemos para la velocidad de fase que

$$V = \frac{\lambda}{T}. \qquad (1)$$

Supongamos que el punto que emite las vibraciones (centro de perturbación, centro de vibración o foco) se mueve en un medio continuo. Las vibraciones de este centro se propagan en todas las direcciones. *El lugar geométrico de los puntos a que llega la vibración* en un momento determinado se llama *frente de onda*. En este mismo medio puede distinguirse también *el lugar geométrico de los puntos que vibran en las mismas fases*; el conjunto de estos puntos *forma una superficie de igual fase* (*o de concordancia de fase*) o como suele decirse, *una superficie de onda*. Es evidente, que el frente de onda es un caso particular de la superficie de onda. Si el medio es isótropo, la vibración del centro se propaga por igual en todos los sentidos y, en este caso, el frente de onda y las superficies de concordancia de fase son superficies esféricas, cuyos centros coinciden con el de vibración. Es evidente que el radio del frente de onda representa de por sí un segmento cuya longitud es igual a la distancia a que se propagan las vibraciones de la fase dada durante un tiempo t, transcurrido desde el momento en que empezó a vibrar el punto situado en el centro, de donde

$$r = Vt,$$

donde V es la velocidad de propagación de las ondas.

La forma del frente de onda determina el tipo de ésta, por ejemplo, se llama onda plana aquella cuyo frente es plano.

Las direcciones en que se propaga la vibración se llaman *rayos*. Cuando el medio es isótropo, los rayos son normales al frente de onda; si el frente de onda es esférico, los rayos siguen la dirección de los radios.

§ 107. Principio de Huygens. Para la solución de muchos problemas tiene gran importancia disponer de un método que permita construir el frente de onda correspondiente a un momento determinado, conociendo dicho frente en un momento anterior. Este método fue expuesto por Huygens en 1690 y lleva el nombre de *principio de Huygens*.

Huygens expuso su principio sin demostrarlo rigurosamente. Se limitó a comparar los resultados de la construcción geométrica con

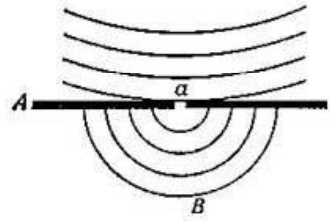


Fig. 267. Un orificio pequeño de un obstáculo se convierte en una nueva fuente de ondas.

los empíricos. Fue mucho después cuando, basándose en la teoría general de la elasticidad, pudo demostrarse el principio de Huygens. Para formarnos una idea clara de este método hagamos el siguiente experimento: figurémonos que sobre la superficie del agua se propaga una onda de forma arbitraria. Interpongamos en el camino que sigue esta onda un obstáculo A que tenga un orificio a, cuyas dimensiones sean pequeñas en comparación con la longitud de onda λ (fig. 267). La onda, al llegar hasta el obstáculo A, se refleja, pero el orificio a se transforma en origen de nuevas vibraciones que se propagan por el lado opuesto del obstáculo. Cualquiera que sea la forma de la onda primitiva, las que parten del orificio serán siempre ondas semicirculares B. El orificio será una especie de nuevo centro de vibraciones, a partir del cual las ondas se propagan hacia adelante en todas direcciones. Este experimento hace pensar, que cada punto del medio, al cual llega el frente de onda, puede considerarse como un nuevo origen de vibraciones. De aquí se deduce la esencia del principio de Huygens. Supongamos que en un momento cualquiera conocemos el frente de la onda AB (fig. 268) que llega en las direcciones indicadas por las flechas. Para construir el nuevo frente, que corresponda a un momento separado del primero por un tiempo t, hay que tomar cada uno de los puntos del frente primitivo como centro independiente de las oscilaciones que se propagan. Sobre cada uno

de estos puntos construimos una superficie de onda elemental, la cual será una superficie hemisférica de radio $r = Vt$. La envolvente A_1B_1 de todas estas superficies de onda elementales nos dará el nuevo frente de onda.

Apliquemos el método de Huygens a la construcción de superficies de onda de casos particulares. Supongamos que en un momento cualquiera una onda tiene forma de esfera con radio R (fig. 269) y se propaga a partir de un centro de vibraciones; en torno a cada punto del frente de onda tracemos una superficie elemental hemisférica. La envolvente de todas estas superficies de onda elementales tendrá la forma de una superficie esférica cuyo radio será $R_1 = R + Vt$. Los rayos, como ya dijimos, partirán del centro y tendrán las direcciones de los radios de la esfera. Es decir, el frente de una onda esférica que se propaga es una esfera cuyo radio aumenta constantemente; cuando los radios son muy grandes, los sectores del frente de onda pueden considerarse planos. En la fig. 270 se muestra un sector

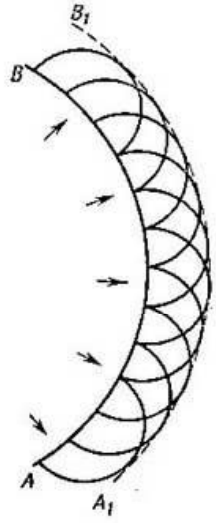


Fig. 268. Construcción del nuevo frente de onda por el procedimiento de Huygens.

de frente de onda plano AB. Tomando todos los puntos de este frente como centros de vibración independientes y trazando en torno a ellos hemisferios elementales, obtendremos una superficie envolvente que

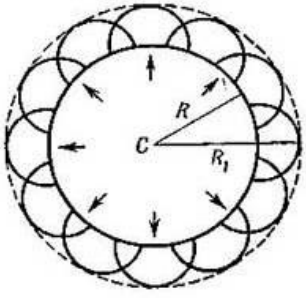


Fig. 269. Construcción del frente de una onda esférica, que se propaga a partir de un punto C, por el procedimiento de Huygens.

tendrá la forma de plano paralelo al AB. Los rayos, es decir, las direcciones en que se propagan las vibraciones, serán rectas perpendiculares al plano de frente. De aquí sacamos la conclusión de que una onda plana, al propagarse en un medio isótropo, sigue siendo plana y sus rayos forman un haz de rectas paralelas. En un medio

homogéneo isótropo el frente de onda, al avanzar, sigue siendo geométricamente semejante a sí mismo.

Veamos ahora lo que ocurre con una onda plana si en el camino de su propagación encuentra un obstáculo A con un orificio a, cuyas dimensiones son mayores que la longitud de onda λ (fig. 271). El frente plano BB', al llegar al obstáculo A, se refleja en él, pero los puntos correspondientes al orificio a se convierten en centros de vibración independientes. En torno a cada uno de estos puntos se forma una superficie de onda hemisférica elemental; la envolvente de estas superficies de onda nos da el frente de onda por la otra parte del orificio. En la fig. 271 puede verse que este frente, formado al otro lado del orificio, deja de ser plano y únicamente su parte central es paralela al frente primitivo; en sus extremos el frente se curva y los rayos cambian de dirección. Para calcular totalmente esta desviación de los rayos, que se conoce con el nombre de *difracción*, hay que componer las oscilaciones que llegan de los diferentes puntos del orificio, teniendo en cuenta sus fases. Más adelante examinaremos

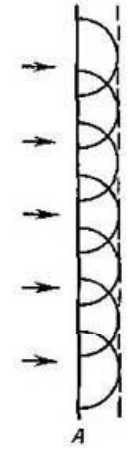


Fig. 270. Construcción del frente de una onda plana por el procedimiento de Huygens.

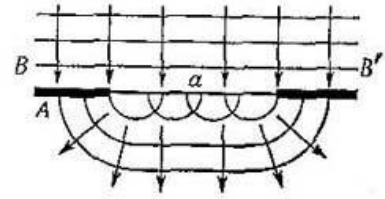


Fig. 271. Desviación de la onda al pasar por el orificio de un obstáculo (difracción de la onda).

con mayor detenimiento el fenómeno de la difracción. Pero por ahora dejemos sentado, que cuanto menor es el orificio, tanto mayor es la desviación de los rayos. Cuando las dimensiones de este orificio son menores que la longitud de onda, el hueco del orificio hace de centro único de vibración y genera una onda hemisférica, como tuvo lugar en el experimento que sirvió de base al principio de Huygens (fig. 267).

§ 108. Ecuación de la onda. Veamos de qué forma se puede caracterizar analíticamente el proceso ondulatorio.

Comencemos por imaginarnos unas ondas que avanzan a lo largo de una recta cualquiera, por ejemplo, a lo largo de una cuerda, uno de cuyos extremos se mantiene en estado de vibración. Llamemos x

a la elongación de los puntos. El proceso ondulatorio podrá considerarse conocido si sabemos en cada momento el valor de x para cada uno de los puntos de la recta, a lo largo de la cual se propaga la onda. En otras palabras, hay que conocer la elongación del punto x como función del tiempo y de las coordenadas de las posiciones de equilibrio de los puntos.

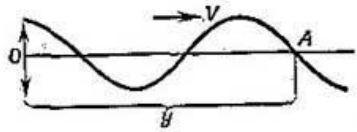


Fig. 272. Ilustración para deducir la ecuación de la onda.

Tomemos como origen de coordenadas el punto O de la recta (fig. 272), que hace de centro de vibración. Supongamos que las vibraciones de este punto O se realizan según la ley

$$x = a \cos \omega t, \tag{1}$$

donde a es la amplitud de las oscilaciones, ω es la frecuencia circular y t es el tiempo, contado desde el momento inicial de la vibración.

Tomemos sobre la recta un punto cualquiera A que se encuentre a una distancia y del origen de coordenadas. Las vibraciones, al propagarse a partir de O, llegarán al punto A al cabo de un tiempo

$$\tau = \frac{y}{V}, \tag{2}$$

siendo V la velocidad de propagación de la onda. De esta forma, el punto A comenzará a vibrar cuando el O lleve vibrando un tiempo τ. Considerando que las ondas que se propagan a lo largo de la recta no se amortiguan, obtenemos, que el punto A, cuando la onda llega hasta él, comienza a oscilar con una amplitud a y con una frecuencia circular ω, es decir, su elongación x vendrá expresada por

$$x = a \cos \omega t' \tag{3}$$

donde t' *es el tiempo, contado desde el momento en que el punto A comienza a vibrar*. Pero como el punto A, como ya hemos dicho, comienza a vibrar cuando el O *lleva vibrando* un tiempo τ, resulta que $t' = t - \tau$; poniendo este valor de t' en (3), obtenemos que

$$x = a \cdot \cos \omega (t - \tau),$$

o, poniendo en lugar de τ su valor según (2)

$$x = a \cdot \cos \omega \left(t - \frac{y}{V}\right). \tag{4}$$

Esta expresión da el valor de la elongación x como función del tiempo t y de la distancia y del punto A al centro de vibración O;

ésta es pues la ecuación que buscábamos de la onda que se propaga a lo largo de la recta OA.

La ecuación (4) es la ecuación de *la onda plana* que se propaga en la dirección y. Efectivamente, en este caso cualquier plano AB (fig. 273) perpendicular a la dirección y representa una superficie de fases iguales y, por consiguiente, todos sus puntos, en un mismo momento t, tienen la misma elongación x. Esta elongación depende exclusivamente de la distancia y que hay desde el plano hasta el origen de coordenadas O.

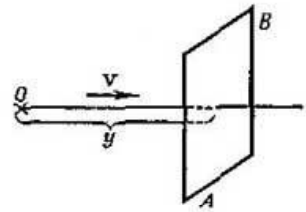


Fig. 273. Superficie de fases iguales de una onda plana.

Si suponemos una onda plana que se propague en sentido contrario al que seguimos al medir la distancia y, en la expresión (4) tendremos que sustituir y por $-y$, con lo cual la ecuación de esta onda tomará la forma:

$$x = a \cos \omega \left(t + \frac{y}{V}\right). \tag{4a}$$

La expresión (4) puede transformarse aplicando la correlación (1) del § 106, según la cual $\frac{\omega}{V} = \frac{2\pi}{VT} = \frac{2\pi}{\lambda}$, donde λ es la longitud de la onda que se propaga; en este caso

$$x = a \cos \left(\omega t - 2\pi \frac{y}{\lambda}\right),$$

o si en lugar de la frecuencia circular ω introducimos la frecuencia ordinaria $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$, tendremos que

$$x = a \cos 2\pi \left(\nu t - \frac{y}{\lambda}\right). \tag{5}$$

Analicemos en el ejemplo de la onda que se propaga a lo largo de la recta (fig. 272) las consecuencias que pueden sacarse de la ecuación (4). El proceso ondulatorio es un proceso doblemente periódico: el argumento del coseno en la fórmula (4) depende de dos variables, es decir, del tiempo t y de la coordenada y. Por lo tanto, la onda tiene doble periodicidad, en el espacio y en el tiempo. Para un momento dado t, la ecuación (4) da la distribución de las elongaciones x de las partículas en función de sus distancias y al origen de coordenadas; las partículas que vibran influidas por la onda que avanza, en un momen-

to dado t se encuentran formando una cosinusoide. Una partícula dada, que se caracterice por un valor determinado de y, realiza con el tiempo un movimiento vibratorio armónico:

$$x = a\cos\omega\left(t - \frac{y}{V}\right) = a\cos(\omega t - \alpha), \text{ donde } \alpha = \frac{\omega y}{V} = 2\pi\frac{y}{\lambda}. \quad (6)$$

La magnitud α es constante para un punto dado y representa la *fase inicial* de la vibración de dicho punto.

Dos puntos que se caractericen respectivamente por las distancias y_1 e y_2 al origen de coordenadas, tendrán una diferencia de fase:

$$\alpha_2 - \alpha_1 = 2\pi\frac{y_2 - y_1}{\lambda}. \text{ *)} \quad (7)$$

De aquí se deduce, que dos puntos alejados entre sí por una distancia igual a la longitud de onda λ, es decir, dos puntos para los cuales $y_2 - y_1 = \lambda$, tendrán una diferencia de fase $\alpha_2 - \alpha_1 = 2\pi$; en todo momento dado t, las elongaciones x de estos puntos serán iguales en magnitud y sentido; los puntos de este tipo se dice que vibran *en concordancia de fase o sincrónicamente*.

Para los puntos que se encuentran entre sí a una distancia $y_2 - y_1 = \frac{\lambda}{2}$, es decir, de una semilongitud de onda, la diferencia de fase $\alpha_2 - \alpha_1 = \pi$; estos puntos vibran, como suele decirse, *en fases opuestas*, es decir, en todo momento sus elongaciones son iguales entre sí en valor absoluto, pero tienen signos contrarios: si uno de los puntos se desvía hacia arriba, el otro lo hace hacia abajo, y viceversa.

Las ondas que acabamos de estudiar, que se propagan a lo largo de una recta, son un caso particular de ondas. En los medios elásticos pueden producirse ondas de otro tipo, como, por ejemplo, ondas esféricas.

Las ondas esféricas tienen una amplitud inversamente proporcional a la distancia r del centro de vibración. La elongación en función de las coordenadas y del tiempo puede expresarse como:

$$x = \frac{a}{r}\cos\omega\left(t - \frac{r}{V}\right). \quad (8)$$

La superficie de fases iguales (superficie de onda) en un momento dado se determina por la ecuación $r = \text{const}$, es decir, es una esfera de radio r. Por esta razón, las ondas de este tipo se llaman «esféricas».

§ 109. Interferencia de ondas. En un medio pueden propagarse al mismo tiempo vibraciones procedentes de distintos centros de vibración.

Si dos trenes de ondas distintos, procedentes de centros diferentes, concurren simultáneamente en una región cualquiera y después

*) La diferencia de distancias $y_2 - y_1$ suele llamarse diferencia de marcha. (*N. del T.*)

vuelven a separarse, cada uno de ellos continúa propagándose lo mismo que si no hubiera encontrado en su camino al otro. Este fenómeno de la propagación independiente de las ondas se conoce con el nombre de *principio de la superposición*; este principio es muy característico en la propagación de los movimientos ondulatorios.

El principio de la superposición es fácil de comprobar lanzando dos piedras al agua. Después de que las ondas circulares (que se producen alrededor de los lugares en que cayeron las piedras) se atraviesan mutuamente y vuelven a separarse, aparecen de nuevo como

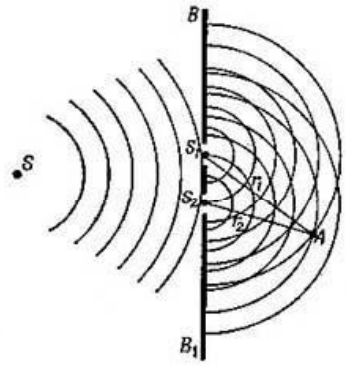


Fig. 274. Superposición de las ondas procedentes de los orificios s_1 y s_2.

círculos regulares, cuyos centros se encuentran en los puntos de caída de las piedras. Este hecho fue señalado por Leonardo de Vinci, el cual escribió sobre esto: «Lanza al mismo tiempo dos piedras a una superficie amplia y tranquila de agua, de forma que caigan a cierta distancia una de otra. Verás cómo alrededor de los sitios en que cayeron las piedras se forman dos grupos de ondas circulares; estas ondas, al avanzar, se encuentran y los círculos de cada grupo pasan a través de los del otro».

En la región en que concurren las ondas sus vibraciones se superponen unas a otras y se produce una composición (*interferencia*) de ondas. Como resultado de esta composición, en unos sitios se producen vibraciones más fuertes, mientras que en otros son más débiles. En cada punto del medio la vibración resultante será igual a la suma de las vibraciones que llegan a dicho punto.

Ofrece especial interés el caso en que los focos oscilan con la misma frecuencia, en la misma dirección y están en la misma fase o con diferencia de fase constante. Estos focos se llaman *coherentes*. Como veremos más adelante, en este caso la vibración resultante tiene en cada punto del medio una amplitud constante en el tiempo, que depende de las distancias que hay desde dicho punto hasta los focos de vibraciones. Este género de composición se llama *interferencia de focos coherentes*.

Los focos de vibraciones coherentes se pueden conseguir, por ejemplo, de la forma siguiente: tomamos un foco puntual S (fig. 274) del que se propaga una onda esférica. En el camino que sigue esta onda interponemos un obstáculo BB_1 con dos orificios puntuales s_1 y s_2, situados simétricamente con relación al foco S. Los orificios s_1 y s_2, de acuerdo con el principio de Huygens, se convierten en focos independientes de vibraciones, con la particularidad de que oscilarán con la misma amplitud y en la misma fase, puesto que distan lo mismo del foco S. Por la parte derecha del obstáculo BB_1 se propagarán dos ondas hemisféricas y en cada uno de los puntos del medio se producirán vibraciones que serán el resultado de la composición de estas dos ondas. Examinemos este resultado en un punto cualquiera A, que se encuentre respectivamente a las distancias r_1 y r_2 de los focos s_1 y s_2. Las vibraciones llegan al punto A con cierta diferencia de fase, que depende de la diferencia de distancias (de marcha) r_2 y r_1.

Las vibraciones de los focos s_1 y s_2 tienen la misma fase y pueden representarse de la forma:

$$x_1 = a_0 \cos \omega t, \quad x_2 = a_0 \cos \omega t.$$

Por lo tanto, las vibraciones que llegan al punto A procedentes respectivamente de los focos s_1 y s_2, según la fórmula (8) del § 108, se expresarán:

$$x_1 = a_1 \cos 2\pi \left(\nu t - \frac{r_1}{\lambda}\right), \quad x_2 = a_2 \cos 2\pi \left(\nu t - \frac{r_2}{\lambda}\right),$$

donde $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ es la frecuencia de las vibraciones. De acuerdo con (8) del § 108, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{r_2}{r_1}$. Pero si $|r_2 - r_1| \ll r_1$, podemos considerar que, aproximadamente, $a_1 \approx a_2$.

La diferencia de fases de las vibraciones que se componen en el punto A será

$$\Delta\alpha = 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda}. \qquad (1)$$

En el § 100 vimos, que la amplitud de la vibración resultante depende de la diferencia de fases de las componentes, con la particularidad de que si la diferencia de fases es igual a cero o múltiplo de 2π, la amplitud tiene un valor máximo, igual a la suma de las amplitudes de las vibraciones componentes. Si la diferencia de fases es igual a un número impar de π, la amplitud tiene un valor mínimo, igual a la diferencia de las amplitudes componentes. Por consiguiente, el hecho de que en el punto A se obtenga un máximo o un mínimo de la vibración depende de la diferencia de fase $\Delta\alpha$ con que llegan a él ambas vibraciones. La condición para que se produzca una amplitud máxima en el punto A, según lo expuesto, podrá expresar-

se así:

$$\Delta\alpha = 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} = \pm 2k\pi, \qquad (2)$$

donde $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$, de donde el máximo de las vibraciones tendrá lugar cuando

$$| r_2 - r_1 | = k\lambda, \qquad (2a)$$

es decir, *la amplitud máxima se obtiene en los puntos en que la diferencia de marcha de los rayos es igual a cero o a un número entero de longitudes de onda.*

La condición de amplitud mínima en el punto A se reduce a que

$$\Delta\alpha = 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} = \pm (2k+1)\pi, \qquad (3)$$

donde otra vez $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$, de donde la diferencia de marcha de los rayos deberá ser igual a

$$| r_2 - r_1 | = (2k+1)\frac{\lambda}{2}, \qquad (3a)$$

es decir, *la amplitud mínima se obtiene en los puntos en que la diferencia de marcha de los rayos es igual a un número impar de semilongitudes de onda.*

Cuando la diferencia de fase tiene valores intermedios entre $\pm 2k\pi$ y $\pm(2k+1)\pi$, donde k es un número entero, se produce un efecto medio de reforzamiento o de atenuación de la vibración.

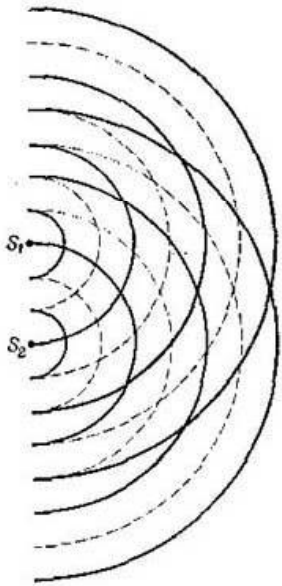


Fig. 275. Interferencia de ondas.

De esta forma, como resultado de la superposición de dos ondas en el medio se producen vibraciones cuya amplitud es diferente en los distintos puntos del medio, pudiendo producirse en cada uno de estos puntos una amplitud máxima o mínima, o de valor intermedio, según el valor que tenga la diferencia de distancias del punto a los focos coherentes (diferencia de marcha).

En la fig. 275 se muestran dos trenes de ondas interferentes; las elevaciones o crestas de las ondas se representan por líneas de trazo continuo y las depresiones por líneas de trazo punteado.

En los puntos de intersección de dos crestas o de dos depresiones se encuentran los máximos de la vibración, mientras que en los sitios en que se cortan una cresta y una depresión se producen mínimos.

La formación de este género de máximos y mínimos por interferencia se puede observar sin dificultad cuando se propagan dos trenes de ondas por la superficie del agua.

§ 110. Ondas estacionarias. Un ejemplo particular del resultado de la interferencia de dos ondas es el de las denominadas *ondas estacionarias*, las cuales se producen por la superposición de dos ondas planas, de la misma amplitud, que se propagan en sentidos contrarios.

Supongamos que dos ondas de igual amplitud se propagan, una en la dirección positiva del eje y y la otra en la negativa. En la fig. 276

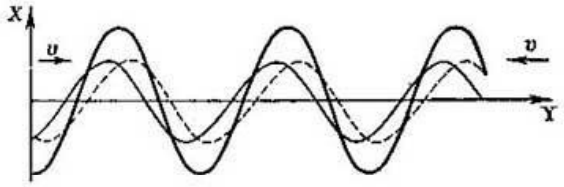


Fig. 276. Composición de dos ondas que se propagan en sentidos opuestos.

una de las ondas se representa con línea continua de trazo fino y la otra con línea punteada; la onda resultante se representa con una línea de trazo grueso. Si el origen de coordenadas se toma en un punto en el cual las ondas que se propagan en sentido contrario tienen igual fase y contamos el tiempo de forma que las fases iniciales resulten iguales a cero, las ecuaciones de las ondas planas podrán escribirse de la forma siguiente: la de la onda que avanza en el sentido positivo del eje y será

$$x_1 = a \cos 2\pi \left(\nu t - \frac{y}{\lambda}\right),$$

y la de la onda que se propaga en el sentido negativo,

$$x_2 = a \cos 2\pi \left(\nu t + \frac{y}{\lambda}\right).$$

La composición de estas dos ondas da:

$$x = x_1 + x_2 = a \cos 2\pi \left(\nu t - \frac{y}{\lambda}\right) + a \cos 2\pi \left(\nu t + \frac{y}{\lambda}\right),$$

o abriendo los paréntesis que contienen los valores de los argumentos de los cosenos y simplificando,

$$x = 2a \cos \left(2\pi \frac{y}{\lambda}\right) \cdot \cos 2\pi\nu t. \qquad (1)$$

El factor $2\pi\nu t$ indica, que en todos los puntos del medio se producen vibraciones, cuya frecuencia ν es igual que la de las vibraciones de las ondas de sentidos opuestos que se superponen.

El factor $2a \cos\left(2\pi \frac{y}{\lambda}\right)$, que no depende del tiempo, expresa la amplitud A de la vibración resultante, o mejor dicho, la amplitud, como magnitud esencialmente positiva, será igual al valor absoluto de este factor, es decir,

$$A = \left| 2a \cos\left(2\pi \frac{y}{\lambda}\right) \right|. \qquad (2)$$

Por consiguiente, la amplitud de las vibraciones depende de las coordenadas y, que determinan la posición de los puntos del medio. Las vibraciones que se producen en estas condiciones se llaman *ondas estacionarias*. En unos puntos determinados la amplitud de la onda estacionaria es igual a la suma de las amplitudes de las dos componentes; estos puntos se llaman *vientres*; en otros puntos la amplitud resultante es igual a cero; estos puntos se llaman *nodos* de la onda estacionaria.

Determinemos las coordenadas de los puntos correspondientes a los vientres y nodos. La amplitud determinada por la igualdad (2) es máxima en aquellos puntos para los cuales

$$\left|\cos\left(2\pi \frac{y}{\lambda}\right)\right| = 1.$$

En estos puntos, según (2),

$$A = 2a.$$

De aquí se deduce que la posición de los vientres vendrá determinada por la condición

$$2\pi \frac{y}{\lambda} = \pm k\pi,$$

donde $k = 0, 1, 2, \ldots$ Por consiguiente, las coordenadas de los vientres serán

$$y = \pm k \frac{\lambda}{2}, \qquad (3)$$

donde $k = 0, 1, 2, \ldots$

La distancia entre dos vientres contiguos se obtiene hallando la diferencia que hay entre dos valores de y, determinados por la fórmula (3) y correspondientes a dos valores consecutivos de k, de donde

$$y_{k+1} - y_k = \frac{\lambda}{2},$$

es decir, la distancia entre dos vientres contiguos es igual a la semilongitud de las ondas cuya interferencia da lugar a la onda estacionaria. Evidentemente, en los sitios que corresponden a los vientres las vibraciones de las ondas se realizan siempre en una fase.

En los nodos la amplitud de la vibración resultante es igual a cero, de donde, por la fórmula (2), la condición para que se produzcan los nodos será:

$$\cos\left(2\pi\frac{y}{\lambda}\right)=0 \quad \text{ó} \quad 2\pi\frac{y}{\lambda}=\pm(2k+1)\frac{\pi}{2}.$$

Por consiguiente, las coordenadas de los nodos serán:

$$y=\pm(2k+1)\frac{\lambda}{4}, \tag{4}$$

lo que quiere decir, que la distancia de un nodo al vientre más próximo será:

$$(2k+1)\frac{\pi}{4}-k\frac{\lambda}{2}=\frac{\lambda}{4},$$

es decir, los nodos y los vientres se encuentran separados entre sí por un cuarto de longitud de onda. Los nodos se forman en aquellos sitios en que las vibraciones de las dos ondas se realizan siempre en fases opuestas.

Tiene importancia advertir, que a pesar de que según la fórmula (1) la vibración resultante se realiza en todos los puntos en una fase independiente, al parecer, de la posición de éstos (puesto que el factor $\cos 2\pi\nu t$ no depende de y), en realidad, cuando la fase de la vibración pasa por un nodo, se invierte. Esto se explica porque el factor $\cos\left(2\pi\frac{y}{\lambda}\right)$, que determina la amplitud, cuando pasa por cero, es decir, en el nodo, *cambia de signo*; como resultado de esto, si en un momento determinado por un lado del nodo la elongación x es positiva, por el otro lado será negativa.

Puesto que en un momento dado el factor $\cos 2\pi\nu t$ tiene para todos los puntos igual valor, todos los puntos que *se encuentran entre dos vientres* vibran en la misma fase, es decir, que alcanzan al mismo tiempo sus elongaciones máximas, pasan al mismo tiempo por la posición de equilibrio, etc. Los puntos que se encuentran a ambos lados de un mismo nodo vibran en fases opuestas, es decir, alcanzan simultáneamente sus elongaciones máximas, pero con signo contrario, pasan al mismo tiempo por la posición de equilibrio, pero con velocidades de sentidos opuestos, etc. En la fig. 277 *a* y *b* se muestra esquemáticamente la vibración de los puntos de una onda estacionaria transversal; en ella se señala la posición de dichos puntos en dos momentos separados por un semiperíodo.

Cuando la onda estacionaria es longitudinal, la elongación de los puntos es paralela el eje y. En la fig. 278 *a* y *b* se da la posición de los puntos de una onda estacionaria longitudinal en dos momentos separados por un semiperíodo. En esta figura puede verse cómo en los nodos, donde la velocidad de vibración de los puntos es igual a cero, se obtiene una variación más brusca de la densidad del medio:

las partículas unas veces se acercan al nodo por ambos lados y otras se separan de él.

Las ondas estacionarias suelen producirse por la interferencia de una onda que avanza con la onda reflejada que ella misma produce. Por ejemplo, si el extremo de una cuerda se sujeta en un punto fijo y le damos al otro extremo una sacudida de arriba abajo con la

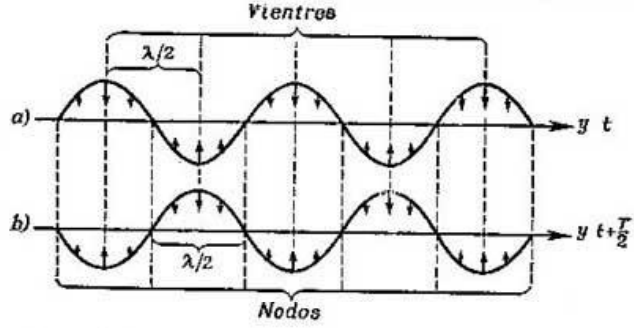


Fig. 277. Esquema de las vibraciones de una onda estacionaria transversal.

mano, la onda que se produce se propaga a lo largo de la cuerda y al llegar al punto de sujeción se refleja. La onda reflejada interferirá con la que avanza y formará con ella una onda estacionaria. Los

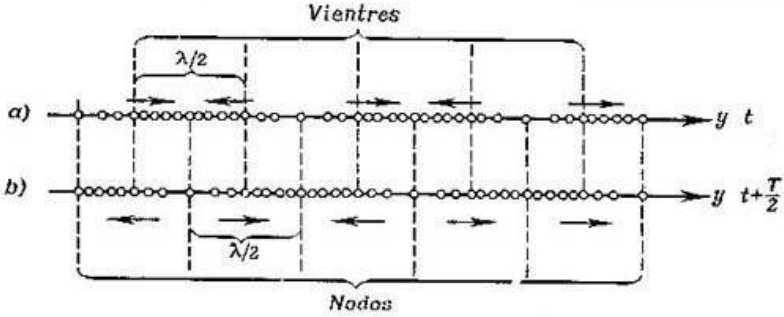


Fig. 278. Esquema de las vibraciones de una onda estacionaria longitudinal.

puntos nodales, que permanecen en reposo, se encontrarán entre sí a una distancia igual a la mitad de la longitud de la onda que avanza; en el punto de sujeción de la cuerda, es decir, en el límite, donde se produce la reflexión de la onda, se origina un nodo.

En general, en la superficie (límite) de reflexión se puede producir un nodo o un vientre; esto depende de la relación que exista entre las densidades de los medios. Si el medio en que tiene lugar la reflexión es más denso que aquel en que se propaga la onda, en la super-

ficie de separación entre ellos se produce un nodo. Si, por el contrario, el medio en que se produce la reflexión es menos denso que aquel en que se propaga la onda, en la superficie de separación entre ellos se produce un vientre.

El hecho de que en la superficie de reflexión del medio más denso se produzca un nodo se explica, porque la onda, al reflejarse en el medio más denso, invierte su fase en el punto de reflexión; en estas condiciones, en la superficie de separación se producen dos ondas de sentidos contrarios, lo que da lugar a la formación de un nodo.

Como la fase se invierte a una distancia igual a una semilongitud de onda, este hecho suele llamarse «pérdida de media onda».

Cuando la onda se refleja en un medio menos denso, no cambia de fase y, por lo tanto, no se produce la pérdida de media onda. Gracias a esto, las fases de la onda incidente y de la reflejada son iguales en la superficie de separación de los medios y, en este sitio, se produce un vientre, como resultado de la composición de dos vibraciones de la misma fase.

El cambio de la fase cuando la onda se refleja en la superficie de separación de un medio más denso y la conservación de la fase cuando la reflexión tiene lugar en la superficie de separación con un medio menos denso, se demuestra en la teoría de la elasticidad basándose en las condiciones generales que existen en la superficie de separación de un medio más denso y la conservación de la fase basándose en las condiciones generales que existen en la superficie de separación de dos medios elásticos.

§ 111. Dinámica de la propagación de las vibraciones en un medio elástico. El tipo de ondas aptas para propagarse en un medio, como dijimos anteriormente, depende de las propiedades elásticas de dicho medio. Se propagan aquellas

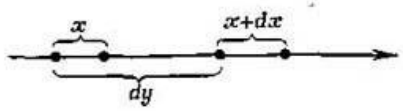


Fig. 279. Ilustración para deducir la expresión de la velocidad de propagación de una onda longitudinal.

vibraciones cuyo tipo está condicionado por el desplazamiento que provoca la deformación elástica del medio. Si el medio puede deformarse únicamente por compresión (gaseoso o líquido), las ondas que se propagan en él son longitudinales, mientras que si el medio se puede deformar tanto por compresión como por cizallamiento, en él pueden propagarse ondas longitudinales y transversales. Por ahora examinaremos solamente las ondas longitudinales.

Consideremos una serie de puntos, pertenecientes a un medio continuo, que se encuentren en una recta a lo largo de la cual se propaga una onda longitudinal.

Llamemos x a la separación de un punto cualquiera de esta recta de su posición de equilibrio (elongación), e y a la distancia que separa los puntos, medida a lo largo de esta misma recta.

Veamos lo que ocurre con dos puntos cuyas posiciones de equilibrio se encuentran entre sí a una distancia dy. Supongamos que las elongaciones de

estos puntos en un momento dado son x y $x + dx$ (fig. 279). Por consiguiente, al desplazarse los puntos, la distancia dy varía en la magnitud dx.

La relación entre la variación que experimenta la elongación dx y la magnitud de la distancia inicial entre los puntos dy, es decir, la razón dx/dy, se llama *deformación relativa* y la designaremos con la letra s, por lo tanto

$$s = \frac{dx}{dy}. \tag{1}$$

Cuando $s = \frac{dx}{dy} > 0$ la distancia entre los puntos aumenta, es decir, *el medio se dilata.*

Cuando $s = \frac{dx}{dy} < 0$ la distancia entre los puntos disminuye, es decir, *el medio se condensa.*

Teniendo en cuenta la ecuación de la onda

$$x = a \cos \omega \left(t - \frac{y}{V} \right), \tag{2}$$

donde ω es la frecuencia circular y V es la velocidad de propagación de la onda, podemos establecer una relación entre la deformación relativa dx/dy y la velocidad de los puntos vibrantes dx/dt; efectivamente, llamando v a la velocidad de los puntos, tenemos:

$$v = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = -a\omega \operatorname{sen} \omega \left(t - \frac{y}{V} \right).$$

La deformación relativa s viene determinada por

$$x = x' = \frac{dx}{dy} = \frac{a\omega}{V} \operatorname{sen} \omega \left(t - \frac{y}{V} \right).$$

Comparando estas dos expresiones obtenemos

$$\frac{dx}{dt} = -V \frac{dx}{dy},$$

de donde puede verse, que la deformación del medio dx/dy tiene un valor absoluto máximo en los puntos en que la velocidad de las partículas vibrantes dx/dt es máxima, es decir, en aquellas regiones en que los puntos pasan por sus posiciones de equilibrio.

De la ecuación de la onda (2) se puede obtener también otra correlación que nos hará falta más adelante. Tomando las segundas derivadas de x respecto a las variables t e y, obtenemos

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = -a\omega^2 \cos \omega \left(t - \frac{y}{V} \right);$$

$$x'' = \frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{a\omega^2}{V^2} \cos \omega \left(t - \frac{y}{V} \right),$$

de donde se deduce que

$$\frac{d^2x}{dt^2} = V^2 \frac{d^2x}{dy^2}, \tag{3}$$

es decir, la segunda derivada de la elongación respecto al tiempo es proporcional a la segunda derivada de la elongación respecto a la coordenada, con la particularidad de que el coeficiente de proporcionalidad es el cuadrado de la velocidad V de propagación de la onda.

La ecuación (3) ha sido obtenida diferenciando la ecuación de la onda (2). Recíprocamente podemos decir, que una onda periódica pura a la que corresponda una cosinusoide (2) satisfará la ecuación diferencial (3).

Pero en realidad también es solución de la ecuación diferencial (3) toda una serie de otras funciones. Estas funciones determinan la propagación en el medio de una perturbación ondulatoria de forma arbitraria con una velocidad V.

Por lo tanto, la ecuación diferencial (3), en su forma más general da la propagación del movimiento ondulatorio. La expresión (3) se denomina *ecuación de la onda.*

Para hallar la velocidad de propagación de una onda en un medio elástico utilicemos la ley de Hooke.

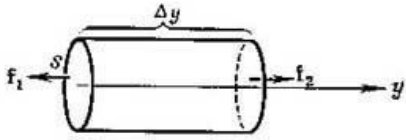


Fig. 280. Ilustración para deducir la expresión de la velocidad de propagación de una onda longitudinal.

Esta ley (véase el § 89), establecida para las deformaciones de un medio continuo, demuestra que la fuerza elástica es proporcional *a la deformación relativa.* Si tomamos, por ejemplo, una porción de medio continuo, cuya longitud sea dy y su sección transversal S, cuando esté alargado o comprimido en una magnitud dx, por la ley de Hooke la fuerza elástica será igual a

$$f = \frac{1}{\alpha} \frac{dx}{dy} S,$$

donde α es el coeficiente de elasticidad.

Veamos qué fuerzas actúan sobre una porción elemental aislada de un medio continuo, en el cual se propaga una onda longitudinal a lo largo del eje y. Para esto tomemos de dicho medio una porción cilíndrica, elegida de tal manera, que su generatriz sea paralela al eje y y tenga una longitud Δy, y que la sección transversal del cilindro sea igual a S. Supongamos que, en el momento en que hacemos nuestra observación, la porción cilíndrica está alargada por la acción de las fuerzas f_1 y f_2 (fig. 280) aplicadas a las bases del cilindro. Si tomamos como origen del eje y su punto de intersección con la base izquierda del cilindro, la fuerza f_1, por la ley de Hooke será igual a

$$f_1 = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{dx}{dy} \right)_0 S,$$

donde el subíndice 0 indica que la deformación relativa dx/dy se calcula para el valor de $y = 0$, es decir, en los puntos de la base izquierda del cilindro.

La fuerza que actúa sobre la base derecha, por esta misma ley será

$$f_2 = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{dx}{dy} \right)_{\Delta y} S,$$

donde dx/dy se calcula en los puntos de la base derecha.

La magnitud dx/dy es una determinada función $F(y)$, que puede desarrollarse en serie de Maclaurin:

$$F(y) = F(0) + F'(0)\Delta y + \ldots$$

Limitándonos a las magnitudes de primer orden de pequeñez con respecto a Δy, obtenemos

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)_{\Delta y} = \left(\frac{dx}{dy}\right)_0 + \left[\frac{d}{dy}\left(\frac{dx}{dy}\right)\right]_0 \Delta y.$$

Como las fuerzas f_1 y f_2 están dirigidas en sentidos contrarios, sobre la porción elemental actúa también la diferencia

$$f = f_2 - f_1 = \frac{1}{\alpha}\left[\left(\frac{dx}{dy}\right)_{\Delta y} - \left(\frac{dx}{dy}\right)_0\right] S = \frac{1}{\alpha} \times \frac{d^2x}{dy^2} \Delta y S.$$

Por la acción de esta fuerza la porción elemental recibe una aceleración d^2x/dt^2, la cual, por la segunda ley de Newton, es igual a la fuerza dividida por la masa del elemento; esta masa es igual al producto de la densidad ρ del medio por el volumen del elemento $\Delta y S$; por consiguiente

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{\alpha\rho\Delta y S} \cdot \frac{d^2x}{dy^2} \Delta y S \quad \text{o} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{\alpha\rho} \frac{d^2x}{dy^2}. \tag{4}$$

La fórmula (4) da la relación entre la segunda derivada d^2x/dt^2 de la elongación respecto al tiempo y la segunda derivada d^2x/dy^2 de la elongación respecto a la coordenada; esta relación ya fue deducida por nosotros en la fórmula (3), con la particularidad de que la magnitud V, que allí figura, representa la velocidad de propagación de la onda. Comparando estas dos expresiones vemos, que la velocidad de propagación de las ondas longitudinales en un medio determinado viene expresada por su densidad y el coeficiente de elasticidad en la correlación siguiente

$$V^2 = \frac{1}{\alpha\rho} \quad \text{o} \quad V = \sqrt{\frac{1}{\alpha\rho}}. \tag{5}$$

Para el elemento cilíndrico que hemos tomado, el coeficiente de elasticidad es $\alpha = \frac{1}{E}$, donde E es el módulo de Young (véase el § 89). Esta relación permite escribir la fórmula (5) de la forma:

$$V = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \tag{5a}$$

que coincide con la que dimos en la pág. 469.

Sin embargo, cuando *el espacio* sometido a compresión o tensión *es ilimitado*, cada una de sus porciones elementales sufre además una presión o un alargamiento lateral producido por los elementos contiguos, lo que da lugar a una relación más compleja entre el coeficiente de elasticidad del medio α y el módulo de Young. Esta relación es

$$\alpha = \frac{(1+\sigma)(1-2\sigma)}{(1-\sigma)E},$$

donde σ es el coeficiente (módulo) de Poisson. De donde la velocidad de propagación de las ondas longitudinales en un medio elástico continuo es igual a

$$V = \sqrt{\frac{1-\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \cdot \frac{E}{\rho}}. \tag{5b}$$

Como quiera que el coeficiente de Poisson es una magnitud del orden de 1/4, el factor $\frac{1-\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}$ se aproxima a la unidad, y, por lo tanto, cuando el medio es continuo puede emplearse la fórmula (5a) como aproximada. De esta

forma, resulta que *la velocidad de propagación de las ondas longitudinales en un medio elástico es directamente proporcional a la raíz cuadrada del módulo de Young e inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la densidad del medio.*

De forma análoga se puede demostrar, que la velocidad de propagación de las ondas transversales en un medio elástico es igual a

$$V = \sqrt{\frac{N}{\rho}}, \tag{6}$$

donde N es el módulo de rigidez.

Esta fórmula coincide con la expuesta en la pag. 469.

§ 112. Energía de la onda. Figurémonos una onda que se propaga a lo largo del eje y y que viene dada por la ecuación

$$x = a \cos \omega \left(t - \frac{y}{V}\right). \tag{1}$$

La energía de la parte del medio en que se propaga esta onda se compone de la energía cinética E_c y de la energía potencial E_p. Supongamos que el volumen de esta parte del medio es igual a τ; llamemos m a su masa y v a la velocidad con que se desplazan sus partículas; en estas condiciones, la energía cinética será:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2;$$

teniendo en cuenta que $m = \rho\tau$, donde ρ es la densidad del medio, y hallando la expresión de la velocidad por (1), tenemos que

$$v = \frac{dx}{dt} = -a\omega \operatorname{sen} \omega \left(t - \frac{y}{V}\right),$$

escribamos la expresión de la energía cinética E_c de la forma:

$$E_c = \frac{1}{2} \rho\tau a^2 \omega^2 \operatorname{sen}^2 \omega \left(t - \frac{y}{V}\right) \tag{2}$$

La energía potencial de un sólido sometido a una deformación relativa $(\Delta L/L)$, como dijimos en el § 89 [fórmula (6)], es igual a

$$E_p = \frac{1}{2} \left(\frac{ES}{L}\right) \cdot \Delta L^2.$$

Introduciendo en lugar del módulo de Young E el coeficiente de elasticidad $\alpha = \frac{1}{E}$ y multiplicando y dividiendo la parte derecha de la expresión por L, obtenemos que

$$E_p = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha}\right) \left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2 \cdot LS.$$

El producto LS representa el volumen τ del cuerpo deformado; la deformación relativa $\Delta L/L$ puede representarse de la forma dx/dy donde dx es la diferencia de las elongaciones de las partículas que se

encuentran entre sí a una distancia dy, entonces

$$E_p = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha}\right)\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 \tau.$$

Hallemos la expresión dx/dy por (1):

$$\frac{dx}{dy} = \frac{a\omega}{V} \operatorname{sen} \omega \left(t - \frac{y}{V}\right),$$

y escribamos la expresión de la enegía potencial de la forma:

$$E_p = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha}\right)\frac{a^2\omega^2\tau}{V^2} \operatorname{sen}^2 \omega \left(t - \frac{y}{V}\right). \qquad (3)$$

Comparando las expresiones (2) y (3) vemos, que la energía cinética y la potencial varían en una misma fase, es decir, alcanzan al mismo tiempo un máximo o un mínimo. En esto se distingue considerablemente la energía de la parte afectada por la onda de la energía de la vibración de un punto aislado, en el cual, cuando la energía cinética alcanza un máximo, la potencial tiene un mínimo y viceversa. Para un punto aislado, la reserva total de energía vibratoria se mantiene constante. Cuando la vibración se produce en un medio, cada uno de los elementos de su volumen está relacionado con el medio circundante y la energía de una parte de este medio puede trasladarse a otra. Por esta razón, la energía total de la parte del medio en que se propaga la onda no permanece constante.

Calculemos la energía total E del elemento de volumen τ del medio; sumando las expresiones (2) y (3), obtenemos

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha V^2} + \rho\right) a^2\omega^2 \tau \operatorname{sen}^2 \omega \left(t - \frac{y}{V}\right).$$

Como por la fórmula (5) del § 111 la velocidad de propagación V de la onda en un medio elástico es

$$V = \sqrt{\frac{1}{\alpha\rho}},$$

la expresión de la energía total E puede escribirse de la forma

$$E = \rho a^2\omega^2\tau \operatorname{sen}^2 \omega \left(t - \frac{y}{V}\right). \qquad (4)$$

Por lo tanto, *la energía de la parte del medio en que se propaga la onda es proporcional al cuadrado de la amplitud de la vibración, al cuadrado de la frecuencia y a la densidad del medio.*

Introduzcamos ahora el concepto de densidad de la energía ε, que definiremos como la razón de la energía contenida en un elemento de volumen τ a la magnitud de dicho volumen:

$$\varepsilon = \frac{E}{\tau} = \rho a^2\omega^2 \operatorname{sen}^2 \omega \left(t - \frac{y}{V}\right). \qquad (5)$$

La densidad de la energía en un punto dado, lo mismo que la propia energía, es una magnitud variable. Cada semiperíodo la energía toma su valor ini-

cial. Como el valor medio del cuadrado del seno durante un período es igual a 1/2, de acuerdo con (5), el valor medio de la densidad de la energía será:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2}\rho a^2\omega^2. \tag{6}$$

Partiendo de la base de que la energía no permanece localizada en una parte dada, sino que se traslada por el medio, podemos introducir el concepto de *flujo de energía*. Entenderemos por flujo de energía a través de una superficie, la magnitud numéricamente igual a la cantidad de energía que pasa por la superficie dada en la unidad de tiempo.

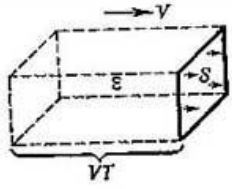


Fig. 281. La energía que pasa por la superficie S durante un tiempo T es la contenida en el volumen del paralelepípedo VTS.

Tomemos una superficie S, perpendicular a la dirección de la velocidad V de una onda; por esta superficie pasará, durante un tiempo igual a un período T, una cantidad de energía igual a la contenida en un paralelepípedo de sección transversal S y de longitud VT (fig. 281); esta cantidad de energía será igual al valor medio de la densidad de la energía $\bar{\varepsilon}$, tomado durante un período, multiplicado por el volumen del paralelepípedo VTS, de donde

$$E = \bar{\varepsilon} \cdot VTS.$$

El flujo medio de energía $\bar{P}$ podemos obtenerlo dividiendo esta expresión por el tiempo T que dura el paso de la energía por la superficie S:

$$\bar{P} = \bar{\varepsilon} \cdot VS. \tag{7}$$

Poniendo aquí el valor de $\bar{\varepsilon}$ dado por (6), hallamos:

$$\bar{P} = \frac{1}{2}\rho a^2\omega^2 VS.$$

De esta forma, *el flujo medio de energía que pasa por una superficie perpendicular a la dirección de la propagación de las vibraciones es igual a la densidad media de la energía multiplicada por la velocidad de propagación de la onda y por el área de la superficie.*

La cantidad de energía que pasa en la unidad de tiempo por la unidad de superficie se llama *densidad del flujo* $\bar{U}$. Como según esta definición $\bar{U} = \frac{\bar{P}}{S}$, aplicando la fórmula (7), obtenemos:

$$\bar{U} = \bar{\varepsilon} \cdot V, \tag{8}$$

es decir, la densidad del flujo es igual a la densidad media de la energía multiplicada por la velocidad de propagación de la onda.

Como la velocidad V es un vector, la densidad del flujo de energía también puede considerarse como un vector dirigido en el sentido de la propagación de la onda. Este vector fue introducido por primera vez por el profesor N. A. Umov (1845-1915) de la Universidad de Moscú, y por esto recibe el nombre de *vector de Umov*.

Demostremos ahora que si tenemos una onda esférica que se propaga desde un foco puntual, la densidad media del flujo de energía será inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al foco.

Tomemos un foco puntual de vibraciones y tracemos una esfera de radio R con centro en dicho foco. La onda, y la energía relacionada con ella, se propagarán siguiendo sus radios, es decir, perpendicularmente a la superficie de la esfera. Durante un período T, por la superficie de la esfera pasará una energía $\overline{P}T$, siendo $\overline{P}$ el flujo de energía que pasa por dicha superficie. La densidad del flujo $\overline{U}$ podemos obtenerla dividiendo esta energía por el área de la superficie esférica y por el tiempo:

$$\overline{U} = \frac{\overline{P} \cdot T}{4\pi R^2 T} = \frac{\overline{P}}{P\pi R^2}.$$

Si el medio no absorbe las vibraciones y en el proceso ondulatorio estabilizado el flujo de energía $\overline{P}$ es constante y no depende del radio R con que se traza la esfera, la última ecuación demuestra que *la densidad media del flujo es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al foco puntual.*

La correlación que hemos deducido, como ya dijimos, es justa mientras el medio no sea absorbente; en otras palabras, para nuestro análisis supusimos que la energía del movimiento ondulatorio no se transforma en ninguna otra forma de energía. Pero en realidad una parte de la energía del movimiento vibratorio se transforma frecuentemente en energía interna del medio. Este hecho se produce porque en todo medio mecánico existe frotamiento interno. La cantidad total de energía que transporta la onda depende de su distancia al foco: cuanto más distante esté del foco la superficie de la onda, tanto menor será la energía que posea. La energía es proporcional al cuadrado de la amplitud; por consiguiente, la amplitud de la vibración disminuye a medida que se propaga la onda. Para establecer la ley de la disminución de la amplitud supongamos que, al pasar por una capa de espesor dy, la disminución relativa de la amplitud $-\frac{da}{a}$ es proporcional a dy, es decir, escribamos la ecuación

$$-\frac{da}{a} = \varkappa\, dy,$$

donde $\varkappa$ es una magnitud constante que depende de la naturaleza del medio.

Es evidente que esta última expresión puede escribirse de la forma

$$d\,(\ln a) = -d\,(\varkappa y).$$

Si las diferenciales de dos magnitudes son iguales entre sí, estas magnitudes sólo se diferencian en una magnitud aditiva constante C, de donde

$$\ln a = -\varkappa y + C;$$

la constante C se determina por la condición de que, cuando $y = 0$, la magnitud de $\ln a$, igual a $\ln a_0$, debe ser igual a C, por lo tanto

$$\ln a = \ln a_0 - \varkappa y, \text{ de donde } a = a_0 e^{-\varkappa y}. \tag{9}$$

Esta expresión da la disminución de la amplitud a a medida que la onda se propaga en la dirección del eje y; a_0 es el valor de la amplitud cuando $y = 0$.

La ecuación de una onda plana en un medio absorbente, sobre la base de la fórmula (9), será:

$$x = a_0 e^{-\varkappa y} \cdot \cos \omega \left(t - \frac{y}{V}\right). \tag{10}$$

Determinemos también la disminución de la energía de la onda al aumentar la distancia. Llamemos $\overline{\varepsilon}_0$ a la densidad media de la energía cuando $y = 0$ y

$\bar{\varepsilon}_y$ a esta misma magnitud a una distancia y; entonces, por las correlaciones (6) y (9), obtendremos:

$$\bar{\varepsilon}_y = \bar{\varepsilon}_0 e^{-2\varkappa y}. \tag{11}$$

Designemos $2\varkappa$ por la letra k y escribamos la última fórmula de la forma

$$\bar{\varepsilon}_y = \bar{\varepsilon}_0 e^{-ky} \tag{11a}$$

La magnitud k se llama *coeficiente de absorción*.

§ 113. Efecto Doppler. Estudiemos ahora la relación que existe entre las vibraciones emitidas por un foco y las percibidas por un receptor registrador cualquiera cuando el uno se mueve con respecto al otro. Para esto, y con objeto de que las vibraciones puedan propagarse desde el foco hasta el receptor en forma de ondas, tanto aquél como éste deberán sumergirse en un medio elástico continuo. Supongamos que el foco A emite vibraciones de período T, de modo que el número de vibraciones emitidas en la unidad de tiempo es $\nu = \frac{1}{T}$. Supongamos también que un receptor determinado percibe las vibraciones y que el número de éstas en la unidad de tiempo es igual a ν'. Veamos qué relación existe entre ν' y ν en los diferentes casos que pueden presentarse de movimiento del receptor y del foco emisor con respecto al medio que propaga las ondas. Para simplificar, admitamos que este movimiento se realiza siguiendo la línea recta que une entre sí el receptor con el foco.

En las fórmulas que vamos a emplear introduciremos unas reglas determinadas sobre los signos de las velocidades del foco y del receptor. Convencionalmente consideraremos positiva la velocidad u del foco, con respecto al medio, cuando aquél se aproxime al receptor. Si el foco se aleja del receptor su velocidad será considerada negativa. Análogas condiciones servirán para determinar el signo que tenga la velocidad v del receptor con respecto al medio: cuando se aproxime al foco consideraremos su velocidad positiva y cuando se aleje, negativa. La velocidad con que se propaga la vibración en el medio será designada con la letra V.

Analicemos *el primer caso*: *el receptor registrador A y el foco B están en reposo con relación al medio*, es decir, $u = 0$ y $v = 0$. Si las vibraciones pasan constantemente junto al receptor, éste recibirá en una unidad de tiempo tantas vibraciones como ondas pasen junto a él en este tiempo. Como quiera que la onda recorre en la unidad de tiempo una distancia V, el número de vibraciones recibidas por el receptor será igual a

$$\nu' = \frac{V}{\lambda} = \frac{V}{VT} = \frac{1}{T} = \nu$$

es decir, obtendremos un resultado evidente: el número de vibraciones percibidas por el receptor en la unidad de tiempo es igual al número de vibraciones emitidas por el foco en este mismo tiempo.

Segundo caso: *el receptor registrador se mueve con relación al medio con una velocidad v*: *el foco permanece inmóvil*, es decir, $u = 0$.

Supongamos primero que el receptor se mueve en dirección al foco, es decir, de acuerdo con la regla convenida $v > 0$. En este caso, junto al receptor pasarán más ondas en la unidad de tiempo que cuando dicho receptor se encontraba en reposo respecto al medio. Efectivamente, como el receptor se mueve al encuentro de las ondas, ocurrirá lo mismo que si las ondas pasasen junto al receptor con una velocidad igual a la suma de las velocidades de la onda V y del receptor v. El número de ondas que pasa junto al receptor en la unidad de tiempo será igual a:

$$\nu' = \frac{V+v}{\lambda} = \frac{V+v}{VT},$$

de donde, como $\frac{1}{T} = \nu$, tenemos:

$$\nu' = \left(1 + \frac{v}{V}\right)\nu, \qquad (1)$$

es decir, el número de ondas percibidas por el receptor es $\left(1 + \frac{v}{V}\right)$ veces mayor que el de ondas emitidas por el foco.

Si el receptor se aleja del foco, según la regla convencional de los signos, su velocidad $v < 0$. En este caso el número de vibraciones ν' percibidas por el receptor también viene expresado por la fórmula (1), pero como v/V será menor que cero, ν' resultará menor que ν, es decir, el número de vibraciones percibidas por el receptor será menor que el de vibraciones emitidas por el foco.

Esta variación del número de vibraciones registradas cuando el receptor o el foco se mueven con respecto al medio, recibe el nombre de *efecto Doppler*.

Si la velocidad v del receptor es igual a la de la onda, sus traslaciones serán simultáneas y el número de vibraciones percibidas en la unidad de tiempo será igual a cero. Si la velocidad del receptor es mayor que la de las ondas, estas últimas se irán quedando rezagadas y el receptor marcará que las ondas van a su encuentro.

Analicemos *el tercer caso*: *el foco se mueve con una velocidad u respecto al medio*; *el receptor permanece inmóvil*, es decir, $v = 0$.

Supongamos primeramente que el foco se mueve hacia el receptor: $p > 0$.

Como la velocidad de propagación de las ondas depende únicamente de las propiedades del medio, durante un período la vibración avanzará una longitud de onda λ, independientemente de que el foco se mueva o no respecto al medio; pero durante este tiempo el foco recorre una distancia uT (fig. 282) en la misma dirección que la onda, por lo tanto, la longitud de onda resultará igual a

$$\lambda' = \lambda - uT = VT - uT = (V - u)\,T;$$

de donde el número de vibraciones percibidas por el receptor en la unidad de tiempo aumentará, a causa de la disminución de la longitud de onda, y será igual a

$$\nu' = \frac{V}{\lambda'} = \frac{V}{(V-u)T} \text{ o } \nu' = \frac{V}{V-u}\nu, \qquad (2)$$

es decir, el número de vibraciones percibidas por el receptor aumenta en la proporción de $\frac{V}{V-u}$.

Si el foco se aleja del receptor ($u < 0$), se produce un aumento de la longitud de onda en la magnitud $\Delta\lambda = uT$, y, como resultado, el receptor percibirá menor número de vibraciones: $\nu' < \nu$.

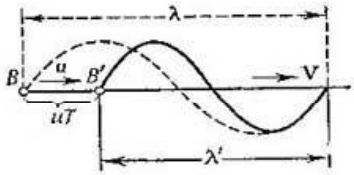


Fig. 282. Disminución de la longitud de onda cuando el foco se mueve en la misma dirección en que se propagan las ondas.

El cuarto caso es el más general: en él se supone que tanto el receptor como el foco se mueven simultáneamente con respecto al medio en que se propagan las ondas ($u \neq 0$ y $v \neq 0$).

El movimiento del foco da lugar a que la longitud de la onda emitida varíe y se haga igual a

$$\lambda' = \lambda - uT.$$

El movimiento del receptor hace que el número de vibraciones percibidas por él en la unidad de tiempo resulta multiplicado por $\frac{V+v}{V}$; estas dos causas determinan que el número de vibraciones percibidas por el receptor resulte igual a

$$\nu' = \frac{V+v}{\lambda - uT} = \frac{V+v}{V-u} \cdot \frac{1}{T} \text{ o } \nu' = \frac{V+v}{V-u}\nu. \qquad (3)$$

Es decir, ν' depende de diferente modo de la velocidad del receptor v y de la del foco u respecto al medio.

Si las velocidades v y u no tienen la dirección de la recta que une el receptor con el foco hay que tomar sus componentes sobre esta línea.

La variación que experimenta el número de vibraciones a causa del movimiento del foco o del receptor es fácil de notar cuando se perciben sonidos. La frecuencia de las vibraciones sonoras determina el tono del sonido: cuanto mayor es el número de vibraciones en la unidad de tiempo, tanto más alto es el tono. Cuando una locomotora a gran velocidad pasa pitando junto a un observador, éste

nota perfectamente cómo el tono del pitido varía en el momento en que la locomotora, después de pasar, comienza a alejarse.

§ 114. Velocidad de grupo. Hasta ahora, al hablar de la velocidad de propagación de las ondas nos hemos referido a la velocidad de fase, es decir, a la velocidad con que se propagan las superficies de igual fase o superficies de onda. En la ecuación de la onda plana

$$x = a \cos \omega \left(t - \frac{r}{V} \right) \qquad (1)$$

la magnitud V es la velocidad de fase, es decir, la velocidad a que se propaga en el medio una superficie de onda, que es el lugar geométrico de los puntos que vibran en una misma fase. De esto podemos convencernos basándonos en los razonamientos siguientes.

En la expresión (1) r es un segmento, tomado en la dirección en que se propagan las ondas planas, que determina la posición de la superficie de onda

Fig. 283. Onda formada por una sola cresta.

(fig. 273). La condición de la continuidad de las fases en el tiempo se reduce a la condición de que el argumento del coseno en la expresión (1) sea constante, es decir, a que

$$\omega \left(t - \frac{r}{V} \right) = \text{const},$$

o, como la frecuencia circular ω es una magnitud constante, a que se cumpla la condición

$$t - \frac{r}{V} = \text{const}.$$

Llamando τ al valor de esta magnitud constante para la superficie de onda dada, tendremos

$$t - \frac{r}{V} = \tau.$$

Evidentemente, τ estará determinada por el momento a partir del cual se cuenta el tiempo t; como para $r = 0$ suponemos $t = 0$, tendremos que admitir que la constante τ es igual a cero, de donde

$$t - \frac{r}{V} = 0 \quad \text{y} \quad V = \frac{r}{t},$$

es decir, V es la velocidad con que aumenta el segmento r con el tiempo, o dicho de otro modo, la velocidad a que se traslada el plano de fases iguales.

Rayleigh fue el primero en demostrar que en las ondas, junto con el concepto de velocidad de fase, debía introducirse el de la llamada *velocidad de grupo*.

La velocidad de grupo se refiere al caso de la propagación de ondas de carácter complejo no cosinusoidal en un medio en el cual la velocidad de fase con que se propagan las ondas cosinusoidales depende de su frecuencia. La velocidad de fase de las ondas depende de sus frecuencias y esta dependencia se llama *dispersión de las ondas*.

Figurémonos que en la superficie del agua se produce una onda, formada por una sola cresta (fig. 283), que se propaga en una dirección determinada. De

acuerdo con lo dicho en el § 104, esta vibración compleja puede descomponerse en un grupo de vibraciones armónicas puras. Si todas las vibraciones armónicas se propagan por la superficie del agua con la misma velocidad, con esta misma velocidad se propagará también la vibración compuesta por ellas. Pero si las velocidades de las distintas ondas cosinusoidales son diferentes, la diferencia de fases entre ellas cambiará constantemente y la cresta que se forma como resultado de su composición cambiará constantemente de forma y avanzará con una velocidad distinta de la de todas las ondas componentes.

Fig. 284. Segmento de cosinusoide.

Toda onda real se diferencia de la cosinusoide ideal, aunque sólo sea por el hecho de que esta última no está limitada por el tiempo. En la pág. 463 vimos, que toda vibración amortiguada se compone de una multitud innumerable de vibraciones armónicas. Por el teorema de Fourier todo segmento de cosinusoide (fig. 284) también puede descomponerse en una multitud innumerable de cosinusoides ideales no limitadas en el tiempo. Por lo tanto, toda onda real representa de por sí una superposición (grupo) de cosinusoides innumerables y su

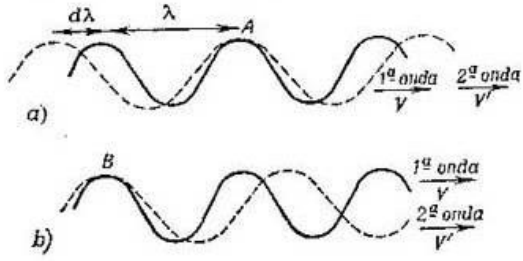


Fig. 285. Ilustración para deducir la expresión de la velocidad de grupo.

velocidad de propagación en un medio dispersante es diferente de la velocidad de fase de las ondas componentes. Esta velocidad de propagación de las ondas reales en un medio dispersante es la que se llama *velocidad de grupo*. Las ondas reales solamente se propagan con una velocidad igual a la de fase de sus componentes cosinusoidales en aquellos medios en que no existe dispersión.

Deduzcamos la expresión analítica de la velocidad de grupo. Para simplificar, supongamos que el grupo consta solamente de dos ondas, cuyas longitudes se diferencian poco entre sí: la 1ª tiene una longitud de onda λ y se propaga con una velocidad V y la 2ª tiene una longitud de onda $\lambda' = \lambda + d\lambda$ y se propaga con una velocidad

$$V' = V + \frac{dV}{d\lambda} d\lambda. \qquad (2)$$

La posición relativa de ambas ondas en un momento determinado se representa en la fig. 285, *a*. Las crestas de ambas ondas coinciden en el punto A; en este punto se encuentra un máximo de las vibraciones resultantes. Supongamos que $V' > V$; en este caso, la segunda onda adelantará a la primera. Al cabo de un lapso determinado τ la adelantará en un segmento igual a $d\lambda$, y como resultado de esto las ondas no coincidirán ya en el punto A, sino en el B (fig. 285, *b*). El sitio correspondiente al máximo de la vibración compuesta

resulta desplazado hacia atrás, en un segmento λ, con relación a la primera onda. De aquí se deduce que la velocidad de propagación del máximo de las ondas resultantes, con relación al medio, es menor que la velocidad de propagación de la primera onda en una magnitud λ/τ. Esta velocidad de propagación del máximo de la vibración compuesta es la velocidad de grupo; designándola por U, tendremos que

$$U = V - \frac{\lambda}{\tau}. \tag{3}$$

Como la velocidad de la segunda onda respecto a la primera es igual a $V' - V$,

$$\tau = \frac{d\lambda}{V' - V};$$

poniendo en esta fórmula en lugar de V' su valor según (2), obtenemos:

$$\tau = \frac{d\lambda}{\left(V + \frac{dV}{d\lambda} d\lambda\right) - V} = \frac{d\lambda}{dV}.$$

Poniendo esta expresión de τ en (3) hallamos la velocidad de grupo

$$U = V - \lambda \frac{dV}{d\lambda}. \tag{4}$$

Por la fórmula (4) vemos, que la velocidad de grupo U se diferencia tanto más de la velocidad de fase V, cuanto mayor es $dV/d\lambda$, es decir, cuanto más

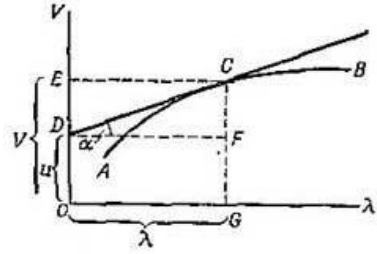


Fig. 286. Procedimiento gráfico de hallar la velocidad de grupo.

depende la velocidad de propagación de la longitud de onda. Cuando $\frac{dV}{d\lambda} > 0$ la velocidad de grupo $U < V$ y cuando $\frac{dV}{d\lambda} < 0$ tenemos que $U > V$. De esta forma, la velocidad de grupo U puede ser mayor o menor que la velocidad de fase V. La velocidad de grupo es menor que la de fase cuando $\frac{dV}{d\lambda} > 0$, es decir, cuando las ondas más largas se propagan más de prisa que las cortas; este caso se conoce con el nombre de dispersión normal.

Para los medios en que no existe dispersión, $\frac{dV}{d\lambda} = 0$ y $U = V$, es decir, de acuerdo con lo dicho anteriormente, la velocidad de grupo es igual a la de fase.

Para hallar la velocidad de grupo puede utilizarse el método gráfico siguiente: supongamos que la curva AB (fig. 286) expresa la relación de dependencia entre la velocidad de propagación de la onda V y la longitud de onda λ. Por el punto C, correspondiente a un valor dado de λ, trazamos la tangente CD.

Entonces, para el segmento CF tendremos

$$CF = DF \cdot \operatorname{tg} \alpha = \lambda \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

pero

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dV}{d\lambda},$$

de donde

$$CF = \lambda \cdot \frac{dV}{d\lambda}.$$

En la figura vemos que

$$DO = EO - ED,$$

pero

$$EO = V$$

y

$$ED = CF = \lambda \frac{dV}{d\lambda},$$

de donde

$$DO = V - \lambda \frac{dV}{d\lambda}.$$

Comparando esta expresión con la fórmula (4), vemos que, en nuestro diagrama, el segmento DO representa precisamente la velocidad de grupo U.

En la fig. 286 pueden establecerse fácilmente las correlaciones que acabamos de estudiar: si la velocidad de las ondas V aumenta con λ (a este caso se refiere la figura), el punto D se encuentra más bajo que el E, por consiguiente, la velocidad de grupo $U < V$. Si la velocidad V disminuye al aumentar λ, no es difícil comprender que el punto D estará más alto que el E, lo que corresponderá a la correlación $U > V$. Finalmente, si las ondas de todas las longitudes se propagan con igual velocidad, la relación entre V y λ se representará en el diagrama por una recta paralela al eje λ. En este caso, E y D coincidirán y, por consiguiente, coincidirán también la velocidad de grupo U y la de fase V.

CAPITULO XIII

Vibraciones acústicas

§ 115. Vibraciones acústicas y su propagación. En el aire, como en todos los demás gases, las vibraciones se propagan formando ondas longitudinales. Cuando a nuestro órgano auditivo (oído) llegan vibraciones cuya frecuencia se encuentra comprendida entre los límites de 20 a 20 000 vibraciones por segundo, producen en él la sensación específica del sonido.

Como unidad de frecuencia se admite *la de un movimiento vibratorio, en el cual, durante un segundo, se realiza una vibración completa*; esta unidad de frecuencia lleva el nombre del físico alemán Hertz y se llama *hertzio* (o abreviado Hz)*). Por ejemplo, un movimiento vibratorio en el cual se realizan 2 vibraciones en 1 s, tiene la frecuencia de 2 Hz, y un movimiento con 10 vibraciones en 1 s, tendrá una frecuencia de 10 Hz.

De esta forma, las vibraciones que se encuentran entre los límites de 20 y 20 000 Hz tienen la propiedad de producir la sensación de sonido y, por esto, constituyen un grupo especial de vibraciones u oscilaciones que se denominan *sonoras* o *acústicas* o simplemente sonidos.

Esta agrupación de los movimientos vibratorios que se realizan entre los límites de 20 y 20 000 Hz está relacionada con las peculiaridades fisiológicas del órgano auditivo humano, el cual percibe únicamente las vibraciones que tienen estas frecuencias. Pero desde el punto de vista físico, las vibraciones de 10 ó 30 000 Hz, por ejemplo, no se diferencian en nada específico de las vibraciones de 20 a 20 000 Hz. Por esta razón, en Física suelen considerarse como vibraciones sonoras, en general, las vibraciones elásticas que se propagan en forma de movimientos ondulatorios en los gases, líquidos y sólidos o que producen en regiones limitadas de estos cuerpos ondas estacionarias. Las vibraciones elásticas que tienen frecuencias mayores de 20 000 Hz reciben el nombre de *ultrasonidos* y las que tienen frecuencias menores de 20 Hz se llaman *infrasonidos*.

---

*) En lugar de Hz suele emplearse la expresión, «ciclos por segundo» (c/s) (*N. del T.*)

Como quiera que el medio principal en que se propagan las vibraciones sonoras es el aire, empezaremos por estudiar la velocidad de propagación de las ondas elásticas longitudinales en los gases.

En el § 106 se dio la siguiente expresión de la velocidad de propagación de las ondas elásticas longitudinales en un medio continuo

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \tag{1}$$

donde E es el módulo de Young del medio y ρ es su densidad. Por definición, el módulo de Young de una varilla elástica en deformación es

$$E = \frac{p_n}{\frac{\Delta L}{L}}$$

donde p_n es el esfuerzo o carga unitaria, es decir, una magnitud numéricamente igual a la fuerza aplicada por unidad de área transversal, y $\Delta L/L$ es el alargamiento relativo. Cuando se trata de una columna de gas p_n debe ser sustituido por la sobrepresión Δp que hace que se comprima el gas. La deformación lineal relativa $\Delta L/L$ puede sustituirse por la deformación volumétrica relativa $\Delta V/V$, puesto que suponemos que la columna de gas se comprime únicamente a lo largo de su longitud, sin que varíe su sección transversal. Así pues

$$E = \frac{\Delta p}{\frac{\Delta V}{V}}. \tag{2}$$

Suponiendo que las variaciones de la presión y del volumen son infinitesimales, podemos designarlas por dp y dV. Al hacer esto debemos tener en cuenta que al aumento de la presión (dp positivo) corresponde una disminución del volumen, es decir, un dV negativo. Por esto escribiremos la fórmula (2) de la forma:

$$E = -\frac{dp}{\frac{dV}{V}} \quad \text{o} \quad E = -V\frac{dp}{dV}. \tag{2a}$$

Las vibraciones sonoras son tan rápidas, que la compresión y expansión del gas se pueden considerar adiabáticas, por lo que la variación del estado del gas satisface la ecuación (fórmula) de Poisson:

$$pV^{\gamma} = \text{const},$$

donde γ es la razón de los calores específicos a presión y volumen constantes, $\gamma = C_p/C_v$ (véase el § 49).

Derivando la fórmula de Poisson, obtenemos:

$$V^{\gamma}\,dp + \gamma V^{\gamma-1} p\,dV = 0, \quad \text{de donde} \quad \frac{dp}{dV} = -\gamma\frac{p}{V}.$$

Poniendo este valor de dp/dV en la fórmula (2a), hallamos

$$E = \gamma p;$$

finalmente, poniendo este valor de E en la expresión (1) de las vibraciones sonoras, obtenemos:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}. \qquad (3)$$

Poniendo aquí en lugar de la densidad ρ su valor en función de la presión p, la temperatura del gas T y su peso molecular μ (véase el § 45)

$$\rho = \frac{p\mu}{RT},$$

donde R es la constante de los gases, hallamos-que

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}. \qquad (4)$$

De esta forma, *la velocidad de propagación de las ondas sonoras en un gas dado es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la temperatura absoluta T y no depende de la presión p del gas.*

Para distintos gases, en igualdad de condiciones, la velocidad del sonido es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de sus pesos moleculares.

En la tabla XX se dan los valores de la velocidad del sonido

Tabla XX

Velocidad del sonido v en los gases a 0° C

Gas	Velocidad del sonido en m/s
Aire	331
Oxígeno	315
Hidrógeno	1263
Anhídrido carbónico . .	258

en algunos gases, a la temperatura de 0° C.

La gran velocidad del sonido en el hidrógeno se debe a su pequeño peso molecular.

En la propagación de las ondas sonoras en la atmósfera desempeña un gran papel la falta de homogeneidad de ésta. La velocidad del sonido depende de la temperatura del aire y de su grado de humedad. El viento también influye en la velocidad de propagación de las ondas sonoras. Finalmente, las ondas se reflejan en el límite que separa dos medios en los cuales su velocidad es distinta. Puede ob-

servarse la reflexión de los sonidos en las nubes y en los límites de la niebla.

Todos sabemos que los sonidos se perciben mejor a favor del viento que contra él. Este fenómeno se debe al gradiente de velocidad del viento, y no a la propia velocidad, puesto que esta última es generalmente pequeña en comparación con la velocidad del sonido. La velocidad del viento junto a la superficie de la Tierra es menor que a cierta altura. Esto hace que los rayos sonoros que avanzan contra el viento se tuerzan hacia arriba. La mala audición en contra del viento se explica por el hecho de que los rayos sonoros pasan por encima de la cabeza del observador.

Un fenómeno semejante se produce a causa de la existencia del gradiente de temperatura del aire. El sonido se propaga con más rapidez en el aire templado que en el frío. De aquí se deduce, que si la temperatura disminuye a medida que nos alejamos de la superficie de la Tierra, la velocidad del sonido también disminuirá con la altura y los rayos sonoros se desviarán hacia arriba. Este caso corresponde al gradiente de temperatura que tiene lugar a mediodía cuando hace sol y calor y la superficie de la Tierra se calienta mucho. En estas condiciones suele oírse mal. Pero por las tardes, cuando el cielo está despejado y la Tierra se enfría rápidamente, ocurre lo contrario, es decir, se enfrían las capas de aire próximas a la Tierra, mientras que la temperatura de las capas más altas aumenta, lo que da lugar a que los rayos sonoros que van hacia arriba se tuerzan hacia abajo. Esto explica por qué se oye mejor por las tardes.

Finalmente, por la falta de homogeneidad de la atmósfera se explica la formación de las llamadas zonas de silencio, que suelen observarse cuando se propagan a grandes distancias sonidos fuertes, por ejemplo, el ruido de explosiones. La explosión se oye a distancias relativamente cortas y a grandes distancias (de centenares de kilómetros), pero en medio existe una región donde la explosión no se oye.

En la expresión de la velocidad del sonido (4) entra la razón de los calores específicos $\gamma = C_p/C_V$ lo que da la posibilidad de determinar el valor numérico de esta relación en los gases midiendo la velocidad del sonido en ellos.

Detengámonos aún en otros factores característicos de la propagación de las ondas sonoras en los gases. En cada uno de los puntos de un medio en que se propaga una onda longitudinal sonora las condensaciones y enrarecimientos se suceden entre sí. Por consiguiente, la presión del gas unas veces aumenta con respecto a la inicial y otras disminuye. La diferencia máxima de la presión, con relación a la normal, se llama amplitud del sonido; esta amplitud suele medirse en barias.

Como esta presión complementaria varía constantemente en la onda, su valor medio es igual a cero. No obstante, cuando se trata

de ondas muy fuertes hay que tener en cuenta los efectos que dependen del cuadrado o de las potencias más altas de la elongación. Las vibraciones de este género se determinan con ecuaciones no lineales y, por esta razón, se llaman *vibraciones no lineales*. Para ellas la presión media no es igual a cero. Una onda de este tipo, al reflejarse en un obstáculo, ejerce presión sobre él. La magnitud de esta presión del sonido, como demuestra la teoría, es igual a

$$p = \frac{1}{2}\bar{\varepsilon}'(\gamma + 1),$$

donde $\bar{\varepsilon}'$ es la densidad media de la energía de la onda estacionaria que se forma junto al obstáculo y γ es la razón de los calores específicos C_p/C_V.

La presión del sonido fue estudiada experimentalmente en el laboratorio por el insigne físico ruso P. N. Lébedev (1866-1912), el cual planteó en su forma general el problema de la presión ejercida al absorberse y reflejarse las ondas (véase el t. III).

§ 116. Interferencia de las ondas sonoras. En las ondas sonoras se pueden descubrir fácilmente los fenómenos característicos de las interferencias, descritos en al § 109. Un experimento muy sencillo

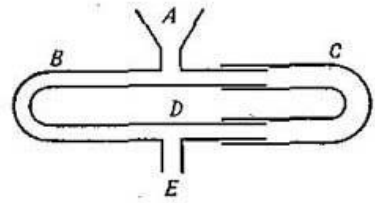


Fig. 287. Tubo para estudiar interferencia del sonido (tubo o trombón de Quincke).

sobre interferencias de sonidos puede realizarse con el tubo representado esquemáticamente en la fig. 287. El generador del sonido se coloca en el embudo A, adaptado al tubo. El tubo se bifurca formando dos ramas ABD y ACD. El codo ACD está hecho de forma que los tubos entran unos dentro de otros y gracias a esto pueden alargarse o acortarse. Las vibraciones sonoras llegan hasta el extremo del tubo E por dos caminos: uno, por el codo ABD y otro, por el codo ACD. Cuando la longitud de estos dos codos no es la misma, entre las ondas que llegan por ellos al punto E existe una diferencia de marcha $r_2 - r_1$. Si esta diferencia de marcha es igual a un número par de semilongitudes de onda, es decir, si $r_2 - r_1 = 2k\frac{\lambda}{2}$, donde k es un número entero, de acuerdo con lo expuesto en la pág. 477, el sonido que se percibe en el punto E se refuerza en comparación con el que se oiría si pasase por un solo codo. Pero cuando la diferencia de marchas da un número impar de semiondas, es decir, cuando $r_2 - r_1 = (2k + 1)\frac{\lambda}{2}$, se observa una debilitación del sonido.

Este tubo puede emplearse para medir la longitud de las ondas emitidas por una fuente de sonido dada. Para esto hay que medir la magnitud en que hay que desplazar el tubo C para conseguir pasar de una debilitación del sonido a la siguiente. La variación de la longitud del codo da la longitud de onda λ. Este procedimiento de medir la longitud de las ondas sonoras se basa en el fenómeno de la interferencia, por lo que recibe el nombre de *método de interferencia*. El tubo representado en la fig. 287 es el más simple de los aparatos análogos a los *interferómetros* que se utilizan en óptica para la medición de las longitudes de las ondas luminosas.

En la práctica este tubo sólo puede emplearse para medir longitudes de ondas sonoras del intervalo medio, puesto que a las vibraciones acústicas extremas corresponden ondas demasiado largas o demasiado cortas. Efectivamente, en el aire, donde la velocidad del sonido es $V = 331$ m/s, a las vibraciones sonoras más lentas, cuya frecuencia es de $\nu = 20$ Hz, corresponde una longitud de onda $\lambda = 331/20$ m $= 16{,}5$ m, mientras que a las vibraciones más rápidas, cuya frecuencia es $\nu = 2 \cdot 10^4$ Hz, corresponde una longitud de onda $\lambda = 1{,}65$ cm. A la frecuencia media $\nu = 500$ Hz corresponde $\lambda = 66{,}2$ cm.

Si el sonido que llega al embudo A es complejo, con una diferencia de marcha determinada $r_2 - r_1$ se debilitan aquellas vibraciones para las cuales esta diferencia sea igual a un número impar de semiondas, es decir, $\lambda/2$; $3\lambda/2$; $5\lambda/2$, etc. Como resultado, de la oscilación compleja se elimina toda una serie de sus componentes armónicas, y el carácter de dicha vibración varía. De esta forma, el tubo hace las veces de filtro acústico con respecto a las vibraciones de frecuencias determinadas.

Un caso particular es el de la interferencia de dos ondas cuyas frecuencias y amplitudes son iguales pero que avanzan *en sentidos contrarios, una al encuentro de la otra*. En este caso, como indicamos en la pág. 480, se forman *ondas estacionarias*. La formación de estas ondas estacionarias se puede apreciar directamente cuando el sonido se refleja en una pared. Para esto hay que utilizar una fuente que emita ondas de una longitud determinada, las cuales deben ser suficientemente cortas para que la distancia entre los vientres contiguos no sea grande. Acercando la cabeza a la pared o alejándola de ella se puede escuchar el reforzamiento del sonido en los sitios en que el cambio de densidad es más brusco, es decir, en los sitios en que se encuentran los nodos.

Kundt propuso un procedimiento muy gráfico para observar las ondas estacionarias. Construyó un aparato consistenre en un tubo de vidrio, de tres o cuatro centímetros de diámetro, cuyos extremos se cierran con dos tapones bien ajustados A y C (fig. 288).

El tapón C tiene en su centro un orificio por el que entra apretadamente una varilla metálica, la cual lleva sujeta en su extremo

un disco de corcho *B* que no roza con las paredes del tubo. Frotando esta varilla con un trozo de piel empolvada en colofonia, se provocan en ella vibraciones longitudinales, las cuales dan lugar a una onda estacionaria que tendrá un nodo en el lugar de sujeción de la varilla y vientres en sus extremos. El disco de corcho *B* comenzará a vibrar y hará que vibre el aire contenido en el tubo. De esta forma se producirá una onda, que avanzará por el tubo e interferirá con la que retrocede después de reflejada en el extremo *A*. Si la longitud del

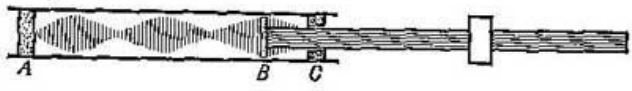


Fig. 288. Experimento de Kundt para estudiar las ondas estacionarias.

tubo contiene exactamente un número entero de semiondas, se obtendrán en él ondas estacionarias con nodos en los extremos. Dentro del tubo se echan limaduras de corcho, las cuales se dispersan en los sitios correspondientes a los vientres y se agrupan en los nodos. Con esto se consigue hacer visibles directamente los sitios en que se forman los nodos y los vientres. La distancia entre dos nodos (o dos vientres) contiguos representa la mitad de la longitud de la onda sonora provocada en el tubo. Por lo tanto, el tubo de Kundt puede servir también para medir la longitud de las ondas sonoras.

La formación de los nodos y vientres puede observarse también en las placas sonoras. En ellas se observa la formación de las llamadas *líneas nodales*. Para esto se toma una lámina de latón soportada por su centro y se pasa un arco de violín por su borde. La lámina se espolvorea con un poco de arena fina. Las vibraciones hacen que esta arena se disperse en los sitios que corresponden a los vientres y que se agrupe alrededor de las líneas nodales. En la placa se forman figuras complicadas que permiten hacerse una idea del tipo de las vibraciones. En la fig. 289 se representan varias de estas figuras correspondientes a una serie de casos particulares. El tipo de la vibración depende del punto de la placa que se roce con el arco, pero puede cambiar si se toca dicha placa con un dedo. En el sitio de excitación se forma un vientre, mientras que en el punto de la placa que se toca con el dedo comienza una línea nodal. Las demás líneas se distribuyen simétricamente por la placa. Si se toca con el dedo un ángulo de la placa y se pasa el arco por el centro de uno de los lados de la misma, se obtiene la figura que representa la fig. 289, *a*. En ella las líneas nodales están dispuestas diagonalmente. Si, por el contrario, tocamos con el dedo el centro de uno de los lados de la placa y pasamos el arco cerca de un ángulo, obtendremos la segunda figura (fig. 289, *b*). Tocando simultáneamente un ángulo y un lado de la placa y excitando

con el arco el centro de otro lado, se consigue una disposición más complicada de las líneas nodales (fig. 289, *c*).

El estudio del tipo de las líneas nodales tiene importancia práctica, puesto que sirve para determinar el carácter de las vibraciones que se producen en las membranas de los teléfonos y de otros aparatos acústicos.

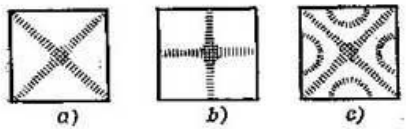


Fig. 289. Líneas nodales.

§ 117. Audición. El hombre percibe los sonidos por medio del órgano del oído. La anatomía de este órgano se representa esquemáticamente en la fig. 290. En los huesos temporales 1 del cráneo se aloja un órgano especial, el caracol *2*, que constituye una pequeña cavidad ósea (de cerca de 0,2 cm^3 de capacidad) llena de un líquido (endolinfa). Dentro del caracol se encuentra el órgano de Corti.

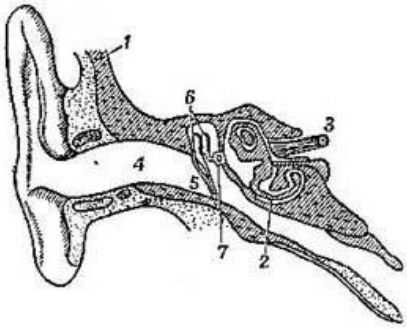


Fig. 290. Corte del oído humano.

Este órgano tiene unas fibras a las que llegan los extremos del nervio acústico *3*. La longitud y tensión de estas fibras es diferente, por lo que resuenan con distintas frecuencias. Las vibraciones acústicas llegan por el conducto auditivo *4* hasta la membrana del tímpano *5*, y, desde aquí, a través de una cadena de huesecillos (martillo, yunque y estribo) se transmiten a la base de la ventana oval *7*, que conduce a la cavidad del caracol. Cuando los sonidos tienen una frecuencia determinada, producen vibraciones de resonancia en determinadas fibras del órgano de Corti y éstas estimulan a su vez los correspondientes extremos nerviosos, los cuales transmiten la excitación al cerebro. Si el sonido es complejo resulta excitada toda una serie de extremos nerviosos y, por consiguiente, el hombre percibe clara y distintamente los sonidos componentes de aquél.

La facultad de distinguir la dirección en que se propaga un sonido radica en que el hombre tiene dos oídos (*efecto binaural*). Esta sen-

sación de la dirección de las ondas acústicas se produce porque los centros cerebrales son capaces de discernir la diferencia de fases de las vibraciones que llegan a cada uno de los oídos. Cuando los sonidos son de alta frecuencia, el juicio sobre la dirección que siguen puede producirse como resultado de la diferencia de amplitudes con que ambos oídos perciben dichos sonidos. En la audición subjetiva se distinguen tres características del sonido: 1) *el tono o altura*, 2) *el timbre* y 3) *la intensidad*.

El tono del sonido depende de la frecuencia: cuanto mayor es la frecuencia más alto es el sonido.

El timbre se debe al carácter de las vibraciones; las vibraciones acústicas solamente en casos excepcionales son armónicas puras, por regla general tienen un carácter más complicado (véase el § 118). La composición de estas vibraciones es la que determina el timbre del sonido.

La intensidad objetiva, o, como suele decirse también, el volumen del sonido, depende de la cantidad de energía que transporta la onda sonora, en la unidad de tiempo, a través de la unidad de superficie tomada perpendicularmente a la dirección en que se propaga.

Esta cantidad de energía es proporcional al cuadrado de la amplitud de la onda y al cuadrado de su frecuencia. De aquí se deduce, que la intensidad de un sonido de tono dado es proporcional al cuadrado de su amplitud. Sin embargo, esta valoración objetiva de la intensidad del sonido no se corresponde con la subjetiva, basada en la sensación directa. Esto se explica por el hecho de que nuestro oído no es igualmente sensible a los sonidos de tonos distintos, es decir, de frecuencia diferente.

La cantidad de energía transportada, en la unidad de tiempo, a través de la unidad de superficie tomada perpendicularmente a la dirección en que se propagan las ondas, como indicamos en la pág. 490, se determina por el vector de Umov $\vec{U}$:

$$\vec{U} = \bar{\varepsilon}\vec{V},$$

donde $\bar{\varepsilon}$ es la densidad media de la energía de la onda y V su velocidad de propagación. Por lo tanto, la intensidad del sonido viene determinada por el vector de Umov, es decir, se puede medir en unidades objetivas, por ejemplo, en unidades del sistema *CGS*, en ergios/cm² s. Para esto puede utilizarse la correlación que existe entre la presión acústica y la densidad media de la energía $\bar{\varepsilon}$. En la pág. 503 indicamos que, cuando su potencia es suficiente, la onda sonora ejerce sobre cualquier obstáculo una presión p, que viene determinada por la densidad media de la energía $\bar{\varepsilon}'$ de la onda estacionaria que se forma junto a dicho obstáculo. De aquí se deduce, que, midiendo la presión p en el obstáculo, se puede medir también la densidad media de la energía de la onda estacionaria $\bar{\varepsilon}'$. La densidad media de la energía $\bar{\varepsilon}$ de la onda que avanza será dos veces menor que $\bar{\varepsilon}'$. Sin embargo, desde el punto de vista experimental, la medición directa de la presión acústica presenta considerables dificultades. Por esta razón se sigue un procedimiento algo indirecto. Rayleigh demostró que sobre un disco situado en el campo de una onda acústica, y sometido a la presión acústica, debe actuar

un par de fuerzas. Para medir este par se cuelga un disco muy ligero de un hilo fino provisto de un espejito. El par de fuerzas que hace girar al disco se calcula por la desviación que sufre un rayo de luz que se refleja en el espejito. De este modo se obtiene la densidad media de la energía de la onda acústica y, después, por medio del vector de Umov, la intensidad del sonido. Este procedimiento también requiere mediciones muy delicadas y en la práctica sirve únicamente para medir sonidos muy potentes. Generalmente se emplea para graduar aparatos electroacústicos (fonómetros), que sirven para medir la intensidad de los sonidos.

Para que una onda acústica produzca la sensación de sonido es necesario que la intensidad de ésta supere una magnitud mínima determinada, llamada *umbral de audición*. Los sonidos cuya intensidad es inferior al umbral de audición no son perceptibles para el

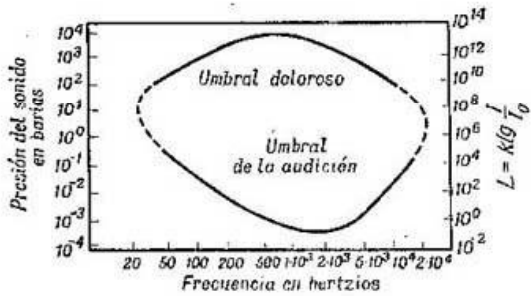


Fig. 291. Sensibilidad del oído.

oído: son demasiado débiles. El umbral de audición es diferente para distintas frecuencias. La sensibilidad máxima del oído humano corresponde a las vibraciones cuyas frecuencias se encuentran comprendidas entre 1 000 y 3 000 Hz; para esta zona de frecuencias el umbral de audición alcanza una magnitud del orden de 10^{-8} ergios/cm²s. Esta sensibilidad es mucho menor cuando las frecuencias son más bajas o más altas. Las vibraciones cuya frecuencia es menor de 20 Hz o mayor de 20 000 Hz, cualquiera que sea su intensidad, no pueden ser percibidas como sonoras.

Las vibraciones de intensidad muy grande (del orden de centenas de millares de ergios/cm² s) dejan también de ser audibles, provocan en el oído una presión molesta y hasta una sensación dolorosa. La magnitud máxima de la intensidad del sonido, pasada la cual se produce la sensación de dolor antedicha, recibe el nombre de *umbral doloroso*. Este umbral es algo diferente para las distintas frecuencias. Entre el umbral de audición y el umbral doloroso se extiende *el campo de audición* representado en la fig. 291.

La intensidad subjetiva del sonido no puede medirse cuantitativamente con exactitud. No obstante, la intensidad de las sensaciones puede valorarse basándose en *la ley psicofísica de Weber—Fechner*, según la cual, la sensación es función lineal del logaritmo

de la excitación. Sobre la base de esta ley logarítmica se establece *una escala* de niveles de la intensidad del sonido. Es natural que se tome como cero el nivel del umbral de audición I_0. Convencionalmente se toma como nivel nulo (o intensidad umbral) el correspondiente a $I_0 = 10^{-9}$ ergios/cm² s, es decir, algo menor que el umbral de audición para una frecuencia de 1 000 Hz. Aceptado esto, por la ley de Weber-Fechner, la sensación que produce un sonido determinado L será proporcional al logaritmo de la reacción entre su intensidad I y la de este mismo sonido en el umbral de audición I_0:

$$L = k \lg \frac{I}{I_0}, \qquad (1)$$

donde k es un coeficiente de proporcionalidad. La magnitud L se suele llamar *nivel* de la intensidad *del sonido**). Suponiendo $k = 1$, elegimos de hecho una unidad determinada de nivel del sonido; esta unidad recibe el nombre de *bel*.

Por lo tanto:

$$L = \lg \frac{I}{I_0} \text{ beles.} \qquad (2)$$

Como divisor del bel se usa el decibel, que es diez veces menor, es decir,

$$L = 10 \cdot \lg \frac{I}{I_0} \text{ decibeles.}$$

La tabla XXI, que da los valores aproximados del nivel de las intensidades de los sonidos más frecuentes, permite formarse una idea más exacta de la característica de dichas intensidades. No obstante, hay que tener en cuenta también que la sensibilidad del oído depende de la frecuencia del sonido.

Tabla XXI

Nivel de algunos sonidos

Sonido	Nivel en decibeles	Intensidad del sonido en $\frac{\text{ergios}}{\text{cm}^2\text{s}}$	Amplitud de la presión en barias
Murmullo leve	30	$1 \cdot 10^{-6}$	$6{,}4 \cdot 10^{-3}$
Ruido de pasos	40	$1 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-2}$
Conversación en voz alta	70	$1 \cdot 10^{-2}$	0,4
Ruidos de una calle animada . . .	90	1	6,4
Fortísimo de orquesta	100	$1 \cdot 10^{1}$	$2{,}0 \cdot 10$
Ruido de un motor de aviación a 3 m de distancia	130	$1 \cdot 10^{4}$	$1 \cdot 10^{3}$

*) Algunos autores la designan con el nombre de «sensación» y otros con el de «sonoridad relativa». (*N. del T.*)

En la tabla XXI puede verse que la energía correspondiente a los sonidos ordinarios es muy pequeña. Para mayor ilustración podemos citar el ejemplo siguiente: si 2 000 personas hablasen continuamente durante hora y media, la energía producida por sus voces apenas bastaría para hacer hervir un vaso de agua.

Para caracterizar objetivamente el timbre del sonido de una vibración acústica compleja hay que desintegrarla en sus componentes armónicas, es decir, determinar su espectro. Esta descomposición puede hacerse utilizando el fenómeno de la resonancia. Si dos diapasones, cuyas vibraciones propias tengan frecuencias iguales, se colocan a cierta distancia uno del otro y se hace que uno de ellos vibre enérgicamente, en el segundo se producen vibraciones más débiles. Para convencerse de esto basta interrumpir de improviso las vibraciones del primer diapasón, apretándolo con la mano, por ejemplo. Entonces se percibirá claramente el débil sonido que emite el segundo diapasón. Si la frecuencia de las vibraciones propias del segundo diapasón es distinta de las del primero, el fenómeno antedicho se manifestará tanto más débilmente cuanto mayor sea la diferencia que existe entre las respectivas frecuencias de las vibraciones propias. Este fenómeno se explica por el hecho de que la onda acústica que emite el primer diapasón, al encontrarse con el segundo, excita en él vibraciones forzadas. Estas vibraciones forzadas alcanzan su amplitud máxima cuando se produce la resonancia. Si el amortiguamiento de las vibraciones del segundo diapasón es pequeño, la resonancia se produce prácticamente al coincidir las frecuencias de las vibraciones propias de los diapasones, en cuyo caso el fenómeno de la resonancia tendrá un carácter suficientemente agudo (véase la pág. 456). Basándose en la resonancia puede realizarse el análisis de una vibración compleja. Para esto se procede del modo siguiente: se toma un gran número de diapasones cuyas vibraciones propias tengan frecuencias distintas ω_i y poco amortiguamiento. La vibración acústica compleja solamente provocará vibraciones forzadas de amplitud apreciable en aquellos diapasones que tengan vibraciones propias cuyas frecuencias ω_i coincidan con las frecuencias ω_k de las componentes del sonido que se analiza.

Para el análisis de los sonidos se pueden emplear, en lugar de diapasones, otros sistemas cualesquiera cuyas vibraciones propias tengan frecuencias determinadas y poco amortiguamiento. Helmholtz fue el primero en analizar los sonidos y utilizó para ello resonadores huecos llenos de aire. Estos resonadores tienen la forma de una esfera metálica con paredes delgadas provista de dos aberturas, una mayor a y otra menor b (en la fig. 292 se ve la sección longitudinal del resonador). La abertura principal a sirve para que entren por ella las vibraciones acústicas en la cavidad del resonador, y la abertura pequeña b, para introducirla en la oreja y poder determinar, a oído, la intensidad de las vibraciones forzadas.

La frecuencia de las vibraciones propias de los resonadores de Helmholtz ω_0 es aproximadamente igual a

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{d}{V}},$$

donde d es el diámetro de la abertura a, y V, el volumen de la cavidad del resonador.

Cualquier tono simple, de los que componen el sonido complejo que se estudia, excitará con mayor intensidad aquel resonador cuyas vibraciones propias tengan una frecuencia ω_0 más próxima a la suya.

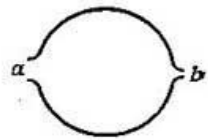


Fig. 292. Resonador esférico de Helmholtz.

De esta forma, el espectro del sonido complejo puede determinarse «escuchándolo» sucesivamente a través de una serie de resonadores y apreciando a oído la intensidad de las vibraciones forzadas que en ellos excita.

La técnica moderna permite estudiar la composición de los sonidos por medio de procedimientos electroacústicos más perfectos, pero que se basan también en el estudio de las vibraciones forzadas.

§ 118. Fuentes de sonidos. Obtención de ultrasonidos. Todo cuerpo vibrante puede servir de fuente de ondas elásticas en el medio que lo rodea, es decir, puede servir de fuente de un sonido. El estudio de las fuentes de sonido tiene gran importancia debido a la difusión alcanzada por la radio y el cine sonoro, en los cuales se utilizan altavoces, y también porque sirve de base a la teoría y a la técnica de la construcción de instrumentos musicales. Pero como estas cuestiones tienen un carácter especial, solamente nos detendremos a estudiar algunas de las fuentes más simples de ondas sonoras.

Veamos cómo se comporta una cuerda de longitud l sujeta por ambos extremos. Cuando se hace que vibre esta cuerda, se producen en ella ondas estacionarias, con la particularidad de que en cada uno de sus extremos se encuentra un nodo; en la parte central de la cuerda se forma un vientre (fig. 293, *a*). A esta vibración le corresponde una frecuencia ω_1 determinada. Pero junto a la onda indicada se puede producir una onda estacionaria con tres nodos: dos en los extremos y uno en el centro (fig. 293, *b*). La frecuencia ω_2 correspondiente a esta segunda vibración será dos veces mayor que la ω_1 de la primera. De la misma forma pueden producirse ondas estacionarias con cuatro nodos (fig. 293, *c*), cuya frecuencia $\omega_3 = 3\omega_1$, y, en general, ondas estacionarias con $k + 2$ nodos (contando los que se

forman en los extremos sujetos), cuyas vibraciones tendrán una frecuencia $\omega_k = (k + 1)\,\omega_1$.

De esta forma, una misma cuerda puede emitir vibraciones acústicas no sólo *del tono fundamental* ω_1, sino también de sus *armónicos* (*sobretonos*), con frecuencias $\omega_k = (k + 1)\,\omega_1$, donde k es

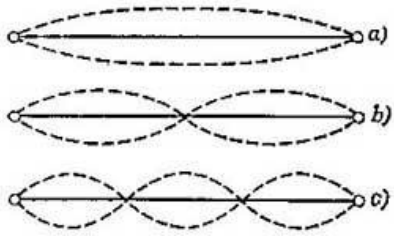


Fig. 293. Ondas estacionarias en una cuerda sujeta por sus dos extremos.

un número entero. En general, cuando vibra una cuerda se forma una serie de ondas estacionarias y, por consiguiente, esta cuerda emite, además del tono fundamental, varios armónicos, cuyas intensidades son considerablemente menores que las de las vibraciones de la frecuencia fundamental. El espectro de las vibraciones (véase la pág. 457) de un grupo de este tipo está formado por una serie de rayas correspondiente a las frecuencias ω_1, $2\omega_1$, $3\omega_1$, . . .

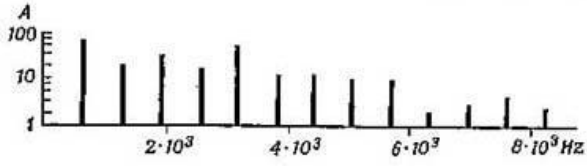


Fig. 294. Espectro acústico de un violín con tono fundamental de 640 Hz.

En la fig. 294 se muestra el espectro acústico de un violín con tono fundamental de 640 Hz; en la 295, el de las vibraciones de un clarinete con tono fundamental de 64 Hz, y en la 296, el de las de un piano de cola de 256 Hz; en esta última figura puede verse cómo junto al espectro de rayas existe una zona de espectro continuo.

A los ruidos corresponde tan sólo un espectro continuo.

En calidad de ejemplo, en la fig. 297 se muestra el espectro del ruido de un mechero de Bunsen.

La intensidad del sonido emitido depende de la amplitud de las vibraciones del sistema sonoro. No obstante, en algunos casos la fuente de vibraciones no produce un sonido intenso aunque las amplitudes sean considerables. Por ejemplo, si una cuerda tensa entre dos sujetadores duros se golpea, el sonido que emite es muy débil. Lo mismo ocurre si se golpea un diapasón teniéndolo sujeto

con la mano. Esto se explica por el hecho de que en estos casos la cuerda vibrante o las ramas del diapasón únicamente producen a su alrededor corrientes de aire cerradas, en forma de remolinos, y no las condensaciones y dilataciones del medio que dan lugar a las ondas

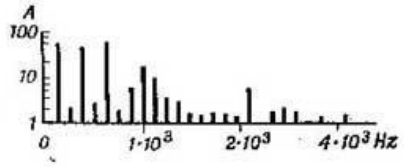


Fig. 295. Espectro acústico de un clarinete con tono fundamental de 64 Hz.

longitudinales. La ligazón del sistema vibrante con el aire que lo circunda es insuficiente y por esto la emisión es débil. Para que esta emisión aumente hay que crear unas condiciones que dificulten la formación de torbellinos. Por esto, para aumentar la sonoridad,

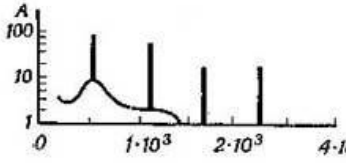


Fig. 296. Espectro acústico de un piano de cola con tono fundamental de 256 Hz.

los diapasones se montan sobre cajas de madera (cajas de resonancia) y las cuerdas de los instrumentos musicales (violines, violonchelos, etc.) se sujetan sobre la tabla de armonía. Las vibraciones de estas cuerdas se transmiten a la gran superficie de la tabla de armonía,

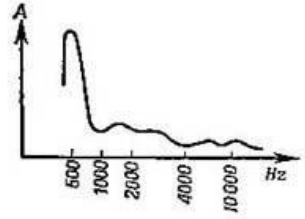


Fig. 297. Espectro acústico de un mechero de Bunsen.

en torno a la cual no es posible que se formen corrientes de aire cerradas. Junto a esta tabla es donde se generan las ondas de condensación y dilatación que hacen que el sonido sea intenso. La tapa del piano de cola desempeña este mismo papel.

El aumento de la emisión explica también la mayor intensidad de los sonidos cuando resuenan los sistemas. Un experimento sencillo de este tipo puede hacerse de la manera siguiente: se toma un diapasón, se hace que suene y se coloca sobre la boca de un recipiente alto y estrecho (fig. 298) que contenga un poco de agua. Si se va añadiendo

agua paulatinamente, llega un momento en que la intensidad del sonido aumenta considerablemente. Este fenómeno se explica del modo siguiente: cuando la columna de aire que hay sobre el agua de la vasija tiene una altura adecuada, entra en resonancia con las vibraciones del diapasón y su amplitud aumenta mucho. En la boca

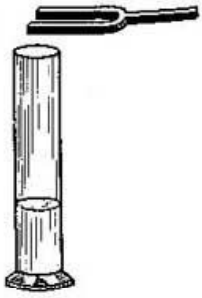


Fig. 298. Resonancia de la columna de aire que hay sobre el agua.

del recipiente se producen alternativamente condensaciones y dilataciones, las cuales rompen los remolinos de aire que se forman alrededor de las ramas del diapasón y, por consiguiente, aumenta la emisión de sonido.

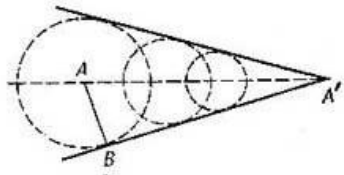


Fig. 299. Generación de una onda balística.

Finalmente, examinemos una onda acústica de tipo especial, que se forma junto a los cuerpos que se mueven en un medio *con velocidad supersónica* (para el aire esta velocidad debe ser mayor de 330 m/s). Todo cuerpo que se mueve en un medio a esta velocidad provoca en él la formación de una onda de choque que recibe el nombre *de onda balística*. La condensación del medio no puede en estas condiciones propagarse por delante del cuerpo que avanza, por lo cual, el frente de la onda se forma detrás de él. Cada uno de los puntos del medio junto al cual pasó el cuerpo puede considerarse como una fuente de ondas esféricas que se propagan con la velocidad del sonido en el medio dado. La envolvente de estas ondas esféricas (fig. 299) tiene la forma de un cono. Supongamos que el cuerpo recorre el segmento AA' en un tiempo t; durante este mismo tiempo la onda sonora se propagará en torno al punto A a una distancia $AB = Vt$, donde V es la velocidad del sonido. De donde se deduce, que el

ángulo en el vértice del cono φ vendrá determinado por la relación

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{AB}{AA'} = \frac{V}{v}, \qquad (1)$$

donde v es la velocidad del cuerpo. De esta forma, la onda balística tiene un frente en forma de cono cuyo ángulo de abertura se determina por la igualdad (1). La onda así formada no tiene carácter periódico, pero es de por sí una región de compresión que se propaga a la velocidad del sonido. Producen ondas de este tipo los proyectiles modernos de artillería o a reacción y también los aviones que vuelan a velocidades supersónicas. La impresión que producen estas ondas es la de un golpe seco. A parte de esto, los proyectiles provocan otras vibraciones (que producen sonidos silbantes o aullantes), debidas a las desigualdades de sus superficies. Todas estas vibraciones se observan después de pasar el proyectil, ya que, como éste se mueve a más velocidad que el sonido, adelanta a las ondas que se propagan.

Para producir *los ultrasonidos* suele utilizarse el llamado *efecto piezoeléctrico* (véase el t. II). Este efecto consiste en que ciertos cristales al ser introducidos en un campo eléctrico experimentan una deformación mecánica. Para conseguir vibraciones ultrasónicas se utilizan cristales de cuarzo (cuarzo piezoeléctrico). Si a una lámina de cuarzo tallada convenientemente con respecto a sus ejes cristalográficos se aplica una tensión eléctrica alterna, por medio de unos revestimientos metálicos, la lámina comienza a vibrar. Estas vibraciones se hacen particularmente intensas cuando la frecuencia de la corriente eléctrica aplicada coincide con la de las vibraciones mecánicas propias de la lámina (fenómeno de la resonancia). Eligiendo debidamente las dimensiones de la lámina se pueden conseguir vibraciones ultrasónicas con frecuencias de centenas de millones de hertzios.

Las ondas ultrasónicas, debido a su pequeña longitud, son menos propensas que las sonoras a sufrir desviaciones (difracción; pág. 473). Esto permite obtener haces de ondas ultrasónicas bien dirigidas.

En la actualidad los ultrasonidos se utilizan mucho en la técnica, especialmente para señales submarinas dirigidas, para detectar objetos sumergidos y para determinar la profundidad del mar (*eco-sonda o sonar*). Las láminas de cuarzo, de igual espesor, después de talladas de manera especial, se esmerilan entre sí formando mosaicos y se pegan entre dos planchas gruesas de acero. Haciendo llegar a estas planchas una corriente eléctrica alterna, todo el sistema se convierte en una poderosa fuente de ultrasonidos.

El eco-sonda o sonar se basa en lo siguiente: un foco de ultrasonidos sumergido en el agua lanza verticalmente hacia abajo un rayo sonoro, el cual, al llegar al fondo, se refleja en él y retorna al punto de partida. Conociendo la velocidad de propagación del sonido en el agua y el tiempo que transcurre desde que se lanza la señal

ultrasónica hasta que regresa (por observación del eco), no es difícil calcular la profundidad.

Para la recepción del eco también se utiliza el cuarzo piezoeléctrico. Las vibraciones sonoras, al llegar a dicho cuarzo provocan en él vibraciones elásticas, lo que hace que en la superficie opuesta del mismo se generen cargas eléctricas, las cuales pueden ser recogidas y medidas con aparatos eléctricos correspondientes.

Las ondas ultrasónicas sirven para transmisión de señales en el agua, porque en ella se propagan sin absorción sensible, pero en el aire se amortiguan mucho, por lo cual no son aptas para transmitir señales a través del aire.

El empleo técnico moderno del ultrasonido es muy variado. Se utiliza para descubrir defectos ocultos en las piezas metálicas (defectoscopios ultrasónicos), para medir huelgos, espesores, etc. Algunas aplicaciones están relacionadas con las acciones mecánicas que producen los ultrasonidos potentes en el medio en que se propagan. Así, por ejemplo, con los ultrasonidos se pueden trabajar superficies metálicas y no metálicas, taladrar orificios, limpiar piezas, etc. Los ultrasonidos influyen también en muchos procesos físicoquímicos y en el desarrollo de las reacciones químicas.

§ 119. Reflexión y absorción de las ondas sonoras. Cuando una onda sonora llega al límite entre dos medios diferentes, una parte de ella se refleja en dicho límite y otra penetra en el segundo medio y continúa propagándose en él. Las ondas, al propagarse en un medio cualquiera, se debilitan poco a poco, debido a que la energía de las vibraciones se convierte en otras formas de la energía.

Los fenómenos de reflexión y absorción de las ondas sonoras juegan un gran papel en la propagación de los sonidos dentro de locales cerrados. Cuando se proyectan salones de actos, salas de conciertos, aulas o teatros, hay que tener muy en cuenta la posibilidad de que se produzcan reflexiones múltiples de las ondas sonoras en las paredes, en el techo, etc. De estas reflexiones dependen las propiedades acústicas del local.

En la actualidad existe una rama especial de la técnica que se llama *Arquitectura Acústica*.

En los locales de dimensiones medianas una onda acústica sufre varios centenares de reflexiones sucesivas en las paredes y el techo antes de que su energía descienda hasta el umbral de audición. En los grandes locales las ondas reflejadas hacen que un sonido pueda oírse durante varios segundos después de interrumpir su emisión. Un amortiguamiento demasiado lento del sonido empeora las propiedades acústicas del local, dando lugar a una «sonoridad» exagerada, con lo cual, cada parte de un contexto coherente (por ejemplo, cada sílaba de un discurso) resulta estorbada por las vibraciones anteriores aún no amortiguadas. Pero un amortiguamiento excesivamente rápido también es perjudicial desde el punto de vista

acústico, puesto que entonces los sonidos nos llegan demasiado débiles y «secos». Para el amortiguamiento hay un valor óptimo.

Cuando se calculan las propiedades acústicas de un local *se parte del llamado tiempo de reverberación, que es el necesario para que la energía del sonido disminuya hasta la millonésima parte de su valor inicial* ($W = 10^{-6} W_0$).

Como quiera que el amortiguamiento es diferente para ondas de distintas frecuencias, la reverberación se determina para una frecuencia de 512 Hz. El tiempo óptimo de reverberación varía según sea el fin a que se destinan los locales, por ejemplo, para las salas de conciertos, aulas, etc., el tiempo óptimo de reverberación es una magnitud del orden de 1 s.

Llamando W_0 a la densidad de la energía sonora en el momento inicial (dentro del local); α al coeficiente de absorción al reflejarse, y n, al número de reflexiones en la unidad de tiempo, tendremos, que la disminución de la densidad de la energía dW en un tiempo dt será

$$dW = -\alpha n W\, dt.$$

Escribamos esta expresión de la forma:

$$\frac{dW}{W} = -\alpha n\, dt,$$

que, a su vez, puede escribirse de la forma:

$$d\,(\ln W) = -d\,(\alpha n t).$$

Como ya dijimos en una ocasión (véase la pag. 491), si las diferenciales de dos magnitudes son iguales entre sí, las propias magnitudes sólo pueden diferenciarse en una constante aditiva:

$$\ln W = -\alpha n t + C. \qquad (1)$$

Cuando $t = 0$, de acuerdo con las condiciones, $W = W_0$, por lo tanto tendremos que

$$C = \ln W_0,$$

y, por consiguiente, la igualdad (1) tomará el aspecto:

$$\ln \frac{W}{W_0} = -\alpha n t,$$

de donde

$$W = W_0 e^{-\alpha n t}. \qquad (2)$$

Es decir, la densidad de la energía sonora disminuye con el tiempo según una ley exponencial.

Por el cálculo de probabilidades puede hallarse que el número de reflexiones que experimenta una onda acústica en 1 s, suponiendo que las ondas se propaguen en todos los sentidos posibles, es igual a

$$n = \frac{vS}{4V},$$

donde v es la velocidad del sonido, S es el área de las superficies del local y V, el volumen del mismo.

Poniendo este valor de n en (2), obtenemos

$$W = W_0 e^{-\frac{\alpha v S}{4V} t}. \qquad (3)$$

De donde vemos, que el amortiguamiento no sólo depende de los factores geométricos S y V, sino también del coeficiente de absorción α.

Para hallar el tiempo de reverberación, suponemos que en (3)

$$\frac{W}{W_0} = 10^{-6},$$

entonces

$$t = -\frac{4V}{\alpha v S} \ln 10^{-6}.$$

Poniendo en esta fórmula en lugar de v el valor de la velocidad del sonido en el aire, obtenemos que

$$t = 0{,}163 \frac{V}{\alpha S}. \qquad (4)$$

En la tabla XXII se dan los valores del coeficiente de absorción (para la frecuencia de 512 Hz) de algunos materiales.

Tabla XXII

Coeficiente de absorción de las ondas sonoras

Material	α
Hormigón	0,015
Pared de ladrillos enlucida	0,025
Techo de tablas encalado	0,034
Alfombras	0,20
Fieltro (de 2,5 cm de espesor situado a 8 cm de la pared)	0,78

Como puede verse en esta tabla, el coeficiente de absorción varía mucho para los distintos materiales. La «sonoridad» de los locales con suelos y paredes de hormigón depende del escaso valor que tiene α para este material. De la misma manera, la «mudez» de los locales con paredes tapizadas se debe al valor relativamente grande de α para las alfombras y tapices.

INDICE ALFABETICO

Absorción 422
— de los sonidos 516, 518
Aceleración 28
— angular 46
— centrípeta (normal) 43
— media 31
— en el movimiento curvilíneo 40
— en el movimiento uniformemente variado 27
— en el movimiento vibratorio armónico 431
— tangencial 44
Adiabática 305
Adsorción 422
Amplitud 428
— del sonido 502
Angulo de contacto 363
Anisotropía 385
Arquitectura acústica 516
Atmósfera física 184
— técnica 184
Atomo-gramo 180
Audición 506
Avenarius 274

Baria 184
Bel 509
Boltzmann 345
Bomba de condensación 254
Bomba de difusión 254
— rotatoria de aceite 252
— de vacío 251, 253
Bernoulli 196
Bessel 132
Born 391

Caballo de vapor 96
Caída de los cuerpos 30
Calor 288, 293
— específico 206
— — su dependencia de la temperatura 211, 413
Calor específico de los gases 206
— — de los gases diatómicos 209
— — de los gases monoatómicos 209
— — de los gases poliatómicos 210
— — de un gas a presión constante 207
— — de un gas a temperaturas bajas y altas 211
— — de un gas a volumen constante 206
— — molar o calor molecular 206
— latente de vaporización 372
— de vaporización 372
Caloría 207, 293
Campo de la fuerza de la gravedad 133
— del vector velocidad 158
Cantidad de calor 293
— de calor reducida 342
— de movimiento 61, 62
Capacidad calorífica de los cuerpos sólidos 411, 420
Capacidad calorífica de los cuerpos líquidos 420
Capilaridad 362
Carga de rotura 401
Cavendish 129
Centro de curvatura 41
— de masas 137
Ciclo 303
— de Born-Haber 393
— de Carnot 316
— Diesel 329
— directo 303
— inverso 304
— de un motor de combustión interna 326
— de una máquina de vapor 324
— de un motor pulsorreactor 330
Cinemática 22
Cinemática del sistema invariable 45
Clausius 196, 295
Coeficiente de absorción 492, 517
Coeficiente de conductividad de los gases 243

Coeficiente de contracción lateral en la tracción longitudinal 396
— crítico 279
— de difusión 236
— de dilatación 186, 409
— de dilatación cúbica 410
— de dilatación lineal 409
— de elasticidad 395
— de rozamiento 60
— de rozamiento estático 60
— de tensión superficial 354
— de viscosidad 169
Coherencia 477
Compás (brújula) giroscópico 152
Composición de las vibraciones 436
Composición de las vibraciones perpendiculares entre sí 442
Conductividad térmica de los gases 243
— — de los gases a bajas temperaturas 248
Conservación de la energía 106, 292
— del momento de la cantidad de movimiento 148
— del momento de la cantidad de movimiento del líquido 164
Constante de Boltzmann 199
— de los gases 192
— de gravitación 126, 130
— de Planck 415
— de Sutherland 230
Continuidad del filete 160
Corrección de Van der Waals 260, 263, 265
Correlaciones de Boltzmann entre la entropía y la probabilidad del estado 345
Corriente laminar del líquido 171
— turbulenta de un líquido 171
Convección 243
Cristal 385
Cuerpo amorfo 385
— cristalino 385
— isótropo 385
— macroscópico 20
— microcristalino 387
— policristalino 387
— sólido 385
Cuerpo sólido invariable 45
Curva balística 39
Curvatura de una línea 40
— de las superficies 361
Choque de esferas elásticas 101
— de esferas inelásticas 72
— de moléculas 228
Dalton 202
Decibel 509
Decremento logarítmico 449
Defectoscopio ultrasónico 516
Deformación 394
— de cizallamiento 397
— de compresión unilateral 394
— de los cuerpos cristalinos 405
— de los cuerpos elásticos 394
— de los cuerpos sólidos 394
— permanente 402
— plástica 402
— de torsión 398
— de tracción longitudinal 394
Densidad 16
— de la energía 489
— del gas 193
— relativa del gas 193
— de la Tierra 131
Desigualdad de Clausius 341
Desplazamiento de las partículas brownianas 183, 223
Diagrama del indicador 325
Diámetro de la molécula 229, 269
Difracción 473
Difusión de los gases 235
Dimensiones de las magnitudes físicas 113
Dina 63
Dinámica 53
Disociación 378
Disolución 375
Dispersión de las ondas 495
Distribución de las partículas por alturas 221

Ebullición 373
Eco-sonda 515
Ecuación de Bernoulli 162
— de estado 191
— del movimiento vibratorio armónico 428
— de la onda 473, 485
— de Poisson 308
— de Van der Waals 259, 261
— de Van der Waals en magnitudes reducidas 276
Efecto binaural 506
— Doppler 492
— giroscópico 150
— Joule-Thomson 280
Einstein 20, 83
Eje cristalográfico 410
— de rotación 46
Elasticidad retardada 405
Elongación 426
Energía 106

Energia de la acción intermolecular 279
— acústica 508, 510
— cinética 98, 100
— cinética de las moléculas 199
— cinética de rotación 153
— correspondiente a un grado de libertad 205
— interna del gas 203, 279
— interna de los cuerpos 297
— del movimiento vibratorio armónico 435
— de la onda 488
— potencial 103, 104
— potencial de los cuerpos que se atraen según la ley de Newton 134
— potencial de un cuerpo elástico deformado 113, 396
— potencial de la red cristalina 390
Engels 21, 296, 298
Entropía 343
Eötvös 132
Equilibrio de sistemas 299
Equipartición de la energía 205
Equivalencia de la masa y la energía 121
Equivalente mecánico del calor 291, 292
Ergio 95
Escala centígrada (de Colsius) de temperaturas 186
— empírica de temperaturas 186
— de intensidad del sonido 507
— de Kelvin (absoluta) de temperaturas 190
— termodinámica de temperaturas 323
Escalar 33
Esfera de acción molecular 351
Espacio recorrido en el movimiento uniforme 24
— — en el movimiento uniformemente variado 29
— — en el movimiento variado 27
Espectro acústico 512
Espectros de los sonidos 512
— de las vibraciones 462
Estado crítico de la substancia 270
— de equilibrio 300
— no equilibrado 299
Estados correspondientes 278
Estenio 63
Estructura de los líquidos 348, 419
Evaporación de los líquidos 372
Expansión de una gota 369
Fase 428
— inicial 428, 476
Faraday 11
Fiódorov 388
Fenómeno casual 334
Fenómenos de transporte en los gases 235
Figuras de Lissajous 446
Física estadística 288
Flotación 367
Fluctuación 339
Flujo de energía 490
Foco caliente 304
— frío 304
Fok 83
Formación de las gotas 357
Fórmula barométrica 222
— de Clapeyron-Clausius 375
— fundamental de la teoría cinética de los gases 199
— de Laplace 362
— de Mendeléiev-Clapeyron 192
— de Poiseuille 178
— de Van't Hoff 378
Fórmulas de las dimensiones 113
Foucault 152
Frecuencia cíclica 428
— circular 428
— de las vibraciones 428
Frenkel 349, 351
Frente de la onda 470
Fuente de sonidos 511
Fuerza 55
— centrífuga 76, 81
— centrípeta 75, 81
— de Coriolis 85
— cuasielástica 427
— de la gravedad 126, 133
— de inercia 80
— normal 75
— potencial 103
— de rozamiento 58
— de sustentación 176
— tangencial 75
Fuerzas de acción intermolecular 262
— giroscópicas 151
— de inercia 78, 80
— de inercia en un sistema de movimiento circular 81
— internas 73
— del movimiento curvilíneo 75
Función de distribución 215
Fusión de los cuerpos sólidos 386, 415

Galilei 19, 68
Gas ideal (perfecto) 188
— real 259

Gases ultraenrarecidos 257
Giroscopio (giróstato) 150
Golitsin 203
Gradiente de densidad 236
— de temperatura 243
— de velocidad 169, 241
Grado de libertad 204
Gramo-fuerza 64
Gramo-masa 15, 65
Gravitación 126
Gross 415

Haz atómico 232
— molecular 231
Hectovatio-hora 96
Helio I 170
Helio II 170
Helmholtz 510
Hertz 11, 499
Hertzio 499
Hidrodinámica 158

Impulsión de una fuerza 63
Impulso angular 148
Indicador 325
Infrasonidos 499
Intensidad del sonido 507
Interferencia 477
— de ondas 477
— del sonido 503
Inyector o trompa de agua 163
Ioffe 408
Isobara 189
Isocora 189
Isoterma del anhídrido carbónico 271
— de Boyle-Mariotte 185
— de Van der Waals 270

Joule 280, 291
Julio 95

Kamerlingh-Onnes 286
Kapitsa 170, 286
Kelvin 191
Kepler 131
Kilográmetro 95
Kilogramo-fuerza (kilogramo-peso) 64
Kilogramo-masa 16, 63
Kilojulio 95
Kilovatio 96
Kilovatio-hora 96
Kundt, método de 504

Lébedev 503
Lenin 10, 14, 20
Ley de Avogadro 192
— de la aceleración (segunda ley de Newton) 55, 61
— de la gravitación universal de Newton 126
— de Boyle-Mariotte 184
— de la conservación de la cantidad de movimiento 72
— de la distribución de Boltzmann 221
— de distribución de las velocidades de Maxwell 213, 217
— de Dulong y Petit 412
— de Gay-Lussac 186
— de Hooke 394
— de Joule y Kopp 414
— de Raoult 381
— de Stokes 174
— de Weber-Fechner 508
Linde, máquina de 284
Línea de corriente del líquido 158
Licuación de los gases 277
Licuefacción de los vapores 272
Límite de elasticidad 401
Línea nodal 506
Líquido 348
— «estirado» 273
— ideal o perfecto 158
— recalentado 387
— sobrefundido 387
— viscoso 168
Líquidos que mojan 363
Lomonósov 196, 289
Longitud de onda 470, 476

Mandelshtam 415
Manómetro de McLeod 256
— de mercurio 255
— térmico 256
Máquina de Atwood 67
— frigorífica 305
— térmica 303
— de vapor 324
Masa 56
Masa del átomo 182
— — su dependencia de la velocidad 120, 123
— gravitatoria 132
— en reposo 120
— del Sol 131
— de la Tierra 131
Mayer 295
Maxwell 11, 213
Mecánica cuántica 20, 123
Medición de las magnitudes físicas 12

Medio continuo 158
Mendelêiev 11, 192, 274
Menisco 364
Metro 15
Modulación de las vibraciones 460
Módulo de elasticidad 395
— de rigidez 398
— de Young 395
Mol 181
Molécula 180
Molécula-gramo 180
Momento de la cantidad de movimiento 146, 149
— de una fuerza 138, 139
— de inercia 140, 143
— de un par 142
Monocristal 387
Motor de combustión interna 326
— pulsorreactor 166, 330
Móvil perpetuo de primera especie 294
— — de segunda especie 315
Movimiento 20
— browniano 183, 224
— de un cuerpo pesado, lanzado formando ángulo con el horizonte 38
— curvilíneo 36
— de los líquidos 158
— de un líquido viscoso 168
— de la Luna 128
— molecular 182
— rectilíneo uniforme 23
— rectilíneo uniformemente variado 27
— rectilíneo variado 25
— de rotación 46
— del sistema invariable (cuerpo sólido) 136
— térmico de los gases 195
— térmico de los líquidos 349, 420
— térmico de las moléculas 182, 195
Movimiento térmico en los sólidos 408
— de traslación 46
— vibratorio armónico 425

Nadiózhdin 274
Newton 19, 53, 127
— primera ley de 53
— segunda ley de 55, 61
— tercera ley de 69
Newton 63
Nivel del sonido 509
Nodo 481
Número de Avogadro 223, 340
— de Loschmidt 200
— de moléculas en la unidad de volumen 200

Oclusión 422
Oído 506
Olszewski 284
Onda balística 514
Ondas estacionarias 480, 504
— longitudinales 467
— transversales 467
Opalescencia 273
Orden de largo alcance (u ordenación lejana) 421
Ordenación próxima 421

Parámetro 291, 299
Par de fuerzas 142
Película monomolecular 371
Péndulo 426
— balístico 108
— físico 435
— matemático 433
Pérdida de media onda 484
Período 47
— de la oscilación del péndulo 434
— de las vibraciones 429
Perrin 222
Peso 65, 66
— atómico 180
— su dependencia de la altura 128
— su dependencia de la latidud 81
— molecular 180
Pictet 283
Poise 169
Policristal 387
Polímero 387
Popov 12
Potencia 94, 95
Presión 184
— crítica 273, 283
— debida a la curvatura de la superficie del líquido 358
— interna del gas 261
— interna en los líquidos 352
— molecular 348
— osmótica 379
— parcial 201
— reducida 277
— del vapor saturado 272, 379
Primer principio de la Termodinámica 294
Principio clásico de la relatividad 68
Principio de D'Alembort 80
— de Huygens 471
— de la igualdad de la acción y de la reacción 69
— de incertidumbre (de Heisenberg) 124, 195
— de la inercia (primera ley de Newton) 53, 54

Probabilidad 335
Producto vectorial 51
Propagación de las ondas elásticas 484
Proyectil cohete 166
Pulsación 442
Pulverizador 163
Punto crítico 273
— de inversión 282
— material 21
— triple 419

Radio de acción molecular 351
— de curvatura 41
Recorrido libre 229
Red atómica 389
— cristalina 388
— heteropolar 388
— homopolar 389
Reflexión de los sonidos 516
Regla del sacacorchos 50
Regulador centrífugo 77
Regularidad estadística 336
Relatividad del movimiento 21
Rendimiento de una máquina térmica 303, 316, 322
— de una máquina de vapor 326
— de un motor de combustión interna 328, 330
— de un motor pulsorreactor 331
Representación gráfica de la energía 110
— de las vibraciones por medio de números complejos 465
Resonador de Helmholtz 510
Resonancia 454
Resonancia paramétrica 457
— de las vibraciones 454
Reverberación 517
Rozamiento 58
— estático 58
— interno 168, 239
— interno a bajas presiones 248
Rumford 291

Sección eficaz de las moléculas 229
Segundo 16
Segundo principio de la Termodinámica 315
Sentido estadístico del segundo principio de la Termodinámica 334
Serie de Fourier 461
Sistema absoluto de unidades 17
Sistema acelerado 78
— autooscilador 450
— de comparación (o de referencia) 21
— inercial 53
Sistema internacional de unidades (SI) 15
— *MKS* (de unidades) 17
— técnico de unidades 17
— de unidades 16
Sonido 499
Stern 234
Stoltétov 12, 274
Sublimación 419
Substancia termométrica 186
Superfluidez 170
Superposición de ondas 477
Suspensión cardán 150

Tabique semipermeable 377
Temperatura 186
— de cero absoluto 191
— crítica 273, 283
— reducida 277
Tensión superficial 353
Teorema de Nernst 347
Teoría atómica 179
— cinética de los gases 194
— cinético-molecular 195
— cuántica de la capacidad calorífica 206
— general de la relatividad 83
— de los líquidos de Frenkel 349, 422
— mecánica del calor 289
— de la relatividad 20, 117
Tercer principio de la Termodinámica 347
Termodinámica 287
Termos 249
Thomson 280, 295
Tiempo de relajación 422
Timbre del sonido 508
Tonelada-fuerza 64
Tonelada-masa 15
Tono (altura) del sonido 508
Torr (mm de la columna de mercurio) 184
Trabajo 91, 96
— de la fuerza de la gravedad 133
— de las fuerzas elásticas 98, 396
— de un momento de fuerzas, 153
— al variar el volumen del gas 301, 311
Trampa de mercurio 255
Transformación adiabática 305
— de la energía 296
— equilibrada 300
— irreversible 300, 331
— politrópica 308
— reversible 300, 331
Trayectoria 36
Tsiolkovski 166
Tubo de corriente del líquido 159

Ultrasonidos 499, 515
Umbral de audición 508
Umov 490
Unidad técnica de masa 64
Unidades de medición 14

Vacío 250
— preliminar 254
Vapor saturado 272
Variación adiabática del volumen del gas 307
— isotérmica del volumen del gas 307
Vasija de Dewar 249
Vatio (Watt) 96
Vector 33
— principal de las fuerzas 136
— de Umov 490, 507
Velocidad 23
— angular 46
— angular como vector 50
— cuadrática de las moléculas 198, 201, 216
— de escape 135
— de fase 470, 495
— de grupo 495
— más probable de las moléculas 213
— media 25
— media aritmética de las moléculas 216
— de las moléculas determinada experimentalmente 233
Velocidad del movimiento curvilíneo 37
— del movimiento rectilíneo uniforme 22
— del movimiento uniformemente variado 29
— del movimiento variado 26
— del movimiento vibratorio armónico 431
— orbital 85
— de propagación de las ondas 469, 485, 501
— del sonido 501
Vibración propia 452
Vibraciones 431
Vibraciones acústicas 499
— amortiguadas 447
— forzadas 451
— inarmónicas 458
— de torsión 400
Vientre 481
Viscosidad 169
Viscosímetro 178
Volumen crítico 273
— de la molécula 266
— molecular 188
— reducido 277

Zayonchevski 274
Zhukovski (Joukovsky) 176
Zona de silencio 502

A nuestros lectores:

«Mir» edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés y árabe. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia ficción. Dirijan sus opiniones a Editorial «Mir», Rizhski per, 2, 129820, Moscú, I-110, GSP, URSS.

Este año la editorial MIR publicará
la obra de Yu. Rozanov «Procesos aleatorios»

Yu. ROZANOV

Procesos aleatorios

Este libro está destinado para la enseñanza inicial de la teoría de probabilidades y de los procesos aleatorios. En él se exponen los conceptos fundamentales y los métodos modernos de la teoría de probabilidades. En los modelos elementales se estudian las propiedades más características de los distintos tipos de procesos aleatorios. Se examinan las tareas teórico-probabilísticas, que tienen interés para sus aplicaciones. En la exposición del material se utilizan, fundamentalmente, los «métodos probables directos», que facilitan el desarrollo de la intuición en probabilidades que juega un papel no poco importante en la solución de las tareas teórico-probabilísticas.

El libro comprende cuatro capítulos: el primero se dedica a la introducción a los conceptos fundamentales de la teoría de probabilidades, el segundo trata las distribuciones de probabilidades, en el tercer capítulo se exponen algunos modelos de procesos aleatorios, y el cuarto — algunas tareas de pronosticación filtrado y regulación de los procesos aleatorios.

Formato 14,3 × 21,5 cm. Encuadernado en tela con sobrecubierta. 275 págs. con figuras.

En 1973 Mir reeditara

I. Bronshtéin, K. Semendiáev MANUAL DE MATEMÁTICAS Formato 11,5 × × 17,5 cm. Encuadernado en tela con sobrecubierta, 696 págs.

B. Demidovich PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE ANÁLISIS MATEMÁTICO Formato 14,3 × 21,5 cm. Encuadernado en tela con sobrecubierta, 438 págs. con figuras.

A. Fersman. GEOQUÍMICA RECREATIVA Formato 17,5 × 22 cm. Encuadernado en tela con sobrecubierta, 484 págs. con ilustraciones

A. Kiselev, M. Krasnov, G. Makarenko PROBLEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS. Formato 14,5 × 22,5 cm. Encuadenado en tela con sobrecubierta, 220 págs. con figuras.

M. Kuznetsov FUNDAMENTOS DE ELECTROTECNIA. Formato 14,5 × × 22 cm. Encuadernado en tela, 560 págs. con figuras.

L. Landau, Yu. Rumer QUE ES LA TEORÍA DE LA RELATIVIDAD. Formato 13 × 19,5 cm. En rústica con sobrecubierta, 64 págs. con figuras.

A. Malajov. HACIA EL CENTRO DE LA TIERRA. Formato 10,5 × 16,5 cm. En rústica con sobrecubierta, 168 págs. con figuras.

Yu. Perelmán MATEMATICAS RECREATIVAS. Formato 13 × 16,5 cm. En rústica, 200 págs. con figuras.

A. Strugatski, B. Strugatski CATACLISMO EN IRIS. Formato 10,6 × 18,5 cm. En rústica con sobrecubierta, 96 págs. con figuras.

F. Ziguel LOS TESOROS DEL FIRMAMENTO. Formato 10,6 × 175, cm. En rústica, 316 págs. con figuras.